УДК 539.3
DOI: 10.23885/2500-0640-2018-14-1-11-20

ДИНАМИЧЕСКАЯ СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СЛОИСТОГО ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

© 2018 г. Г.Ю. Леви¹, И.Б. Михайлова¹, Е.И. Ворович²

Аннотация. В рамках линеаризованной теории распространения термоупругих волн рассмотрена динамическая смешанная связанная задача о колебаниях неоднородной среды под действием осцилирующей на ее поверхности тепловой нагрузки, имитирующей действие модулированного по частоте лазерного луча. Среда представляет собой термоупругий преднапряженный слой, жестко сцепленный с термоупругим преднапряженным полупространством. Поверхность слоя свободна от механических напряжений и теплоизолирована вне области воздействия. На границе сред рассматриваются два вида тепловых условий: идеальный тепловой контакт и теплоизоляция. Начальное напряженное состояние предполагается однородным и создается за счет предварительного нагрева и действия механических усилий. Методами операционного исчисления краевая задача со смешанными тепловыми граничными условиями сведена к интегральному уравнению первого рода относительно неизвестной функции распределения теплового потока в зоне контакта. Методом граничных элементов построено его решение. В качестве примера исследовано распределение полюсов функции Грина среды с учетом действия начальных деформаций и предварительного нагрева, а также особенности формирования волнового поля в зависимости от тепловых условий на границе раздела составляющих среды. Тепловые условия на границе сред на распределение вертикального смещения поверхности слоя в естественном состоянии влияют незначительно, в то время как условие теплоизоляции между слоем и полупространством позволяет компенсировать влияние преднагрева тела на формирование поверхностного волнового поля.

Ключевые слова: термоупругие волны, слоисто-неоднородное полупространство, начальные напряжения, преднагрев, функция Грина.

THE DYNAMIC MIXED PROBLEM FOR A PRE-STRESSED LAYERED THERMOELASTIC HALF-SPACE

G.Yu. Levi¹, I.B. Mikhailova¹, E.I. Vorovich²

Abstract. In the framework of the linearized theory of the propagation of thermoelastic waves, we consider a dynamical mixed bound problem on the vibrations of an inhomogeneous medium which is under the action of oscillating on its surface thermal stress. It is simulating the effect of a frequency-modulated laser beam. The medium is a thermoelastic prestressed layer rigidly coupled to a thermoelastic pre-stressed half-space. The surface of the layer is free from mechanical stresses and is thermally insulated outside the area of temperature influence. There are two types of thermal conditions on the boundary of the media: ideal thermal contact and thermal insulation. The initial stress state is assumed to be uniform and is created by preheating and the action of mechanical forces. By using the methods of operational calculations, we reduced the boundary value problem with mixed thermal boundary conditions to an integral equation of the first kind with respect to the unknown heat flux distribution function in the contact zone. By the method of boundary elements we constructed solution of this equation. As an example, the distribution of the poles of the Green's function of the medium taking into account the effect of initial deformations and preheating is studied. We also investigate the

¹ Южный научный центр Российской академии наук (Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: galias@yandex.ru

² Донской государственный технический университет (Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

features of the wave field formation in two cases of thermal conditions at the interface between the constituents of the medium. It is shown that the thermal conditions at the boundary of the media affect the distribution of the vertical displacement on the layer surface in the natural state insignificantly. While the condition of thermal insulation between the layer and the half-space makes it possible to compensate the effect of the body preheating on the surface wave field formation.

Keywords: thermoelastic waves, layered inhomogeneous half-space, initial stress, preheating, Green's function of a prestressed thermoelastic medium, integral equation, wave field.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современных технологий обуславливает значительный интерес к процессам возбуждения механических колебаний за счет воздействия лазерного излучения [1]. Особенности математической постановки и различные методы описания такого вида возбуждения механических колебаний приведены в статьях [1–3]. В большинстве работ для исследования используются различные подходы, позволяющие эффективно анализировать всевозможные стороны динамических процессов в термоупругих средах [4–20]. Это, прежде всего, особенности распространения объемных [4–6] и интерфейсных [7; 8] волн, волн Рэлея [9; 10], Лэмба [11–13] и цилиндрических волн [14]. Особое место в проблеме распространения термоупругих волн в полуограниченных телах занимают вопросы вязкоупругих эффектов [15–19], а также наличия начальных напряжений [20–24].

В статье [25] за счет использования изложенного в монографии [26] подхода проведена последовательная линеаризация нелинейных уравнений термоупругой среды. Определяющие соотношения и уравнения движения преднапряженной термоупругой среды представлены в тензорной форме, допускающей обобщение на криволинейные координаты. Впоследствии они использованы в работах [27; 28] при построении функции Грина термоупругого преднапряженного слоя и исследовании температурных эффектов, сопровождающих процесс распространения термоупругих волн.

Значительный интерес представляют вопросы контактного взаимодействия термоупругих тел [29–32]. Возможно, в работе [29] впервые дана постановка динамической контактной задачи для термоупругой среды. В публикациях [30; 31] исследованы вопросы контактного взаимодействия термоупругого слоя и полупространства. Уравнения движения, построенные в работе [25], и определяющие соотношения преднапряженной термоупругой среды в статье [32] обобщены на класс предварительно

напряженной термоупругой среды с неоднородным покрытием. Особый интерес представляют проблемы распространения волн Рэлея в пьезоактивных термоупругих средах, исследование которых приведено в статье [33]. В связи с актуальностью проблемы в работах [34; 35] построенные в статье [25] уравнения движения и определяющие соотношения, учитывающие наличие начальных напряжений, предварительного нагрева и т.д., обобщены на преднапряженные термоэлектроупругие среды.

В настоящей работе в рамках линеаризованной теории распространения связанных термоупругих волн [25] рассмотрена смешанная задача о колебании неоднородного полупространства под действием заданной на поверхности среды тепловой нагрузки, имитирующей действие модулированного по частоте лазерного луча. Исследовано влияние на границе раздела слоя и полупространства на особенности формирования волнового поля неоднородного термоупругого полупространства.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим слоистое термоупругое тело, подвергнутое действию однородного начального напряжения, обусловленного механической нагрузкой и температурным воздействием. Тело представлено слоем, жестко сцепленным с полупространством. На границе слоя с полупространством рассматривается два вида условий: идеальный тепловой контакт; теплоизоляция. Колебания $\mathbf{u}^{(n)} = \{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)}\}$ ($\{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}\}$ – компоненты вектора механических перемещений, $u_4^{(n)}$ – температура) вызваны распределенной в области $\Omega = \{|x_1| \leq 1, |x_2| \leq \infty\}$ на поверхности слоя температурой $\tau_0 e^{-i\omega t}$. Вне области нагрузки Ω поверхность тела предполагается теплоизолированной, свободной от механических напряжений. На бесконечности выполняется условие затухания. Здесь и далее ω – круговая частота колебаний, $n = 0$ обозначены параметры полупространства, $n = 1$ – параметры слоя. Колебания предполагаются установившимися

ся, происходящими по гармоническому закону, то есть все функции представляются в виде $f = f_0 e^{-i\omega t}$, далее экспоненты можно опускать.

УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ СЛОИСТОГО ПРЕДНАПРЯЖЕННОГО ТЕРМОУПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В общем случае колебания преднапряженной слоистой термоупругой среды описываются уравнениями движения и теплопроводности [25; 29; 30]:

$$\nabla \cdot \Theta^{(n)} = \rho_0^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\theta_{ij}^{(n)} = c_{ijkl}^{(n)*} u_{k,l}^{(n)} - \beta_{ij}^{(n)*} u_4^{(n)}, \quad (2)$$

$$\lambda_{ik}^{(n)} u_{4,ik}^{(n)} = \frac{\theta_1^{(n)}}{\theta_0} c_{\varepsilon}^{(n)} \rho_0^{(n)} \frac{\partial u_4^{(n)}}{\partial t} + \theta_1^{(n)} \beta_{ik}^{(n)*} \frac{\partial u_{k,i}^{(n)}}{\partial t}, \quad (3)$$

$n=0,1, i,j,k,l=1 \div 3.$

Участвующие в уравнениях (1)–(3) константы среды при однородной начальной деформации и преднагреве определяются выражениями [25]:

$$c_{ijkl}^{(n)*} = \frac{\delta_{kj}}{2} c_{ilmm}^{(n)} (v_m^{(n)2} - 1) + c_{ijkl}^{(n)} v_j^{(n)} v_k^{(n)} - \delta_{kj} (\theta_1^{(n)} - \theta_0) \beta_{il}^{(n)}, \quad (4)$$

$$\beta_{ij}^{(n)*} = v_j^{(n)} \beta_{ij}^{(n)}. \quad (5)$$

Задача рассматривается в безразмерных величинах [4; 5]:

$$x_i' = \frac{x_i \cdot \omega^*}{V_i}, \quad t' = \omega^* t, \quad V_P^{(n)} = \sqrt{c_{1111}^{(n)} / \rho_0^{(n)}},$$

$$u_i'^{(n)} = \frac{u_i^{(n)} \cdot \rho_0^{(n)} \omega^* V_P^{(n)}}{\beta_{11}^{(n)} \theta_0}, \quad i=1-3,$$

$$E^{(n)} = \frac{\theta_0 \beta_{11}^{(n)2}}{\rho_0^{(n)} c_{\varepsilon}^{(n)} c_{1111}^{(0)}}, \quad u_4'^{(n)} = \frac{u_4^{(n)}}{\theta_0}, \quad c_{ijkl}^{(n)} = \frac{c_{ijkl}^{(n)}}{c_{1111}^{(0)}}, \quad (6)$$

$$\beta_{ij}'^{(n)} = \frac{\beta_{ij}^{(n)}}{\beta_{11}^{(0)}}, \quad \lambda_{ij}'^{(n)} = \frac{\lambda_{ij}^{(n)}}{\lambda_{11}^{(0)}}, \quad \omega' = \frac{\omega}{\omega^*}, \quad \omega^* = \frac{c_{\varepsilon}^{(0)} c_{1111}^{(0)}}{\lambda_1^{(0)}}.$$

В формулах (1)–(5) $c_{ijkl}^{(n)}$, $\lambda_{ij}^{(n)}$, $\alpha_{ij}^{(n)}$,

$\beta_{kl}^{(n)} = \alpha_{ij}^{(n)} c_{ijkl}^{(n)}$ – компоненты тензоров упругих постоянных, коэффициентов удельной теплопроводности, теплового расширения, термоупругости, $\rho_0^{(n)}$ – плотность материала в естественном состоянии, $c_{\varepsilon}^{(n)}$ – удельная теплоемкость. θ_0 и $\theta_1^{(n)}$ – со-

ответственно температура тела в недеформированном состоянии и температура n -того слоя в начальном деформированном состоянии, $v_k^{(n)} = 1 + \delta_k^{(n)}$, где $\delta_k^{(n)}$ ($k=1,2,3$) – относительные удлинения волокон, $E^{(n)}$ – постоянная термоупругой связи, ω^* – нормализованная частоты полупространства, $V_P^{(n)}$ – скорость продольной волны недеформированного материала. Далее нули в индексах и штрихи опущены.

Учитывая формулы (4)–(6), уравнения движения и теплопроводности (1)–(3) слоистого преднапряженного термоупругого полупространства запишем в виде:

$$\begin{aligned} & c_{1111}^{(n)*} u_{1,11}^{(n)} + c_{2112}^{(n)*} u_{1,22}^{(n)} + c_{3113}^{(n)*} u_{1,33}^{(n)} + \\ & + \omega^2 u_1^{(n)} + c_1^{(n)} u_{2,12}^{(n)} + c_2^{(n)} u_{3,13}^{(n)} - \beta_{11}^{(n)*} u_{4,1}^{(n)} = 0, \\ & c_1^{(n)} u_{1,12}^{(n)} + c_{1221}^{(n)*} u_{2,11}^{(n)} + c_{2222}^{(n)*} u_{2,22}^{(n)} + \\ & + \omega^2 u_2^{(n)} + c_{3223}^{(n)*} u_{2,33}^{(n)} + c_3^{(n)} u_{3,23}^{(n)} - \beta_{22}^{(n)*} u_{4,2}^{(n)} = 0, \\ & c_2^{(n)} u_{1,13}^{(n)} + c_3^{(n)} u_{2,23}^{(n)} + c_{1331}^{(n)*} u_{3,11}^{(n)} + c_{2332}^{(n)*} u_{3,22}^{(n)} + \\ & + \omega^2 u_3^{(n)} + c_{3333}^{(n)*} u_{3,33}^{(n)} - \beta_{33}^{(n)*} u_{4,3}^{(n)} = 0, \\ & u_{4,11}^{(n)} + \lambda_{22}^{(n)} u_{4,22}^{(n)} + \lambda_{33}^{(n)} u_{4,33}^{(n)} + i\omega \theta_1^{(n)} u_4^{(n)} + \\ & + i\omega \theta_1^{(n)} E (\beta_{11}^{(n)*} u_{1,1}^{(n)} + \beta_{22}^{(n)*} u_{2,2}^{(n)} + \beta_{33}^{(n)*} u_{3,3}^{(n)}) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим частный случай, когда колебания в теле индуцируются распределенной на поверхности слоя температурой $\mathbf{u}_0^* = \{0, 0, 0, \tau_0\}$. Для удобства введем расширенный вектор напряжения $\mathbf{q}^{(n)\tau} = \{\theta_{31}^{(n)}, \theta_{32}^{(n)}, \theta_{33}^{(n)}, -\lambda_{33}^{(n)} u_{4,3}^{(n)}\}$ термоупругой среды. С учетом введенных обозначений линеаризованные граничные условия примут вид:

$$x_3 = 0:$$

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}_0(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega \\ \mathbf{q}^{(1)\tau} = 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega \end{cases} \quad (8)$$

$$x_3 = -h:$$

$$\begin{cases} \theta_{31}^{(1)} = \theta_{31}^{(0)}, \theta_{32}^{(1)} = \theta_{32}^{(0)}, \theta_{33}^{(1)} = \theta_{33}^{(0)} \\ u_1^{(1)} = u_1^{(0)}, u_2^{(1)} = u_2^{(0)}, u_3^{(1)} = u_3^{(0)} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} -\lambda_{33}^{(1)} u_{4,3}^{(1)} = -\lambda_{33}^{(0)} u_{4,3}^{(0)} \\ u_4^{(1)} = u_4^{(0)} \end{cases} \quad \text{(I)} \quad (10)$$

$$\begin{cases} -\lambda_{33}^{(0)} u_{4,3}^{(0)} = 0 \\ -\lambda_{33}^{(1)} u_{4,3}^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \text{(II)} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & x_3 \rightarrow -\infty: \\ & \mathbf{u}^{(0)\tau} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В формулах (10)–(11) приведены обозначения для тепловых условий на границе раздела сред: (I) – идеальный тепловой контакт, (II) – теплоизоляция.

Для построения решения краевой задачи (7)–(12) введем вспомогательную краевую задачу. С этой целью полагаем, что колебания в среде индуцируются распределенной на поверхности слоя вертикальной компонентой теплового потока $\mathbf{q}_0 = \{0 \ 0 \ 0 \ q_{40}\}$. Тогда линеаризованные граничные условия записываются следующим образом:

$$\mathbf{q}^{(1)\tau} = \begin{cases} \mathbf{q}_0^\tau(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} x_3 = -h: \\ \begin{cases} \theta_{31}^{(1)} = \theta_{31}^{(0)}, \theta_{32}^{(1)} = \theta_{32}^{(0)}, \theta_{33}^{(1)} = \theta_{33}^{(0)} \\ u_1^{(1)} = u_1^{(0)}, u_2^{(1)} = u_2^{(0)}, u_3^{(1)} = u_3^{(0)} \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{cases} -\lambda_{33}^{(1)} u_{4,3}^{(1)} = -\lambda_{33}^{(0)} u_{4,3}^{(0)} \\ u_4^{(1)} = u_4^{(0)} \end{cases} \quad \text{(I)} \quad (15)$$

$$\begin{cases} -\lambda_{33}^{(0)} u_{4,3}^{(0)} = 0 \\ -\lambda_{33}^{(1)} u_{4,3}^{(1)} = 0 \end{cases} \quad \text{(II)} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} x_3 \rightarrow -\infty: \\ \mathbf{u}^{(0)\tau} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (17)$$

ФУНКЦИЯ ГРИНА ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим частный случай задачи: колебания будем считать плоскими, то есть $u_2 \equiv 0$, и все остальные параметры задачи будут удовлетворять условиям:

$$f = f(x_1, x_3), \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f \equiv 0. \quad (18)$$

После применения преобразования Фурье по координате x_1 с учетом выражений (6) и условия (18) система уравнений движения и теплопроводности (7) и граничные условия (13)–(17) перепишем в виде [30; 31]:

$$\begin{aligned} & -\alpha^2 c_{1111}^{(n)*} U_1^{(n)} + c_{3113}^{(n)*} U_1^{(n)} + \omega^2 U_1^{(n)} - \\ & - i\alpha c_2^{(n)} U_3^{(n)} + i\alpha \beta_{11}^{(n)*} U_4^{(n)} = 0, \\ & -i\alpha c_2^{(n)} U_1^{(n)} - \alpha^2 c_{1331}^{(n)*} U_3^{(n)} + \omega^2 U_3^{(n)} + \\ & + c_{3333}^{(n)*} U_3^{(n)} - \beta_{33}^{(n)*} U_4^{(n)} = 0, \\ & -\alpha^2 U_4^{(n)} + \lambda_{33}^{(n)} U_4^{(n)} + i\omega \theta_1^{(n)} U_4^{(n)} + \\ & + i\omega E^{(n)*} (-i\alpha \beta_{11}^{(n)*} U_1^{(n)} + \beta_{33}^{(n)*} U_3^{(n)}) = 0, \quad n = 1, 2 \end{aligned} \quad (19)$$

$$x_3 = 0: \quad \begin{cases} c_{3113}^{(1)*} U_1^{(1)} - i\alpha c_{1313}^{(1)*} U_3^{(1)} = 0, \\ c_{3333}^{(1)*} U_3^{(1)} - i\alpha c_{1133}^{(1)*} U_1^{(1)} - \beta_3^{(1)*} U_4^{(1)} = 0, \\ -\lambda_3^{(1)*} U_4^{(1)} = Q_4, \end{cases} \quad (20)$$

$$x_3 = -h: \quad \begin{cases} U_1^{(1)} = U_1^{(0)}, \\ U_3^{(1)} = U_3^{(0)}, \\ c_{3113}^{(1)*} U_1^{(1)} - i\alpha c_{1313}^{(1)*} U_3^{(1)} - \\ - c_{3113}^{(0)*} U_1^{(0)} + i\alpha c_{1313}^{(0)*} U_3^{(0)} = 0, \\ c_{3333}^{(1)*} U_3^{(1)} - i\alpha c_{1133}^{(1)*} U_1^{(1)} - \beta_3^{(1)*} U_4^{(1)} - \\ - c_{3333}^{(0)*} U_3^{(0)} + i\alpha c_{1133}^{(0)*} U_1^{(0)} + \beta_3^{(0)*} U_4^{(0)} = 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} U_4^{(1)} = U_4^{(0)}, \\ -\lambda_3^{(1)} U_4^{(1)} + \lambda_3^{(0)} U_4^{(0)} = 0, \end{cases} \quad \text{(I)} \quad (22)$$

$$\begin{cases} -\lambda_{33}^{(1)} U_4^{(1)} = 0, \\ -\lambda_{33}^{(0)} U_4^{(0)} = 0. \end{cases} \quad \text{(II)} \quad (23)$$

Здесь использованы обозначения: $f' = df / dx_3$, $f'' = d^2 f / dx_3^2$.

Решение вспомогательной краевой задачи (19)–(23) будем искать в виде [30; 31]:

$$\begin{aligned} U_1^{(1)}(\alpha, x_3, \omega) = & -i\alpha \sum_{k=1}^3 f_{1k}^{(1)} (C_k s h \sigma_k^{(1)} x_3 + \\ & + C_{k+3} c h \sigma_k^{(1)} x_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_3^{(1)}(\alpha, x_3, \omega) = & \sum_{k=1}^3 f_{3k}^{(1)} (C_k c h \sigma_k^{(1)} x_3 + \\ & + C_{k+3} s h \sigma_k^{(1)} x_3), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} U_4^{(1)}(\alpha, x_3, \omega) = & \sum_{k=1}^3 f_{4k}^{(1)} (C_k s h \sigma_k^{(1)} x_3 + \\ & C_{k+3} c h \sigma_k^{(1)} x_3), \\ & -h \leq x_3 \leq 0; \end{aligned}$$

$$U_1^{(0)}(\alpha, x_3, \omega) = -i\alpha \sum_{k=1}^3 f_{1k}^{(0)} D_k e^{\sigma_k^{(0)} x_3},$$

$$U_3^{(0)}(\alpha, x_3, \omega) = \sum_{k=1}^3 f_{3k}^{(0)} D_k e^{\sigma_k^{(0)} x_3}, \quad (25)$$

$$U_4^{(0)}(\alpha, x_3, \omega) = \sum_{k=1}^3 f_{4k}^{(0)} D_k e^{\sigma_k^{(0)} x_3}, \quad x_3 \leq -h.$$

В (24)–(25) σ_k находятся численно для каждого значения α и ω из характеристического уравнения, приведенного в работе [36]. Для отыскания неизвестных коэффициентов C_k , D_k подставим представление решения (24)–(25) в граничные условия

(20)–(23) и получим систему линейных алгебраических уравнений, которую можно записать в матричном виде:

$$\mathbf{L}\mathbf{C} = \mathbf{Q}^T, \quad (26)$$

где $\mathbf{Q} = \{0 \ 0 \ Q_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\}$, Q_4 – образ Фурье q_{40} . Дисперсионное уравнение задачи: $\det \mathbf{L} = 0$.

$$\mathbf{L} = (\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3), \quad (27)$$

$$\mathbf{L}_1 = \begin{pmatrix} l_{11}^{(1)} & l_{13}^{(1)} & l_{14}^{(1)} \\ 0 & 0 & l_{14}^{(1)} \\ l_{41}^{(1)} & l_{43}^{(1)} & l_{44}^{(1)} \\ u_1^{(1)} s_1^{(1)} & u_1^{(1)} s_3^{(1)} & u_1^{(1)} s_4^{(1)} \\ u_3^{(1)} c_1^{(1)} & u_3^{(1)} c_3^{(1)} & u_3^{(1)} c_4^{(1)} \\ u_4^{(1)} s_1^{(1)} & u_4^{(1)} s_3^{(1)} & u_4^{(1)} s_4^{(1)} \\ l_{11}^{(1)} c_1^{(1)} & l_{13}^{(1)} c_3^{(1)} & l_{14}^{(1)} c_4^{(1)} \\ l_{31}^{(1)} s_1^{(1)} & l_{33}^{(1)} s_3^{(1)} & l_{34}^{(1)} s_4^{(1)} \\ l_{41}^{(1)} c_1^{(1)} & l_{43}^{(1)} c_3^{(1)} & l_{44}^{(1)} c_4^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ l_{31}^{(1)} & l_{33}^{(1)} & l_{34}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ u_1^{(1)} c_1^{(1)} & u_1^{(1)} c_3^{(1)} & u_1^{(1)} c_4^{(1)} \\ u_3^{(1)} s_1^{(1)} & u_3^{(1)} s_3^{(1)} & u_3^{(1)} s_4^{(1)} \\ u_4^{(1)} c_1^{(1)} & u_4^{(1)} c_3^{(1)} & u_4^{(1)} c_4^{(1)} \\ l_{11}^{(1)} s_1^{(1)} & l_{13}^{(1)} s_3^{(1)} & l_{14}^{(1)} s_4^{(1)} \\ l_{31}^{(1)} c_1^{(1)} & l_{33}^{(1)} c_3^{(1)} & l_{34}^{(1)} c_4^{(1)} \\ l_{41}^{(1)} s_1^{(1)} & l_{43}^{(1)} s_3^{(1)} & l_{44}^{(1)} s_4^{(1)} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -u_1^{(0)} e_1^{(0)} & -u_1^{(0)} e_3^{(0)} & -u_1^{(0)} e_4^{(0)} \\ -u_3^{(0)} e_1^{(0)} & -u_3^{(0)} e_3^{(0)} & -u_3^{(0)} e_4^{(0)} \\ -u_4^{(0)} e_1^{(0)} & -u_4^{(0)} e_3^{(0)} & -u_4^{(0)} e_4^{(0)} \\ -l_{11}^{(0)} e_1^{(0)} & -l_{13}^{(0)} e_3^{(0)} & -l_{14}^{(0)} e_4^{(0)} \\ -l_{31}^{(0)} e_1^{(0)} & -l_{33}^{(0)} e_3^{(0)} & -l_{34}^{(0)} e_4^{(0)} \\ -l_{41}^{(0)} e_1^{(0)} & -l_{43}^{(0)} e_3^{(0)} & -l_{44}^{(0)} e_4^{(0)} \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} l_{1k}^{(n)} &= -i\alpha(c_{3113}^{*(n)}\sigma_k^{(n)}f_{1k}^{(n)} + c_{1313}^{*(n)}f_{3k}^{(n)}), \\ l_{3k}^{(n)} &= -\alpha^2 c_{1133}^{*(n)}f_{1k}^{(n)} + \sigma_k^{(n)}c_{3333}^{*(n)}f_{3k}^{(n)} - \beta_3^{*(n)}f_{4k}^{(n)}, \\ l_{4k}^{(n)} &= \sigma_k^{(n)}f_{4k}^{(n)}, u_p^{(n)}s_k^{(n)} = f_{pk}^{(n)}sh(-h\sigma_k^{(n)}), \\ u_p^{(n)}c_k^{(n)} &= f_{pk}^{(n)}ch(-h\sigma_k^{(n)}), \\ u_p^{(n)}e_k^{(n)} &= f_{pk}^{(n)}e^{(-h\sigma_k^{(n)})}, c_k^{(1)} = ch(-h\sigma_k^{(1)}), \\ s_k^{(1)} &= sh(-h\sigma_k^{(1)}), e_k^{(0)} = e^{(-h\sigma_k^{(0)})}. \end{aligned} \quad (28)$$

Найдя C_k, D_k из уравнений (26), получим решение вспомогательной краевой задачи. Применив к выражениям (24)–(25) обратное преобразование Фурье, запишем решение в виде:

$$u_i^{(n)\tau}(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k_{i4}^{(n)}(x_1 - \xi, x_3, \omega) q_{40}(\xi) d\xi, \quad i = 1, 3, 4, \quad (29)$$

$$k_{i4}^{(n)}(s, x_3, \omega) = \int_{\Gamma} K_{i4}^{(n)}(\alpha, x_3, \omega) e^{-i\alpha s} d\alpha, \quad (30)$$

где $K_{i4}^{(n)}(\alpha, x_3, \omega)$ – элементы матрицы функции Грина, которые вычисляются по следующим формулам:

$$K_{14}^{(1)}(\alpha, x_3) = -i\alpha \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^3 f_{1k}^{(1)} (\Delta_{3k} sh\sigma_k^{(1)} x_3 + \Delta_{3k+3} ch\sigma_k^{(1)} x_3),$$

$$K_{34}^{(1)}(\alpha, x_3) = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^3 f_{3k}^{(1)} \sum_{k=1}^3 f_{3k}^{(1)} (\Delta_{3k} ch\sigma_k^{(1)} x_3 + \Delta_{3k+3} sh\sigma_k^{(1)} x_3), \quad (31)$$

$$K_{44}^{(1)}(\alpha, x_3) = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^3 f_{4k}^{(1)} \sum_{k=1}^3 f_{4k}^{(1)} (\Delta_{3k} sh\sigma_k^{(1)} x_3 + \Delta_{3k+3} ch\sigma_k^{(1)} x_3),$$

$$K_{14}^{(0)}(\alpha, x_3) = -i\alpha \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^3 f_{1k}^{(0)} \Delta_{3k+6} e^{\sigma_k^{(0)} x_3},$$

$$K_{34}^{(0)}(\alpha, x_3) = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^3 f_{3k}^{(0)} \Delta_{3k+6} e^{\sigma_k^{(0)} x_3}, \quad (32)$$

$$K_{44}^{(0)}(\alpha, x_3) = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{k=1}^3 f_{4k}^{(0)} \Delta_{3k+6} e^{\sigma_k^{(0)} x_3}.$$

Представление (29) определяет смещение произвольной точки термоупругого полупространства под действием заданной в области Ω нагрузки $q_{40}(x_1)$. Для решения исходных задач (7)–(12) в формуле (29) необходимо положить $x_3 = 0$ и учесть условие (8) воздействия температуры $\tau_0(x_1)$. В результате получим интегральное уравнение:

$$\tau_0(x_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 k_{44}^{(n)}(x_1 - \xi, 0, \omega) q_{40}(\xi) d\xi, \quad (33)$$

$$k_{44}^{(1)}(s, 0, \omega) = \int_{\Gamma} K_{44}^{(1)}(\alpha, 0, \omega) e^{-i\alpha s} d\alpha. \quad (34)$$

Решение интегрального уравнения (33) $q_{40}(x_1)$ строится методом граничных элементов. С этой

целью функция $q_{40}(x_1)$ ищется в виде

$$q_{40}(x_1) = \sum_{k=1}^{2M} C_k \Phi_k(x_1), \quad (35)$$

где $\Phi_k(x_1) = \begin{cases} 1, & x_1 \in [a_{k-1}, a_k] \\ 0, & x_1 \notin [a_{k-1}, a_k] \end{cases}, k = 1, 2M$ – система координатных функций.

Тогда решение исходных краевых задач строим путем подстановки решения интегрального уравнения (35) в выражение (29).

Рис. 1. Нормированные полюса функции Грина слоистой среды: *a* – в естественном состоянии; *б* – с растяжением $\nu = 1,01$; *в* – с преднагревом $d\theta = 0,1$.

Fig. 1. The normalized poles of the layered medium Green's function: *a* – natural state; *б* – with stretching $\nu = 1.01$; *в* – with preheating $d\theta = 0.1$.

ВЛИЯНИЕ УСЛОВИЙ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

Рассмотрим задачи о колебаниях слоя из стали, жестко сцепленного с полупространством из оксида магния, при условии, что в области $[-1, 1]$ на поверхности распределение температуры среды определяется формулой $u_{40} = \text{const} = 1$. Задачи отличаются тепловыми условиями (I) и (II) на границе раздела сред $x_3 = -h$.

Для численных исследований выбраны материалы, описанные в работе [29]. Ниже приведены их физические характеристики:

$$\begin{aligned} c_{1111}^{(1)} &= 27,52 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ c_{1133}^{(1)} &= 11,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ c_{3333}^{(1)} &= 27,52 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ c_{1331}^{(1)} &= c_{3113}^{(1)} = 8,21 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ \beta_{11}^{(1)} &= \beta_{33}^{(1)} = 4,6 \cdot 10^6 \text{ Н/К/м}^2, \\ c_\epsilon^{(1)} &= 462 \text{ Дж/кг/К}, \\ \lambda_{11}^{(1)} &= \lambda_{33}^{(1)} = 47,0 \text{ Вт/м/К}, \\ \rho^{(1)} &= 7823 \text{ кг/м}^3, \theta_0 = 280 \text{ К}, \\ c_{1111}^{(0)} &= 30,0 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ c_{1133}^{(0)} &= 10,1 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ c_{3333}^{(0)} &= 30,0 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ c_{1331}^{(0)} &= c_{3113}^{(0)} = 15,75 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2, \\ \beta_{11}^{(0)} &= \beta_{33}^{(0)} = 4,4 \cdot 10^6 \text{ Н/К/м}^2, \\ c_\epsilon^{(0)} &= 875 \text{ Дж/кг/К}, \\ \lambda_{11}^{(0)} &= \lambda_{33}^{(0)} = 58,0 \text{ Вт/м/К}, \\ \rho^{(0)} &= 3576 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Особенностью задач для термоупругих тел является наличие у элементов функции **K** (31)–(32) счетного множества комплексных нулей и полюсов, часть из которых обладает малой мнимой частью [27]. Анализ показал, что наряду с комплексными полюсами с малой мнимой частью функция **K** имеет множество существенно комплексных полюсов с большой мнимой частью [27]. Для построения решения и эффективного исследования динамического процесса необходимо детальное исследование поведения полюсов в зависимости от начальных напряжений и предварительного нагрева.

Рис. 2. Влияние граничных условий на границе сред на вертикальную компоненту смещения поверхности слоя: *a* – идеальный тепловой контакт (I); *б* – теплоизоляция (II). Сплошной линией обозначена вещественная часть, пунктиром – мнимая, пунктиром с точкой – модуль.

Fig. 2. The influence of boundary conditions between layer and half-space on the layer displacement vertical component: *a* – ideal thermal contact (I); *б* – thermal insulation (II). The solid line is for the real part, the dashed line is the imaginary part, the dashed line with dot is the module.

На рисунке 1 представлены рассчитанные в ограниченном частотном диапазоне полюса с малой мнимой составляющей элементов функции Грина $K_{i4}^{(n)}(\alpha, x_3, \omega)$ слоистого термоупругого полупространства в отсутствие начальных деформаций и нагрева (рис. 1*a*), с учетом начального гидростатического растяжения тела $\nu = 1,01$ (рис. 1*б*), преднагрева тела $d\theta = (\theta_1^{(1)} - \theta_0)/\theta_0 = (\theta_1^{(0)} - \theta_0)/\theta_0 = 0,1$ (рис. 1*в*). Полюса на графиках отнесены к значениям полюсов сдвиговой волны α_s , возникающей в однородном полупространстве, находящемся в естественном состоянии.

Анализ показал, что для задач с условиями (I) и (II) дисперсионные кривые с малыми мнимыми составляющими имеют одинаковое распределение. На рисунке 1 видно, что предварительный нагрев способствует значительному уменьшению фазо-

вых скоростей поверхностных волн, в то время как предварительное растяжение приводит к незначительному увеличению фазовых скоростей.

На рисунке 2 приведены эпюры распределения вертикальной компоненты смещения поверхности слоя $u_3^{(1)}(x_1)$ в естественном состоянии с граничными условиями (I) (рис. 2*a*) и (II) (рис. 2*б*). Здесь сплошной линией обозначена вещественная часть, пунктиром – мнимая, пунктиром с точкой – модуль.

Из графиков, представленных на рисунке 2, следует, что тепловые условия на границе раздела сред на распределение поверхностного вертикального смещения влияют незначительно.

На рисунках 3 и 4 приведены кривые распределения разности смещений среды $du_3 = u_{3\tau}^{(1)} - u_3^{(1)}$ на поверхности слоя для задач с граничными усло-

Рис. 3. Влияние преднагрева на вещественную часть вертикальной компоненты смещения с граничными условиями: *a* – тепловой контакт; *б* – теплоизоляция.

Fig. 3. The effect of preheating on the real part of the vertical displacement component with the boundary conditions: *a* – ideal thermal contact (I); *б* – thermal insulation (II).

Рис. 4. Влияние преднагрева на мнимую часть вертикальной компоненты смещения с граничными условиями: *a* – тепловой контакт; *б* – теплоизоляция.

Fig. 4. The effect of preheating on the imaginary part of the vertical displacement component with the boundary conditions: *a* – ideal thermal contact (I); *б* – thermal insulation (II).

виями (I) (идеальный тепловой контакт) и (II) (теплоизоляция). $u_{3\tau}^{(1)}$ – вертикальная компонента смещения слоя при учете предварительного нагрева $d\theta = \theta_1 - \theta_0$.

На графиках рисунков 3 и 4 видно, что в условиях идеального теплового контакта на границе раздела сред влияние предварительного нагрева на распределение вертикальной компоненты смещения среды значительно превышает его влияние при

теплоизоляции. Это означает, что условием теплоизоляции между слоем и полупространством можно компенсировать эффект влияния преднагрева на формирование волнового поля в слоистом термоупругом теле.

Работа выполнена в рамках реализации госзадания Южного научного центра РАН, проект 0256-2018-0003, № государственной регистрации 01201354242.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муратиков К.Л. 1998. К теории генерации механических колебаний лазерным излучением в твердых телах с внутренними напряжениями термоупругим методом. *Письма в журнал технической физики*. 24(13): 82–88.
2. Achenbach J.D. 2003. Laser excitation of surface wave motion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 51(11–12): 1885–1902. doi: 10.1016/j.jmps.2003.09.021
3. Xu B., Feng J., Xu G., Wang J., Sun H., Cao G. 2008. Laser-generated thermoelastic acoustic sources and Lamb waves in anisotropic plates. *Applied Physics A: Materials Science & Processing*. 91(1): 173–179. doi: 10.1007/s00339-007-4354-5
4. Singh H., Sharma J.N. 1985. Generalized thermoelastic waves in transversely isotropic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 77(3): 1046–1053. doi: 10.1121/1.392391
5. Sharma J.N., Sidhu R.S. 1986. On the propagation of plane harmonic waves in anisotropic generalized thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 24(9): 1511–1516. doi: 10.1016/0020-7225(86)90160-6
6. El-Maghraby N.M. 2008. A two-dimensional generalized thermoelasticity problem for a half-space under the action of a body force. *Journal of Thermal Stresses*. 31(6): 557–568. doi: 10.1080/01495730801978281
7. Kumar R., Gupta V. 2013. Reflection and transmission of plane waves at the interface of an elastic half-space and a fractional order thermoelastic half-space. *Archive of Applied Mechanics*. 83(8): 1109–1128. doi: 10.1007/s00419-013-0737-6
8. Verma K.L. 2002. On the propagation of waves in layered anisotropic media in generalized thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 40(18): 2077–2096. doi: 10.1016/S0020-7225(02)00030-7
9. Chiriță S. 2013. On the Rayleigh surface waves on an anisotropic homogeneous thermoelastic half space. *Acta Mechanica*. 224(3): 657–674. doi: 10.1007/s00707-012-0776-z
10. Abouelregal A.E. 2011. Rayleigh waves in a thermoelastic solid half space using dual-phase-lag model. *International Journal of Engineering Science*. 49(8): 781–791. doi: 10.1016/j.ijengsci.2011.03.007
11. Verma K.L., Hasebe N. 2004. On the flexural and extensional thermoelastic waves in orthotropic plates with two thermal relaxation times. *Journal of Applied Mathematics*. 2004(1): 69–83. doi: 10.1155/S1110757X04308041
12. Al-Qahtani H., Datta S.K. 2004. Thermoelastic waves in an anisotropic infinite plate. *Journal of Applied Physics*. 96(7): 3645–3657. doi: 10.1063/1.1776323
13. Kumar R., Kansal T. 2008. Propagation of Lamb waves in transversely isotropic thermoelastic diffusive plate. *International Journal of Solids and Structures*. 45(22–23): 5890–5913. doi: 10.1016/S0020768308002710
14. Sharma J.N. 2001. Three-dimensional vibration analysis of a homogeneous transversely isotropic thermoelastic cylindrical panel. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 110(1): 254–259. doi: 10.1121/1.1378350
15. Elhagary M. 2013. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically

- varying heating. *Acta Mechanica*. 224(12): 3057–3069. doi: 10.1007/s00707-013-0902-6
16. Ivanov Ts.P., Savova R. 2005. Viscoelastic surface waves of an assigned wavelength. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 24(2): 305–310. doi: 10.1016/j.euromechsol.2004.11.002
 17. Savova R., Ivanov Ts.P. 2007. On viscous effects in surface wave propagation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 37: 25–34.
 18. Ivanov Ts.P., Savova R. 2009. Thermoviscoelastic surface waves of an assigned frequency. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 74(2): 250–263. doi: 10.1093/imamat/hxn028
 19. Ivanov Ts.P., Savova R. 2010. Thermoviscoelastic surface waves of an assigned wavelength. *International Journal of Solids and Structures*. 47(14–15): 1972–1978. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2010.04.001
 20. Flavin J.N., Green A.E. 1961. Plane thermo-elastic waves in an initially stressed medium. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 9(3): 179–190.
 21. Tiersten H.F. 1971. On the nonlinear equations of thermo-electroelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 9: 587–604. doi: 10.1016/0020-7225(71)90062-0
 22. Ames K., Straughan B. 1992. Continuous dependence results for initially prestressed thermoelastic bodies. *International Journal of Engineering Science*. 30(1): 7–13. doi: 10.1016/0020-7225(92)90116-X
 23. Волокитин Г.И. 1993. Волны Рэлея в нелинейной начально деформированной среде. *Известия Северо-Кавказского научного центра высшей школы. Естественные науки*. 1–2: 19–25.
 24. Singh B. 2010. Wave propagation in an initially stressed transversely isotropic thermoelastic solid half-space. *Applied Mathematics and Computation*. 217: 705–715. doi: 10.1016/j.amc.2010.06.008
 25. Шейдаков Д.Н., Белянкова Т.И., Шейдаков Н.Е., Калинин В.В. 2008. Уравнения динамики преднапряженной термоупругой среды. *Вестник Южного научного центра*. 4(3): 9–15.
 26. Лурье А.И. 1980. *Нелинейная теория упругости*. М., Наука: 512 с.
 27. Калинин В.В., Суворова Г.Ю., Белянкова Т.И. 2012. Функция Грина термоупругого предварительно напряженного слоя. *Вестник Южного научного центра*. 8(3): 14–21.
 28. Суворова Г.Ю., Анджинович И.Е., Калинин В.В. 2010. Температурные эффекты в динамике преднапряженной термоупругой среды. *Вестник Южного научного центра*. 6(4): 18–23.
 29. Белянкова Т.И., Ворович Е.И., Калинин В.В., Пузанов Ю.Е. 1999. Динамическая контактная задача для термоупругого слоя. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. 4: 109–110.
 30. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Suvorova G.Yu. 2012. A dynamic contact problem for a thermoelastic prestressed layer. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 76(5): 537–546. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.013
 31. Калинин В.В., Леви Г.Ю. 2014. Одна динамическая контактная задача для преднапряженного термоупругого полупространства. *Вестник Южного научного центра*. 10(2): 3–8.
 32. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2016. Функция Грина для предварительно напряженного термоупругого полупространства с неоднородным покрытием. *Прикладная математика и техническая физика*. 57(5): 76–89. doi: 10.15372/PMTF20160509
 33. Sharma J.N., Pal M., Chand D. 2005. Propagation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials. *Journal of Sound and Vibration*. 284(1–2): 227–248. doi: 10.1016/j.jsv.2004.06.036
 34. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2014. Функция Грина преднапряженного термоэлектроупругого функционально-градиентного слоя. *Вестник Южного научного центра*. 10(4): 5–15.
 35. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2017. К моделированию преднапряженного термоэлектроупругого полупространства с покрытием. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 1: 117–135.
 36. Levi G.Yu., Igumnov L.A. 2015. Some properties of the thermoelastic prestressed medium Green function. *Materials Physics and Mechanics*. 23(1): 42–46.

REFERENCES

1. Muratkov K.L. 1998. [On the theory of oscillations generation by laser radiation in solids with internal stresses by the thermoelastic method]. *Pisma v zhurnal tekhnicheskoy fiziki*. 24(13): 82–88. (In Russian).
2. Achenbach J.D. 2003. Laser excitation of surface wave motion. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 51(11–12): 1885–1902. doi: 10.1016/j.jmps.2003.09.021
3. Xu B., Feng J., Xu G., Wang J., Sun H., Cao G. 2008. Laser-generated thermoelastic acoustic sources and Lamb waves in anisotropic plates. *Applied Physics A: Materials Science & Processing*. 91(1): 173–179. doi: 10.1007/s00339-007-4354-5
4. Singh H., Sharma J.N. 1985. Generalized thermoelastic waves in transversely isotropic media. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 77(3): 1046–1053. doi: 10.1121/1.392391
5. Sharma J.N., Sidhu R.S. 1986. On the propagation of plane harmonic waves in anisotropic generalized thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 24(9): 1511–1516. doi: 10.1016/0020-7225(86)90160-6
6. El-Maghraby N.M. 2008. A two-dimensional generalized thermoelasticity problem for a half-space under the action of a body force. *Journal of Thermal Stresses*. 31(6): 557–568. doi: 10.1080/01495730801978281
7. Kumar R., Gupta V. 2013. Reflection and transmission of plane waves at the interface of an elastic half-space and a fractional order thermoelastic half-space. *Archive of Applied Mechanics*. 83(8): 1109–1128. doi: 10.1007/s00419-013-0737-6
8. Verma K.L. 2002. On the propagation of waves in layered anisotropic media in generalized thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 40(18): 2077–2096. doi: 10.1016/S0020-7225(02)00030-7
9. Chiriță S. 2013. On the Rayleigh surface waves on an anisotropic homogeneous thermoelastic half space. *Acta Mechanica*. 224(3): 657–674. doi: 10.1007/s00707-012-0776-z.
10. Abouelregal A.E. 2011. Rayleigh waves in a thermoelastic solid half space using dual-phase-lag model. *International Journal*

- of Engineering Science. 49(8): 781–791. doi: 10.1016/j.ijengsci.2011.03.007
11. Verma K.L., Hasebe N. 2004. On the flexural and extensional thermoelastic waves in orthotropic plates with two thermal relaxation times. *Journal of Applied Mathematics*. 2004(1): 69–83. doi: 10.1155/S1110757X04308041
 12. Al-Qahtani H., Datta S.K. 2004. Thermoelastic waves in an anisotropic infinite plate. *Journal of Applied Physics*. 96(7): 3645–3657. doi: 10.1063/1.1776323
 13. Kumar R., Kansal T. 2008. Propagation of Lamb waves in transversely isotropic thermoelastic diffusive plate. *International Journal of Solids and Structures*. 45(22–23): 5890–5913. doi: 10.1016/S0020768308002710
 14. Sharma J.N. 2001. Three-dimensional vibration analysis of a homogeneous transversely isotropic thermoelastic cylindrical panel. *The Journal of the Acoustical Society of America*. 110(1): 254–259. doi: 10.1121/1.1378350
 15. Elhagary M. 2013. A two-dimensional generalized thermoelastic diffusion problem for a half-space subjected to harmonically varying heating. *Acta Mechanica*. 224(12): 3057–3069. doi: 10.1007/s00707-013-0902-6
 16. Ivanov Ts.P., Savova R. 2005. Viscoelastic surface waves of an assigned wavelength. *European Journal of Mechanics A/Solids*. 24(2): 305–310. doi: 10.1016/j.euromechsol.2004.11.002
 17. Savova R., Ivanov Ts.P. 2007. On viscous effects in surface wave propagation. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 37: 25–34.
 18. Ivanov Ts.P., Savova R. 2009. Thermoviscoelastic surface waves of an assigned frequency. *IMA Journal of Applied Mathematics*. 74(2): 250–263. doi: 10.1093/imamat/hxn028
 19. Ivanov Ts.P., Savova R. 2010. Thermoviscoelastic surface waves of an assigned wavelength. *International Journal of Solids and Structures*. 47(14–15): 1972–1978. doi: 10.1016/j.ijsolstr.2010.04.001
 20. Flavin J.N., Green A.E. 1961. Plane thermo-elastic waves in an initially stressed medium. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 9(3): 179–190.
 21. Tiersten H.F. 1971. On the nonlinear equations of thermo-electroelasticity. *International Journal of Engineering Science*. 9: 587–604. doi: 10.1016/0020-7225(71)90062-0
 22. Ames K., Straughan B. 1992. Continuous dependence results for initially prestressed thermoelastic bodies. *International Journal of Engineering Science*. 30(1): 7–13. doi: 10.1016/0020-7225(92)90116-X
 23. Volokitin G.I. 1993. [Rayleigh waves in a nonlinear initially deformed medium]. *Izvestiya Severo-Kavkazskogo nauchnogo tsentra vysshey shkoly. Estestvennye nauki*. 1–2: 19–25. (In Russian).
 24. Singh B. 2010. Wave propagation in an initially stressed transversely isotropic thermoelastic solid half-space. *Applied Mathematics and Computation* 217: 705–715. doi: 10.1016/j.amc.2010.06.008
 25. Sheidakov D.N., Belyankova T.I., Sheidakov N.E., Kalinchuk V.V. 2008. [Dynamics equations for prestressed thermo-elastic medium]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 4(3): 9–15. (In Russian).
 26. Lurie A.I. 1980. *Nelineynaya teoriya uprugosti. [Nonlinear theory of elasticity]*. Moscow, Nauka: 512 p. (In Russian).
 27. Kalinchuk V.V., Suvorova G.Yu., Belyankova T.I. 2012. [The Green function of prestressed thermoelastic layer]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 8(3): 14–21. (In Russian).
 28. Suvorova G.Yu., Andjiovich I.E., Kalinchuk V.V. 2010. [Temperature effects in the dynamics of prestressed thermoelastic medium]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 6(4): 18–23. (In Russian).
 29. Belyankova T.I., Vorovich E.I., Kalinchuk V.V., Puzanov Yu.E. 1999. [Dynamic contact problem for thermo-elastic layer]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki*. 4: 109–110. (In Russian).
 30. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Suvorova G.Yu. 2012. A dynamic contact problem for a thermoelastic prestressed layer. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 76(5): 537–546. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2012.11.013
 31. Kalinchuk V.V., Levi G.Yu. 2014. [The dynamic contact problem for prestressed thermoelastic half-space]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 10(2): 3–8. (In Russian).
 32. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2016. Green's function for a prestressed thermoelastic half-space with an inhomogeneous coating. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 57(5): 828–840. doi: 10.1134/S0021894416050096
 33. Sharma J.N., Pal M., Chand D. 2005. Propagation characteristics of Rayleigh waves in transversely isotropic piezothermoelastic materials. *Journal of Sound and Vibration*. 284(1–2): 227–248. doi: 10.1016/j.jsv.2004.06.036
 34. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2014. [Green's function of a prestressed thermoelectroelastic functionally graded layer]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 10(4): 5–15. (In Russian).
 35. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2017. On the modeling of a prestressed thermoelectroelastic half-space with a coating. *Mechanics of Solids*. 52(1): 95–110. doi: 10.3103/S0025654417010113
 36. Levi G.Yu., Igumnov L.A. 2015. Some properties of the thermoelastic prestressed medium Green function. *Materials Physics and Mechanics*. 23(1): 42–46.

Поступила 22.11.2017