УДК 539.3

DOI: 10.23885/2500-0640-2017-13-3-10-17

ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ СЛОИСТОЙ ПРЕДНАПРЯЖЕННОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОЙ СРЕДЫ

© 2017 г. М.О. Леви^{1,2}, В.В. Калинин^{1,2}, К.Л. Агаян³

Аннотация. Рассмотрена задача об установившихся гармонических колебаниях слоистой предварительно напряженной среды, представляющей собой электромагнитоупругий слой, жестко сцепленный с электромагнитоупругим полупространством. Начальные напряжения в среде определяются величиной деформации слоя или полупространства. В частности, исследованы случаи одновременного сжатия или растяжения слоя и полупространства. Для описания динамического процесса в среде использовали линеаризованные приближения уравнений движения и квазистатических уравнений Максвелла. Построена функция Грина среды с учетом непрерывности механических, электрических и магнитных полей. В качестве исследуемой среды был выбран композит, выполненный из широко используемых материалов: верхний слой композита выполнен из пьезоэлектрика BaTiO_3 , а подстилающее полупространство из пьезомагнетика CoFe_2O_4 .

Рассчитаны фазовые скорости среды при различных величинах начальных деформаций пьезоэлектрической и пьезомагнитной компонент среды. В качестве вариативных условий для задания начальных напряжений были использованы различные режимы начальной деформации: одноосный, двухосный и трехосный (гидростатический). Полученные результаты могут быть полезны при проектировании высоконагруженных устройств на базе электромагнитоупругих материалов.

Ключевые слова: начальные напряжения, электромагнитоупругость, гетероструктура, функция Грина.

PECULIARITIES OF DYNAMICS OF A LAYERED PRESTRESSED ELECTROMAGNETOELASTIC MEDIA

M.O. Levi^{1,2}, V.V. Kalinchuk^{1,2}, K.L. Agayan³

Abstract. The problem of steady harmonic oscillations of a layered prestressed medium, which is an electromagnetoelastic layer rigidly coupled to an electromagnetoelastic half-space, is considered. The initial stresses in the medium are determined by the amount of deformation of the layer or half-space. In particular, the cases of simultaneous compression or extension of a layer and a half-space are investigated. The dynamic process in the medium was described by linearized approximations of the equations of motion and quasistatic Maxwell equations. The Green's function of the medium is constructed with allowance for the continuity of mechanical, electric, and magnetic fields. As the studied medium, a composite made of widely used materials was chosen: the upper layer of the composite is made of the piezoelectric BaTiO_3 , and the underlying half-space from the piezomagnetic CoFe_2O_4 .

The phase velocities of the medium are calculated for different values of the initial deformations of the piezoelectric and piezomagnetic components of the medium. As various conditions for setting initial stresses, different initial strain modes were used: uniaxial, biaxial and triaxial (hydrostatic). The obtained results can be useful in the design of highly loaded devices based on electromagnetoelastic materials.

Keywords: initial stresses, electromagnetoelasticity, heterostructure, Green's function.

¹ Южный научный центр Российской академии наук (Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russian Federation), Российская Федерация, 344006, г. Ростов-на-Дону, пр. Чехова, 41, e-mail: kalin@ssc-ras.ru

² Южный федеральный университет (Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation), 344090, г. Ростов-на-Дону, пр. Стачки, д. 200/1, e-mail: mlevi@mindonline.ru

³ Институт механики Национальной академии наук Республики Армения (Institute of Mechanics of National Academy of Sciences of the Republic of Armenia, Yerevan, Republic of Armenia), Республика Армения, 375019, г. Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 246

ВВЕДЕНИЕ

Расширение спектра использования сегнетоэлектриков в современных приборах и акустоэлектронных устройствах определяет необходимость совершенствования методов моделирования протекающих в них физических и механических процессов с целью улучшения их рабочих параметров. Миниатюризация создаваемых устройств обуславливает новые требования к их динамическим характеристикам, что вынуждает совершенствовать методы проектирования, основанные на учете особенностей динамических процессов в составных электромагнитоупругих средах, находящихся в условиях воздействия механических усилий. Влияние начальных напряжений вдоль одной из осей на фазовые скорости электромагнитоупругого трансверсально изотропного материала при различных граничных условиях исследовано в статье [1]. В работе [2] изучены особенности влияния начальных напряжений на динамические характеристики функционально градиентного полупространства. В публикации [3] были исследованы волны Лява в электромагнитоупругих структурах с начальными напряжениями. Влияние неоднородного напряженного состояния для волн Лява в электромагнитоупругих средах также было рассмотрено в работах [4] и [5]. Волны Релея во вращающемся полупространстве с начальными напряжениями и различными граничными условиями изучались в статье [6]. В публикациях [7–11] предложены различные подходы к исследованию пьезоактивных структурно неоднородных, допускающих обобщение на класс задач для электромагнитоупругих сред. В работе [12] был развит метод исследования динамических процессов в электромагнитоупругой среде, на основе которого в статье [13] был детально проанализирован динамический процесс в электромагнитоупругом слое. В работе [14] метод был использован для изучения тонких вопросов влияния различных граничных условий на динамические процессы в электромагнитоупругой среде. В статье [15] была проведена последовательная линеаризация уравнений и определяющих соотношений нелинейной механики сплошной электромагнитоупругой среды, построены в тензорной форме линеаризованные определяющие соотношения в произвольной, в общем случае криволинейной системе координат. В настоящей работе на основе использования развитой в публикации [15]

линеаризованной теории распространения электромагнитоупругих волн изучено влияние начальных напряжений, вызванных различными видами начальной деформации на слоисто неоднородную среду, представляющую собой пьезоэлектрический слой, жестко сцепленный с магнитоупругим полупространством. Проведен численный анализ влияния различных видов напряженного состояния слоя и полупространства на фазовые скорости поверхностных волн.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим двумерную задачу о колебаниях в плоскости $x_1 O x_3$ слоистой среды, представляющей собой электромагнитоупругий слой $0 < x_3 \leq h_1$, $|x_1| \leq \infty$, жестко сцепленный с электромагнитоупругим полупространством $x_3 \leq 0$. Материалы слоя и полупространства могут иметь классы симметрии 2mm либо 6mm. Колебания в среде инициируются осциллирующей нагрузкой $\mathbf{q}(x_1, t) = \mathbf{q}_0 e^{-i\omega t}$ ($\mathbf{q}_0 = \{q_1, q_3, q_4, q_5\}$, здесь q_1 и q_3 – компоненты вектора механических напряжений вдоль x_1 и x_3 соответственно, $q_4 = -g$, g – плотность распределения электрического заряда, q_5 – магнитная нагрузка), распределенной в области $|x_1| \leq a$. Вне этой области поверхность свободна от механических напряжений. Колебания n -го слоя электромагнитоупругой среды в безобменном приближении описываются линеаризованными уравнениями движения и линеаризованными уравнениями Максвелла в квазистатическом приближении [15]:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\Theta}^{(n)} = \rho^{(n)} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}^{(n)} = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}^{(n)} = 0. \quad (1.2)$$

Здесь $\boldsymbol{\Theta}^{(n)}$ – линеаризованный тензор напряжений, $\mathbf{D}^{(n)}$, $\mathbf{B}^{(n)}$ – линеаризованные векторы электрической и магнитной индукции [15], $\mathbf{u}^{(n)} = \{u_1^{(n)}, u_3^{(n)}, u_4^{(n)}, u_5^{(n)}\}$ – расширенный вектор среды ($u_1^{(n)}$ и $u_3^{(n)}$ – компоненты вектора механических смещений слоя ($n = 1$) или полупространства ($n = 2$) вдоль осей x_1 и x_3 соответственно, $u_4^{(n)} = \varphi$ – электрический потенциал, $u_5^{(n)} = \psi$ – магнитный потенциал).

Материальные уравнения среды имеют вид [15]:

$$\begin{aligned}\theta_{lk}^{(n)} &= c_{lksp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} + e_{lkp}^{(n)*} u_{4,p}^{(n)} + f_{lkp}^{(n)*} u_{5,p}^{(n)}, \\ d_l^{(n)} &= e_{lsp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} - \varepsilon_{lp}^{(n)*} u_{4,p}^{(n)} - g_{lp}^{(n)*} u_{5,p}^{(n)}, \\ b_l^{(n)} &= f_{lsp}^{(n)*} u_{s,p}^{(n)} - g_{lp}^{(n)*} u_{4,p}^{(n)} - \mu_{lp}^{(n)*} u_{5,p}^{(n)},\end{aligned}\quad (1.3)$$

где $c_{lksp}^{(n)*}$, $e_{lkp}^{(n)*}$, $f_{lkp}^{(n)*}$ – компоненты линеаризованных тензоров упругих, пьезоэлектрических и пьезомагнитных коэффициентов, $\varepsilon_{lp}^{(n)*}$ – диэлектрические константы, $\mu_{lp}^{(n)*}$ – константы магнитной проницаемости, $g_{lp}^{(n)*}$ – коэффициент электромагнитоупругой связи. Для дальнейшего исследования перейдем к безразмерным параметрам:

$$\begin{aligned}\omega' &= \omega h^{(1)} / V_s^{(2)}, \\ c_{lksp}^{(n)*} &= c_{lksp}^{(n)*} / c_{2323}^{(2)}, \\ e_{lsp}^{(n)*} &= e_{lsp}^{(n)*} k_e / c_{2323}^{(2)}, \\ \varepsilon_{lp}^{(n)*} &= \varepsilon_{lp}^{(n)*} k_e^2 / c_{2323}^{(2)}, \\ f_{lsp}^{(n)*} &= f_{lsp}^{(n)*} k_m / c_{2323}^{(2)}, \\ \mu_{lp}^{(n)*} &= \mu_{lp}^{(n)*} k_m^2 / c_{2323}^{(2)}.\end{aligned}$$

Здесь $V_s^{(2)}$ – скорость сдвиговой волны в полупространстве, k_e , k_m – специальные множители. Линейные параметры задачи отнесены к толщине верхнего слоя, плотности – к плотности полупространства. Поскольку колебания предполагаются установившимися, происходящими по гармоническому закону, все функции представляются в виде $F = F_0 \exp(-i\omega't)$. Далее временной множитель и штрихи у безразмерных величин опущены.

НАЧАЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ

Рассмотрим случай, когда внешние электрические и магнитные статические поля отсутствуют, а начальная деформация обеих сред однородна и определяется соотношениями [15]:

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{(n)} &= \mathbf{r}^{(n)} \cdot \mathbf{\Lambda}^{(n)}, \quad \mathbf{G}^{(n)} = \mathbf{\Lambda}^{(n)} \cdot \mathbf{\Lambda}^{(n)\mathbf{T}}, \\ \mathbf{\Lambda}^{(n)} &= \delta_{ij} v_i^{(n)} \mathbf{r}_i \mathbf{r}_j, \quad v_i^{(n)} = 1 + \delta_i^{(n)} = \text{const}.\end{aligned}\quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{R}^{(n)}$, $\mathbf{r}^{(n)}$ – радиус-векторы точки среды в начально-деформированном и естественном состоянии соответственно, $v_i = 1 + \delta_i$, δ_i – относительные удлинения волокон вдоль осей x_1, x_2, x_3 , $\mathbf{G}^{(n)}$ – мера деформации Коши – Грина, δ_{ij} – символ Кронекера.

Компоненты тензора Коши деформации в начально деформированной конфигурации определяются выражением

$$S_{ij}^{(n)} = 1/2 \delta_{ij} \left(v_i^{(n)2} - 1 \right), \quad (2.2)$$

коэффициенты $c_{lksp}^{(n)*}$, $f_{lsp}^{(n)*}$ и $\mu_{lp}^{(n)*}$ рассчитываются по формулам [9]:

$$\begin{aligned}c_{lksp}^{(n)*} &= P_{lk}^{(n)} \delta_{ks} + v_k^{(n)} v_s^{(n)} c_{lksp}^{(n)}, \\ e_{lsp}^{(n)*} &= v_s^{(n)} e_{lsp}^{(n)}, \quad f_{lsp}^{(n)*} = v_s^{(n)} f_{lsp}^{(n)}, \\ \varepsilon_{lp}^{(n)*} &= \varepsilon_0 v_1^{(n)} v_2^{(n)} v_3^{(n)} v_l^{(n)-2} \delta_{lp} + \varepsilon_{lp}^{r(n)}, \\ \mu_{lp}^{(n)*} &= \mu_0 v_1^{(n)} v_2^{(n)} v_3^{(n)} v_l^{(n)-2} \delta_{lp} + \mu_{lp}^{r(n)}, \\ g_{lp}^{(n)*} &= g_{lp}^{(n)}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Здесь $P_{lp}^{(n)}$ – компоненты тензора напряжений Кирхгофа в начально-деформированном состоянии:

$$\begin{aligned}P_{11}^{(n)} &= c_{1111}^{(n)} S_{11}^{(n)} + c_{1122}^{(n)} S_{22}^{(n)} + c_{1133}^{(n)} S_{33}^{(n)} - \\ &\quad - e_{311}^{(n)} W_3^{(n)} - f_{311}^{(n)} V_3^{(n)}, \\ P_{22}^{(n)} &= c_{1122}^{(n)} S_{11}^{(n)} + c_{1111}^{(n)} S_{22}^{(n)} + c_{2233}^{(n)} S_{33}^{(n)} - \\ &\quad - e_{311}^{(n)} W_3^{(n)} - f_{311}^{(n)} V_3^{(n)}, \\ P_{33}^{(n)} &= c_{1133}^{(n)} S_{11}^{(n)} + c_{1133}^{(n)} S_{22}^{(n)} + c_{3333}^{(n)} S_{33}^{(n)} - \\ &\quad - e_{333}^{(n)} W_3^{(n)} - f_{333}^{(n)} V_3^{(n)}, \\ d_3^{(n)} &= e_{311}^{(n)} S_{11}^{(n)} + e_{311}^{(n)} S_{22}^{(n)} + e_{333}^{(n)} S_{33}^{(n)} + \\ &\quad + \varepsilon_{33}^{(n)} W_3^{(n)} + g_{33}^{(n)} V_3^{(n)}, \\ b_3^{(n)} &= f_{311}^{(n)} S_{11}^{(n)} + f_{311}^{(n)} S_{22}^{(n)} + f_{333}^{(n)} S_{33}^{(n)} + \\ &\quad + g_{33}^{(n)} W_3^{(n)} + \mu_{33}^{(n)} V_3^{(n)}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Коэффициенты $\varepsilon_{lp}^{r(n)}$ и $\mu_{lp}^{r(n)}$ связаны с константами диэлектрической и магнитной проницаемости выражениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{lp}^{r(n)} &= \varepsilon_0 \delta_{lp} + \varepsilon_{lp}^{r(n)}, \\ \mu_{lp}^{r(n)} &= \mu_0 \delta_{lp} + \mu_{lp}^{r(n)},\end{aligned}\quad (2.5)$$

Константы $W_j^{(n)}$ и $V_j^{(n)}$ – компоненты векторов магнитного и электрического полей соответственно.

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Далее рассмотрим следующие граничные условия на поверхности среды:

$$\begin{aligned}\theta_{3311}^{(1)} &= q_1(x_1); \quad \theta_{3333}^{(1)} = q_3(x_1); \\ x_3 = h_1 : \quad d_3^{(1)} &= q_4(x_1); \quad b_3^{(1)} = q_5(x_1);\end{aligned}\quad (3.1)$$

Граничные условия между слоем и полупространством:

$$x_3 = 0: \begin{cases} \theta_{3311}^{(1)} = \theta_{3311}^{(2)}; \theta_{3333}^{(1)} = \theta_{3333}^{(2)}; U_1^{(1)} = U_1^{(2)}; U_3^{(1)} = U_3^{(2)}; \\ d_3^{(1)} = d_3^{(2)}; b_3^{(1)} = b_3^{(2)}; U_4^{(1)} = U_4^{(2)}; U_5^{(1)} = U_5^{(2)}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Граничные условия (3.2) определяют непрерывность механических, электрических и магнитных полей на границе слоя и полупространства.

РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Для построения решения применим к уравнениям и граничным условиям преобразование Фурье по координате x_1 (α – параметр преобразования). Решение краевой задачи (1.1–1.3), (3.1–3.2) для слоя в образах Фурье представляется в виде ($p = 1, m = 1, 3, 4, 5$) [10]:

$$\begin{aligned} U_1^{(1)}(\alpha, x_3) &= -i\alpha \sum_{k=1}^4 y_{1k}^{(1)} [c_k^{(1)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} x_3 + c_{k+4}^{(1)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} x_3], \\ U_m^{(1)}(\alpha, x_3) &= \sum_{k=1}^4 y_{mk}^{(1)} [c_k^{(1)} \operatorname{ch} \sigma_k^{(1)} x_3 + c_{k+4}^{(1)} \operatorname{sh} \sigma_k^{(1)} x_3], \end{aligned} \quad (4.1)$$

для полупространства:

$$\begin{aligned} U_1^{(3)}(\alpha, x_3) &= -i\alpha \sum_{k=1}^4 y_{1k}^{(3)} c_k^{(3)} \exp(\sigma_k^{(3)} x_3); \\ U_m^{(3)}(\alpha, x_3) &= \sum_{k=1}^4 y_{mk}^{(3)} c_k^{(3)} \exp(\sigma_k^{(3)} x_3). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Неизвестные $y_{pk}^{(n)}$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{cases} (-i\alpha) [R_{11} y_{1k}^{(n)} + R_{12} y_{3k}^{(n)} + R_{13} y_{4k}^{(n)} + R_{14} y_{5k}^{(n)}] = 0, \\ R_{21} y_{1k}^{(n)} + R_{22} y_{3k}^{(n)} + R_{23} y_{4k}^{(n)} + R_{24} y_{5k}^{(n)} = 0, \\ R_{31} y_{1k}^{(n)} + R_{32} y_{3k}^{(n)} + R_{33} y_{4k}^{(n)} + R_{34} y_{5k}^{(n)} = 0, \\ R_{41} y_{1k}^{(n)} + R_{42} y_{3k}^{(n)} + R_{43} y_{4k}^{(n)} + R_{44} y_{5k}^{(n)} = 0. \end{cases}$$

$$R_{11} = -\alpha^2 c_{1111}^{(n)} + c_{3113}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} + \rho^{(n)} \omega^2,$$

$$R_{12} = (c_{1133}^{(n)} + c_{3131}^{(n)}) \sigma_k^{(n)}, \quad R_{13} = (e_{311}^{(n)} + e_{113}^{(n)}) \sigma_k^{(n)},$$

$$R_{14} = (f_{311}^{(n)} + f_{113}^{(n)}) \sigma_k^{(n)}, \quad R_{21} = (c_{1133}^{(n)} + c_{1313}^{(n)}) - \alpha^2 \sigma_k^{(n)},$$

$$R_{22} = -\alpha^2 c_{1331}^{(n)} + c_{3333}^{(n)} \sigma_k^{(n)2} + \rho^{(n)} \omega^2,$$

$$R_{23} = -\alpha^2 e_{131}^{(n)} + e_{3333}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}, \quad R_{24} = -\alpha^2 f_{131}^{(n)} + f_{3333}^{(n)} \sigma_k^{(n)2},$$

$$R_{31} = (e_{311}^{(n)} + e_{113}^{(n)}) (-\alpha^2 \sigma_k^{(n)}), \quad R_{32} = -\alpha^2 e_{113}^{(n)} + e_{3333}^{(n)} \sigma_k^{(n)2},$$

$$R_{33} = \alpha^2 \varepsilon_{11}^{(n)} - e_{333}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}, \quad R_{34} = \alpha^2 g_{11}^{(n)} - g_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2},$$

$$R_{41} = (f_{311}^{(n)} + f_{113}^{(n)}) (-\alpha^2 \sigma_k^{(n)}), \quad R_{42} = -\alpha^2 f_{113}^{(n)} + f_{3333}^{(n)} \sigma_k^{(n)2},$$

$$R_{43} = \alpha^2 g_{11}^{(n)} - g_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}, \quad R_{44} = \alpha^2 \mu_{11}^{(n)} - \mu_{33}^{(n)} \sigma_k^{(n)2}.$$

Параметры $\sigma_k^{(n)}$ определяются из характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Подставляя (4.1), (4.2) в (3.1)–(3.2), получим систему линейных алгебраических уравнений для определения коэффициентов $c_k^{(n)}$ [11; 12]:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{Q},$$

где $\mathbf{C} = \{c_1^1, c_2^1, c_3^1, \dots, c_4^2\}$ – вектор искомых коэффициентов, $\mathbf{Q} = \{Q_1, Q_3, Q_4, Q_5, \dots, 0\}$ – вектор нагрузки. Фазовые скорости находятся из решения уравнения:

$$\frac{\omega}{\det[\mathbf{A}]} = 0.$$

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве примера исследуем влияние различных напряженных состояний слоя и полупространства на фазовые скорости среды. Будем рассматривать следующие виды начального напряженного состояния электромагнитоупругой среды:

– одноосное напряженное состояние:

$$1x1: v_1 = v, P_{11} = P, P_{22} = P_{33} = 0;$$

$$1x2: v_2 = v, P_{22} = P, P_{11} = P_{33} = 0;$$

$$1x3: v_3 = v, P_{33} = P, P_{11} = P_{22} = 0;$$

– двуосное напряженное состояние:

$$2x1: v_1 = v, P_{11} = 0, P_{22} = P_{33} = P;$$

$$2x2: v_2 = v, P_{22} = 0, P_{11} = P_{33} = P;$$

$$2x3: v_3 = v, P_{33} = 0, P_{22} = P_{11} = P;$$

– гидростатическое напряженное состояние:

$$3x3: v_1 = v_2 = v_3 = v, P_{11} = P_{22} = P_{33} = P.$$

Здесь v_1, v_2, v_3 и P_{11}, P_{22}, P_{33} – относительное удлинение волокон и компоненты тензора напряжений вдоль осей x_1, x_2, x_3 соответственно.

Материальные константы титаната бария (BaTiO_3) [13]:

$$c_{1111} = 166 \text{ ГПа},$$

$$c_{1122} = 77 \text{ ГПа},$$

$$c_{1133} = 78 \text{ ГПа},$$

$$c_{3333} = 162 \text{ ГПа},$$

$$c_{3113} = c_{3131} = 43 \text{ ГПа},$$

$$c_{1212} = 44,5 \text{ ГПа},$$

$$e_{113} = 11,6 \text{ Кл/м}^2,$$

Рис. 1. Относительные фазовые скорости: *a* – двухосное состояние 2x1, 1 – $v_1^{(1)} = 1,01, v_2^{(2)} = 0,99$, 2 – $v_1^{(1)} = 0,99, v_2^{(2)} = 1,01$, *б* – двухосное состояние 2x2, 1 – $v_1^{(1)} = 1,01, v_2^{(2)} = 0,99$, $v_1^{(1)} = 0,99, v_2^{(2)} = 1,01$, 0 – естественное состояние

Fig. 1. Relative phase velocities: *a* – biaxial deformation 2x1, 1 – $v_1^{(1)} = 1.01, v_2^{(2)} = 0.99$, 2 – $v_1^{(1)} = 0.99, v_2^{(2)} = 1.01$, *б* – biaxial deformation 2x2, 1 – $v_1^{(1)} = 1.01, v_2^{(2)} = 0.99$, 2 – $v_1^{(1)} = 0.99, v_2^{(2)} = 1.01$, 0 – without initial deformation

$$\begin{aligned} e_{311} &= -4,4 \text{ Кл/м}^2, \\ e_{333} &= 18,6 \text{ Кл/м}^2, \\ f_{113} &= f_{311} = f_{333} = 0, \\ \varepsilon_{11} &= 11,2 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}, \\ \varepsilon_{33} &= 12,6 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}, \\ \mu_{11} &= 5 \cdot 10^{-6} \text{ Нс}^2/\text{Кл}^2, \\ \mu_{33} &= 10^{-5} \text{ Нс}^2/\text{Кл}^2, \\ g_{11} &= g_{33} = 0, \\ \rho &= 5800 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Материальные константы феррита кобальта (CoFe_2O_4) [13]:

$$\begin{aligned} c_{1111} &= 282 \text{ ГПа}, \\ c_{1122} &= 173 \text{ ГПа}, \\ c_{1133} &= 170 \text{ ГПа}, \\ c_{3333} &= 269,5 \text{ ГПа}, \\ c_{3113} &= c_{3131} = 45,3 \text{ ГПа}, \\ c_{1212} &= 54,5 \text{ ГПа}, \\ e_{113} &= e_{311} = e_{333} = 0, \\ f_{113} &= 550 \text{ Н/Ам}, \\ f_{311} &= 580 \text{ Н/Ам}, \\ f_{333} &= 700 \text{ Н/Ам}, \\ \varepsilon_{11} &= 0,08 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}, \\ \varepsilon_{33} &= 0,093 \cdot 10^{-9} \text{ Ф/м}, \\ \mu_{11} &= 5,9 \cdot 10^{-4} \text{ Нс}^2/\text{Кл}^2, \\ \mu_{33} &= 1,57 \cdot 10^{-4} \text{ Нс}^2/\text{Кл}^2, \\ g_{11} &= g_{33} = 0, \\ \rho &= 5300 \text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Рис. 2. Относительные фазовые скорости: 0 – естественное состояние; 1 – состояние 2x3, $v_1^{(1)} = 1,01, v_2^{(2)} = 0,99$, 2 – состояние 2x3, $v_1^{(1)} = 0,99, v_2^{(2)} = 1,01$

Fig. 2. Relative phase velocities: 0 – without initial deformation; 1 – biaxial deformation 2x3, $v_1^{(1)} = 1.01, v_2^{(2)} = 0.99$, 2 – biaxial deformation 2x3, $v_1^{(1)} = 0.99, v_2^{(2)} = 1.01$

На рисунках 1–4 приведены графики, иллюстрирующие влияние начальных напряжений в слое и полупространстве на фазовые скорости поверхностных волн. На рисунке 1 представлены кривые фазовых скоростей при напряженных состояниях 2x1 (рис. 1a) и 2x2 (рис. 1б). Цифрой 1 на обоих графиках обозначены кривые при растяжении слоя BaTiO_3 с одновременным сжатием полупространства CoFe_2O_4 . Цифрой 3 отмечены кривые, соответствующие противоположной ситуации. Здесь и ниже цифрой 0 отмечена кривая, соответствующая естественному состоянию. Из рисунка видно, что в напряженном состоянии 2x1 влияние началь-

Рис. 3. Относительные фазовые скорости: 1 – напряженное состояние 1х2, 2 – напряженное состояние 2х2, 3 – напряженное состояние 3х; а – $v_1^{(1)} = 0,99, v_2^{(2)} = 1,01$, б – $v_1^{(1)} = 1,01, v_2^{(2)} = 0,99$

Fig. 3. Relative phase velocities: 1 – uniaxial deformation 1х2, 2 – biaxial deformation 2х2, 3 – hydrostatic deformation 3х; а – $v_1^{(1)} = 0,99, v_2^{(2)} = 1,01$, б – $v_1^{(1)} = 1,01, v_2^{(2)} = 0,99$

ных напряжений наиболее сильно проявляется на средних и высоких частотах, причем дальнейший рост частоты уже не оказывает влияния на фазовые скорости. Случай $v_1^{(1)} = 1,01, v_2^{(2)} = 0,99$ (кривая 1) показывает, что на высоких частотах можно получить скорости более высокие, чем скорость выхода моды. В напряженном состоянии 2х2 изменения фазовых скоростей максимальные. Представляет интерес существование в области $\omega \approx 1$ частоты, при которой начальная деформация не влияет на фазовую скорость. В то же время данный вид деформации изменяет точки выхода моды. Для случая $v_1^{(1)} = 0,99, v_2^{(2)} = 1,01$ (кривая 2) отсутствует локальный минимум в выбранной частотной области.

На рисунке 2 показано влияние двухосного напряженного состояния 2х3 на фазовые скорости электромагнитоупругой среды. Из графиков следует, что этот вид напряженного состояния оказывает наименьшее влияние на фазовые скорости. Увеличение частоты влечет выход фазовых скоростей на свои асимптотики. В частотной области $\omega < 1$ влияние напряжений слабо различимо.

Рисунок 3 иллюстрирует различие во влиянии на фазовые скорости одноосного, двухосного и трехосного состояния с величинами деформации $v_1^{(1)} = 0,99, v_2^{(2)} = 1,01$ (рис. 3а) и $v_1^{(1)} = 1,01, v_2^{(2)} = 0,99$ (рис. 3б). Из графиков на рисунке 3а следует, что максимальное влияние на высоких частотах имеет состояние 3х, ми-

нимальное влияние – 1х1. В то же время на низких частотах влияние состояния 1х1 заметно выше, чем на высоких. На рисунке 3б показан случай: $v_1^{(1)} = 1,01, v_2^{(2)} = 0,99$. Из сравнения представленных на рисунках 3а и 3б кривых следует, что фазовые скорости располагаются зеркально симметрично с минимальными изменениями в абсолютных величинах. Тем самым, изменяя деформацию слоя и полупространства, можно инвертиро-

Рис. 4. Относительные фазовые скорости: 1 – напряженное состояние 1х1, 2 – напряженное состояние 2х2, 3 – напряженное состояние 2х3 при $v_1^{(1)} = 0,99, v_2^{(2)} = 1,01$

Fig. 4. Relative phase velocities: 1 – uniaxial deformation 1х1, 2 – biaxial deformation 2х2, 3 – hydrostatic deformation 2х3; deformation magnitudes: $v_1^{(1)} = 0,99, v_2^{(2)} = 1,01$

вать характер распределения фазовых скоростей при условии, что жесткость материалов сопоставима.

Рисунок 4 иллюстрирует влияние деформаций в напряженных состояниях 1×1 , 2×2 , 2×3 при деформациях $v_1^{(1)} = 0,99$, $v_2^{(2)} = 1,01$. Видно, что максимальное влияние имеет место при двухосном напряженном состоянии 2×3 . В то же время влияние

напряженного состояния 3×3 сопоставимо с состоянием 1×1 . В области $\omega \approx 1$ деформации оказывают минимальное влияние.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 16-01-00647, № 15-08-06074, № 16-48-230068.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zhang Rong, Pang Yu, Feng Wenjie. 2014. Propagation of Rayleigh Waves in a Magneto-Electro Elastic Half-Space with Initial Stress. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 21(7): 538–543. doi: 10.1080/15376494.2012.699595
2. Li Li, Wei P.J. 2014. Surface wave speed of functionally graded magneto-electro-elastic materials with initial stresses. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 44(3): 49–64. doi: 10.2478/jtam-2014-0016
3. Du J., Xu Jun-Jie, Wang Ji. 2007. Love wave propagation in layered magneto-electro-elastic structures with initial stress. *Acta Mechanica*. 192(1): 169–189. doi: 10.1007/s00707-006-0435-3.
4. Zhang J., Shen Y.P., Du J.K. 2008. The effect of inhomogeneous initial stress on Love wave propagation in layered magneto-electro-elastic structures. *Smart Materials and Structures*. 17(2): 9–18. doi: 10.1088/0964-1726/17/2/025026
5. Shikha Kakar, Rajneesh Kakar. 2013. Love wave propagation in electro-magneto non-homogeneous elastic media. *Intern. Journal of Materials Science and Applications*. 2(2): 61–67. doi: 10.11648/j.ijmsa.20130202.15
6. Baljeet Singh. 2013. Rayleigh wave in a rotating initially stressed piezoelectric half-space. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 43(2): 55–68. doi: 10.2478/jtam-2013-0014
7. Белянкова Т.И., Зайцева И.А., Калинин В.В., Пузанов Ю.Е. 2001. Динамика пьезоактивной структурно неоднородной среды. *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки*. Спецвыпуск: 33–35.
8. Белянкова Т.И., Лыжов В.А. 2010. Некоторые особенности динамики слабонеоднородных пьезоактивных структур. *Вестник Южного научного центра*. 6(2): 3–10.
9. Белянкова Т.И., Калинин В.В., Лыжов В.А. 2010. Связанная смешанная задача для системы электродов на поверхности преднапряженного электроупругого структурно неоднородного полупространства. *Прикладная математика и механика*. 74(6): 897–910.
10. Белянкова Т.И., Калинин В.В., Лыжов В.А. 2011. Роль размерных параметров в формировании волновых полей в неоднородных пьезоактивных структурах. *Вестник Южного научного центра*. 7(3): 3–12.
11. Широков В.Б., Юзюк Ю.И., Калинин В.В., Леманов В.В. 2013. Материальные константы твердых растворов (Ba,Sr) TiO₃. *Физика твердого тела*. 55(4): 709–714.
12. Калинин В.В., Белянкова Т.И., Леви М.О., Агаян К.Л. 2013. Некоторые особенности динамики слабонеоднородного магнитоупругого полупространства. *Вестник Южного научного центра*. 9(4): 13–17.

13. Леви М.О. 2011. Динамическая задача для электромагнитоупругого слоя. *Вестник Южного научного центра*. 7(4): 5–10.
14. Леви М.О., Анджинович И.Е., Ворович Е.И., Агаян К.Л. 2012. Влияние граничных условий на динамику электромагнитоупругой полуграниченной среды. *Вестник Южного научного центра*. 8(4): 14–19.
15. Белянкова Т.И., Калинин В.В. 2016. Уравнения динамики предварительно напряженной магнитоэлектроупругой среды. *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 5: 101–110.

REFERENCES

1. Zhang Rong, Pang Yu, Feng Wenjie. 2014. Propagation of Rayleigh Waves in a Magneto-Electro Elastic Half-Space with Initial Stress. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*. 21(7): 538–543. doi: 10.1080/15376494.2012.699595
2. Li Li, Wei P.J. 2014. Surface wave speed of functionally graded magneto-electro-elastic materials with initial stresses. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 44(3): 49–64. doi: 10.2478/jtam-2014-0016
3. Du J., Xu Jun-Jie, Wang Ji. 2007. Love wave propagation in layered magneto-electro-elastic structures with initial stress. *Acta Mechanica*. 192(1): 169–189. doi: 10.1007/s00707-006-0435-3
4. Zhang J., Shen Y.P., Du J.K. 2008. The effect of inhomogeneous initial stress on Love wave propagation in layered magneto-electro-elastic structures. *Smart Materials and Structures*. 17(2): 9–18. doi: 10.1088/0964-1726/17/2/025026
5. Shikha Kakar, Rajneesh Kakar. 2013. Love wave propagation in electro-magneto non-homogeneous elastic media. *Intern. Journal of Materials Science and Applications*. 2(2): 61–67. doi: 10.11648/j.ijmsa.20130202.15
6. Baljeet Singh. 2013. Rayleigh wave in a rotating initially stressed piezoelectric half-space. *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 43(2): 55–68. doi: 10.11648/j.ijmsa.20130202.15
7. Belyankova T.I., Zaytseva I.A., Kalinchuk V.V., Puzanov Yu.E. 2001. [The dynamics of a piezoactive structurally inhomogeneous medium]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennyye nauki*. Special issue: 33–35. (In Russian).
8. Belyankova T.I., Lyzhov V.A. 2010. [Some features of dynamics for weakly inhomogeneous piezo-active structures]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 6(2): 3–10. (In Russian).
9. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lyzhov V.A. 2010. A coupled mixed problem for a system of electrodes on the surface of a prestressed electroelastic structurally inhomogeneous half-space. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 74(6): 637–647. doi: 10.1016/j.jappmathmech.2011.01.003

10. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V., Lyzhov V.A. 2011. [Role of dimensioned parameters in formation of wave fields in heterogeneous piezoactive structures]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 7(3): 3–12. (In Russian).
11. Shirokov V.B., Yuzyuk Yu.I., Kalinchuk V.V., Lemanov V.V. 2013. Material constants of (Ba,Sr)TiO₃ solid solutions. *Physics of the Solid State*. 55(4): 773–779. doi: 10.1134/S1063783413040276
12. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I., Levi M.O., Agayan K.L. 2013. [Some specific features of dynamics of slightly heterogeneous magneto-elastic half-space]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 9(4): 13–17. (In Russian).
13. Levi M.O. 2011. [Dynamic task for electromagnetoelastic layer]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 7(4): 5–10. (In Russian).
14. Levi M.O., Andzhikovich I.E., Vorovich E.I., Agayan K.L. 2012. [The influence of boundary conditions on the dynamics of semibounded electromagneto-elasticity media]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra*. 8(4): 14–21. (In Russian).
15. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. 2016. Dynamic equations of a prestressed magnetoelectroelastic medium. *Mechanics of Solids*. 51(5): 588–595. doi: 10.3103/S0025654416050125

Поступила 03.07.2017