УДК 517.95

DOI 10.23671/VNC.2020.1.57532

ТРИ ТЕОРЕМЫ О МАТРИЦАХ ВАНДЕРМОНДА

А. Е. Артисевич¹, А. Б. Шабат²

¹ Адыгейский государственный университет,

Россия, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 20;

² Институт теоретической Физики им. Ландау РАН,

Россия, 142432, Черноголовка, пр. Ак. Семенова, 1а

E-mail: cokolovangela@rambler.ru, shabatab@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются алгебраические вопросы, связанные с дискретным преобразованием Фурье, определенным при помощи симметричной матрицы Вандермонда Λ . Основное внимание в первых двух теоремах уделяется выработке формулировок, независимых от размера $N \times N$ матрицы Λ и явных формул для элементов матрицы Λ через корни уравнения $\lambda^N = 1$. В третьей теореме рассматриваются рациональные функции $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие условию «вещественности» $f(\lambda) = f(\frac{1}{\lambda})$ на всей комплексной плоскости и связанные с известной задачей о коммутировании симметричных матриц Вандермонда Λ с (симметричными) трехдиагональными матрицами T . Показано, что уже несколько первых уравнений коммутирования и указанное выше условие вещественности определяют вид рассматриваемых рациональных функций $f(\lambda)$, а найденные уравнения для элементов трехдиагональных матриц T не зависят от порядка N коммутирующих матриц. Полученные уравнения и приведенные примеры позволяют высказать гипотезу о том, что рассматриваемые рациональные функции являются обобщением многочленов Чебышева. В определенном смысле аналогичная гипотеза была высказана в недавно опубликованной в журнале «Теоретическая и математическая физика» работе В. М. Бухштабера с соавторами, где обсуждаются приложения этих обобщений в современной математической физике.

Ключевые слова: матрица Вандермонда, дискретное преобразование Фурье, условия коммутирования, многочлены Лорана.

Mathematical Subject Classification (2010): 42A38.

Образец цитирования: Артисевич А. Е., Шабат А. Б. Три теоремы о матрицах Вандермонда // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 1.—С. 5–12. DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57532.

1. Симметричные матрицы Вандермонда

Мы называем матрицу Вандермонда A общего вида с комплексными элементами x_i^j :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}, \quad x_j \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

симметричной, если $A^T = A$. В этом случае $x_1 = 1$, а все остальные x_j являются степенями одного и того же комплексного числа λ . Этот частный случай матрицы Вандермонда (1) имеет следующий вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda^{N-1} & \lambda^{2(N-1)} & \dots & \lambda^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2)$$

Известное свойство унитарности матриц дискретного преобразования Фурье (см. [1]), приводит нас к следующему уравнению для матриц Вандермонда (1):

$$AA^* = A^*A = N \cdot E, \quad (3)$$

где $*$ обозначает эрмитово сопряжение $A^* = \bar{A}^T$, а $E = \text{diag}(1, \dots, 1)$ — единичную матрицу.

Теорема 1. Матрица Вандермонда (1) удовлетворяет уравнению (3) в том и только в том случае, если x_j для $j = 1, 2, \dots, N$ являются N различными корнями уравнения $x^N = e^{iN\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. При этом матрица (1) записывается в виде произведения симметричной матрицы Вандермонда (2) с $\lambda^N = 1$ и диагональной $A = \Lambda \cdot \text{diag}(1, e^{i\gamma}, e^{i2\gamma}, \dots)$.

Последнюю формулу в теореме поясним следующим примером.

ПРИМЕР 1.1. Выбор $x_1 = e^{i\gamma}$ находится в нашем распоряжении и, выбрав при $N = 3$

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \Rightarrow x_1^2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad x_1^3 = i; \quad \lambda = e^{\frac{2}{3}i\pi}, \quad (4)$$

мы получаем «унитарную» матрицу (1), удовлетворяющую уравнению (3):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1^2 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = 1.$$

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим диагональные элементы с номерами [22] и [33] произведения A^*A . Уравнение (3) дает для разностей $y_j = |x_j|^2 - 1$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_N = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_N^2 = 0 \Rightarrow y_j = 0 \quad (\forall j \in [N]).$$

Поэтому справедливо утверждение

Лемма 1. В условиях теоремы 1 выполняется $|x_j| = 1$ для любого j .

Таким образом независимо от размера матрицы Вандермонда доказательство теоремы 1 сводится в силу формул Виета к проверке импликации

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_N = 0, \\ x_1^2 + \dots + x_N^2 = 0, \\ \dots \dots \dots \\ x_1^{N-1} + \dots + x_N^{N-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow x_j^N = a \quad (\forall j \in [N]).$$

Остается заметить, что $|a| = 1$ в силу леммы 1 и что уравнение $z^N = a$ сводится к уравнению $\lambda^N = 1$ заменой $z = e^{i\gamma}$ при $a = e^{iN\gamma}$. Доказательство обратного утверждения, т. е. $\lambda = e^{\frac{2i\pi}{N}} \Rightarrow (3)$, можно извлечь из цитированной выше монографии [1].

ПРИМЕР 1.2. Пусть $N = 3$. Тогда восемь уравнений матричного равенства $A^*A = 3E$ можно представить в виде трех систем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ x_1^2 + x_1^2 + x_3^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 3; \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = 0; \\ y_1\bar{x}_1 + y_2\bar{x}_2 + y_3\bar{x}_3 = 0, \end{cases}$$

где мы сменили обозначения леммы 1 и $y_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j\bar{x}_j$. В силу леммы $y_j = 1 \Leftrightarrow x_j\bar{x}_j = 1$ для любого $j = 1, 2, 3$. При этом последняя система уравнений совпадает с первой, а вторая превращается в тождества вида $3 = 3$. Аналогично в случае $N = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix}$$

и 16 уравнений матричного равенства $A^*A = 4E$, при условии что $y_j = x_j\bar{x}_j = 1$,

$$\begin{cases} x_1 + \dots + x_4 = 0; \\ x_1^2 + \dots + x_4^2 = 0; \\ x_1^3 + \dots + x_4^3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + \dots + y_4 = 4; \\ y_1^2 + \dots + y_4^2 = 4; \\ y_1^3 + \dots + y_4^3 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1x_1 + \dots + y_4x_4 = 0; \\ y_1x_1^2 + \dots + y_4x_4^2 = 0; \\ y_1^2x_1 + \dots + y_4^2x_4 = 0 \end{cases}$$

сводятся к трем уравнениям первой из этих систем.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Множество корней из единицы при $N = 3$ состоит из трех элементов, образующих циклическую группу. При этом любой из элементов $\lambda_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\lambda_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ можно использовать в качестве образующей циклической группы. Если решать рассматриваемую полиномиальную систему из 8 уравнений при помощи вычислительной техники, то решения записываются в виде, аналогичном (4), но со свободным параметром. Компьютер выдает два таких решения (с учетом перестановок). Следует заметить, что уже для случая $N = 5$ вычислительная техника испытывает затруднения и не доводит решение до конца.

Следующая теорема показывает, что для симметричных матриц Вандермонда Λ вида (2) условие $\Lambda\Lambda^* = N \cdot E$ из теоремы 1 можно заменить условием $\Lambda^2 = N \cdot Q$, где Q — матрица перестановок, состоящая из нулей и единиц:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Теорема 2. Симметричная $N \times N$ матрица Вандермонда (2) является матрицей дискретного преобразования Фурье и удовлетворяет условию $\lambda^N = 1$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^2 = N \cdot Q$, где Q — симметричная матрица перестановок (5).

◁ Доказательство этой теоремы приведено в монографии [1], и мы ограничимся замечанием, что для вывода основного уравнения $\lambda^N = 1$ достаточно приравнять к нулю элемент с номером $\boxed{12}$ в матрице Λ^2 , так как при $\lambda \neq 0$

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \dots + \lambda^{N-1} = 0 \Rightarrow \lambda^N = 1. \triangleright$$

2. Канонические многочлены Лорана

Следуя работам [2, 3], рассмотрим теперь связанное с матрицами Вандермонда (1) коммутационное уравнение $TA = AT$, где T — трехдиагональная матрица общего вида:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \tilde{b}_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \tilde{b}_{N-1} & a_N \end{pmatrix}, \quad (6)$$

элементы которой можно выразить через элементы матрицы (1). В дополнение к работе [2] мы покажем, что в условиях теоремы 2, т. е. для симметричных матриц Вандермонда вида (2), диагональные элементы a_j матрицы (6) записываются в виде «канонических» многочленов Лорана:

$$P_n(\lambda) = \prod_{j=1}^n \left(\lambda + \gamma_j + \frac{1}{\lambda} \right). \quad (7)$$

Отметим, что коэффициенты этих «многочленов» степени $2n$ определяются только их номером n (см. ниже) и не зависят от размера N рассматриваемой симметричной матрицы (2).

2.1. Необходимые условия коммутирования. Схема вывода формул, выражающих элементы треугольной матрицы через элементы матрицы Вандермонда (1), мало зависит от предположения симметричности $A^T = A$, и мы ограничимся ниже именно этим случаем, предполагая для простоты искомую матрицу (6) также симметричной. Коммутатор симметрических матриц кососимметричен и его первая строка с элементами $\boxed{12}$, $\boxed{13}$, ... позволяют выразить разности диагональных элементов $a_2 - a_1$, $a_3 - a_1$, ... через недиагональные. В результате получаем

$$\begin{cases} \boxed{12}: a_1 + b_1\lambda = b_1 + a_2 + b_2, & a_2 - a_1 = \lambda b_1 - b_1 - b_2, \\ \boxed{13}: a_1 + b_1\lambda^2 = b_2 + a_3 + b_3, & a_3 - a_1 = \lambda^2 b_1 - b_2 - b_3, \\ \boxed{14}: a_1 + b_1\lambda^3 = b_3 + a_4 + b_4, & a_4 - a_1 = \lambda^3 b_1 - b_3 - b_4, \dots \end{cases} \quad (8)$$

Вторая строка коммутатора с элементами $\boxed{23}$, $\boxed{24}$, $\boxed{25}$... дает

$$\begin{cases} \boxed{23}: b_1 + a_2\lambda^2 + b_2\lambda^4 = b_2\lambda + a_3\lambda^2 + b_3\lambda^3, \\ \boxed{24}: b_1 + a_2\lambda^3 + b_2\lambda^6 = b_3\lambda^2 + a_4\lambda^3 + b_4\lambda^4, \\ \boxed{25}: b_1 + a_2\lambda^4 + b_2\lambda^8 = b_4\lambda^3 + a_5\lambda^4 + b_5\lambda^5 \end{cases} \quad (9)$$

и, подставив сюда найденные из предыдущих уравнений разности диагональных элементов, находим уравнения для выражения b_j , $j \geq 2$, через b_1 и b_2 . В частности,

$$\begin{aligned} b_3(\lambda) &= \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 1 \right) b_2(\lambda) - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \right) b_1(\lambda), \\ b_4(\lambda) &= \left(\lambda^2 + \lambda + 2 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \right) b_2(\lambda) - \left(\lambda^2 + \lambda + 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) b_1(\lambda). \end{aligned} \quad (10)$$

Итак, можно считать доказанной следующую теорему 3.

Теорема 3. Первые две строки уравнений коммутативности (8) и (9) позволяют найти вид коэффициентов трехдиагональной матрицы T в форме многочленов Лорана от независимой переменной λ и выразить их через $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$.

Сравнив полученные выражения с уравнением, полученным из элемента [34] коммутатора

$$b_2\lambda^3 + a_3\lambda^6 + b_3\lambda^9 = \lambda^4b_3 + \lambda^6a_4 + \lambda^9b_4, \quad (11)$$

приходим к выводу (ср. [2]), что условие $b_1 = 0$ является *необходимым условием* для выполнения коммутационных соотношений $TA = AT$ в симметричном случае (2).

2.2. Формулы Виета. Рассматривая условия разрешимости коммутационных соотношений в кольце многочленов Лорана $\sum c_j\lambda^j$ от формальной переменной λ , будем использовать следующие обозначения:

$$\sum c_j\lambda^j = \left[\sum c_j\lambda^j\right]_- + \left[\sum c_j\lambda^j\right]_+; \quad \left[\sum c_j\lambda^j\right]_+ \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \geq 0} c_j\lambda^j,$$

где квадратные скобки $[\dots]_+$ и $[\dots]_-$ обозначают сумму соответственно членов с отрицательными и положительными степенями λ .

Лемма 2. Пусть $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Тогда все многочлены Лорана $b_m(\lambda)$ и $a_m(\lambda)$, найденные из уравнений (8) и (9), инвариантны относительно замены $\lambda \leftrightarrow \lambda^{-1}$, и для многочлена $a_{N+2}(\lambda)$ при любом $N > 0$ имеем

$$\begin{aligned} -[a_{N+2}]_+ &= \lambda^N + 2\lambda^{N-1} + 3\lambda^{N-2} + \dots + N\lambda + N, \\ [\lambda a_{N+2}]_- &= [a_{N+1}]_-, \quad N > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

$\triangleleft$ Уравнения первой строчки при $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ и $a_1 = 1$ дают

$$a_2 = 0, \quad a_3 + b_3 = 0, \quad a_m = 1 - b_m - b_{m-1}, \quad m > 3. \quad (13)$$

Учитывая формулы (8), (9), получаем теперь (ср. [2]), что при $m > 0$

$$b_{m+1} = \frac{1}{\lambda}b_m + 1 + \lambda + \dots + \lambda^{m-1}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1.$$

Найденные по этим формулам многочлены Лорана $b_m(\lambda)$ инвариантны относительно замены $\lambda \leftrightarrow \lambda^{-1}$ и для доказательства уравнений (12) остается применить индукцию к $b_m + b_{m-1} - 1$. $\triangleright$

Следствием полученных выше формул является

Лемма 3. При $m \geq 3$ комплексные корни $\lambda^m = 1$ из единицы являются комплексными нулями многочленов Лорана $a_m(\lambda)$, $m \geq 3$, из леммы 3.

$\triangleleft$ Заменив при помощи уравнения $\lambda^m = 1$, $m = N + 2$, отрицательные степени λ в формуле (12) на положительные

$$\begin{aligned} P_N(\lambda) &= \lambda^N + 2\lambda^{N-1} + 3\lambda^{N-2} + \dots + N\lambda + N + \frac{N}{\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda^N}, \\ \lambda^{N+2} = 1 &\Rightarrow \frac{1}{\lambda^N} = \lambda^2, \quad \frac{1}{\lambda^{N-1}} = \lambda^3, \dots, \quad \frac{1}{\lambda} = \lambda^{N+1}, \end{aligned}$$

после приведения подобных членов получаем

$$P_N(\lambda) \equiv N(\lambda^{N+1} + \lambda^N + \dots + 1) = 0, \quad \text{mod } \lambda^{N+2} = 1. \quad \triangleright \quad (14)$$

** В статье [4] получены аналогичные формулы.

Очевидно, общее число $2n$ комплексных корней многочленов Лорана $P_n(\lambda)$ из формулы (7) превосходит при $n > 2$ число $n + 2$ соответствующих комплексных корней из единицы. Дополнительные корни уравнения $P_n(\lambda) = 0$ можно найти, используя обобщенные *формулы Виета*, приспособленные к произведениям вида (7):

$$\begin{aligned} \left(\lambda + \gamma_1 + \frac{1}{\lambda}\right) \left(\lambda + \gamma_2 + \frac{1}{\lambda}\right) &= \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + (\gamma_1 + \gamma_2) \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + \gamma_1 \gamma_2 + 2, \\ P_n(\lambda) = \prod_{j=1}^n \left(\lambda + \gamma_j + \frac{1}{\lambda}\right) &= \lambda^n + \frac{1}{\lambda^n} + \tilde{\sigma}_1 \left(\lambda^{n-1} + \frac{1}{\lambda^{n-1}}\right) + \tilde{\sigma}_2 \left(\lambda^{n-2} + \frac{1}{\lambda^{n-2}}\right) + \dots + \tilde{\sigma}_n. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $\tilde{\sigma}_j$ выражаются через элементарные симметрические многочлены σ_i , $i \leq j$,

$$\tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 = \sum \gamma_i; \quad \tilde{\sigma}_2 = \sigma_2 + n = n + \sum_{i < j} \gamma_i \gamma_j, \quad n > 2,$$

и определяются при $j \geq 2$ следующей рекуррентной формулой:

$$\tilde{\sigma}_j(n+1) = \tilde{\sigma}_j(n) + \gamma_{n+1} \tilde{\sigma}_{j-1}(n) + \tilde{\sigma}_{j-2}(n), \quad \tilde{\sigma}_0 = 1. \quad (15)$$

ПРИМЕР 3. При $n = 3$ комплексные корни уравнения $\lambda^5 = 1$ дают 4 из 6 корней рассматриваемого уравнения:

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} + 2 \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + 3 \left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + 3 = \prod_{j=1}^3 \left(\lambda + \gamma_j + \frac{1}{\lambda}\right) = 0.$$

Формулы Виета приводят в этом случае к следующей системе уравнений для γ_j :

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 2, \quad \gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1 \gamma_3 + \gamma_2 \gamma_3 = 0, \quad \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 = -1.$$

Можно проверить независимо, что рассматриваемый многочлен $P_3(\lambda)$ является приводимым и факторизуется следующим образом:

$$P_3(\lambda) = \left(\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}\right) \left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + \lambda + \frac{1}{\lambda} + 1\right).$$

3. Заключение

Свойство унитарности матриц дискретного преобразования Фурье $AA^* = NE$ допускает, как следует из теоремы 1, дополнительные возможности (см. пример 1), которые могут использоваться при дискретном преобразовании Фурье квази-периодических функций. Имея в виду полный отказ от условий периодичности преобразуемых функций, представляется интересным исследовать возможности, предоставляемые коммутационными соотношениями вида

$$[T, A] = TA - AT = 0, \quad (16)$$

где A — матрица Вандермонда (1) и T — трехдиагональная матрица (6) общего вида. Дополнительный интерес в этой задаче связан с алгебраическими обобщениями уравнения $\lambda^N = 1$, рассмотренными в заключительном разделе данной работы и с многочленами Чебышева.

Литература

1. Бурланков Д. Е., Кузнецов М. И., Чирков А. Ю., Яковлев В. А. Компьютерная алгебра.—Нижний Новгород: Нижегородский гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского, 2002.—105 с.
2. Grunbaum F. A. The eigenvectors of the discrete Fourier transform: a version of the Hermite functions // J. Math. Anal. Appl.—1982.—Vol. 88, № 2.—P. 355–363. DOI: 10.1016/0022-247X(82)90199-8.
3. Шабат А. Б. Симметрические многочлены и законы сохранения // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, вып. 4.—С. 83–94. DOI 10.23671/VNC.2012.14.11014.
4. Бухштабер В. М., Тертычный С. И. Семейство явных решений уравнений резистивной модели перехода Джозефсона // Теор. и мат. физика.—2013.—Т. 176, № 2.—С. 163–188. DOI: 10.4213/tmf8512.

Статья поступила 16 июля 2019 г.

Артисевич Анжела Евгеньевна
Адыгейский государственный университет,
старший преподаватель кафедры мат. анализа
РОССИЯ, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 20
E-mail: cokolovangela@rambler.ru

Шабат Алексей Борисович
Институт теоретической Физики им. Ландау РАН,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 142432, Черноголовка, пр. Ак. Семенова, 1а
E-mail: shabatab@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 1, P. 5–12

THREE THEOREMS ON VANDERMOND MATRICES

Artisevich, A. E.¹ and Shabat, A. B.²

¹ Adyghe State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia;

² Landau Institute for Theoretical Physics,
1A Akademika Semenova Ave., Chernogolovka 142432, Russia;
E-mail: cokolovangela@rambler.ru, shabatab@mail.ru

Abstract. We consider algebraic questions related to the discrete Fourier transform defined using symmetric Vandermonde matrices Λ . The main attention in the first two theorems is given to the development of independent formulations of the size $N \times N$ of the matrix Λ and explicit formulas for the elements of the matrix Λ using the roots of the equation $\Lambda^N = 1$. The third theorem considers rational functions $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, satisfying the condition of “materiality” $f(\lambda) = f(\frac{1}{\lambda})$, on the entire complex plane and related to the well-known problem of commuting symmetric Vandermonde matrices Λ with (symmetric) three-diagonal matrices T . It is shown that already the first few equations of commutation and the above condition of materiality determine the form of rational functions $f(\lambda)$ and the equations found for the elements of three-diagonal matrices T are independent of the order of N commuting matrices. The obtained equations and the given examples allow us to hypothesize that the considered rational functions are a generalization of Chebyshev polynomials. In a sense, a similar, hypothesis was expressed recently published in “Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika” by V. M. Bukhstaber et al., where applications of these generalizations are discussed in modern mathematical physics.

Key words: Vandermonde matrix, discrete Fourier transform, commutation conditions, Laurent polynomials.

Mathematical Subject Classification (2010): 42A38.

For citation: Artisevich, A. E. and Shabat, A. B. Three Vandermonde Matrices Theorem, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 1, pp. 11–12 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57532.

References

1. Burlankov, D. Ye., Kuznetsov, M. I., Chirkov A. Yu. and Yakovlev, V. A. *Computer Algebra*, Nizhny Novgorod, N. I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, 2002, 105 p.
2. Grunbaum, F. A. The Eigenvectors of the Discrete Fourier Transform: A Version of the Hermite Functions, *J. Math. Anal. Appl.*, 1982, vol. 88, no. 2, pp. 355–363. DOI: 10.1016/0022-247X(82)90199-8.
3. Shabat, A. B. Symmetrical Polynomials and Conservation Laws, *Vladikavkaz Math. J.*, 2012, vol. 14, no. 4, pp. 83–94. DOI: 10.23671/VNC.2012.14.11014.
4. Buchstaber, V. M. and Tertychniy, S. I. Explicit Solution Family for the Equation of the Resistively Shunted Josephson Junction Model, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2013, vol. 176, pp. 965–986. DOI: 10.1007/s11232-013-0085-2.

Received July 16, 2019

ANZHELA E. ARTISEVICH
Adygeya State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia,
Senior Lecturer
E-mail: `cokolovangela@rambler.ru`

ALEXEY B. SHABAT
Landau Institute for Theoretical Physics,
1A Akademika Semenova Ave., Chernogolovka 142432, Russia,
Professor
E-mail: `shabatab@mail.ru`