АНАЛИЗ, МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПТИМИЗАЦИЯ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ

УДК 517.977.52

Е. П. Белоусова,
Е. А. Лебедева

ОПТИМАЛЬНАЯ ПОЛИТИКА В ОБЛАСТИ РЕКЛАМНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Аннотация: задачи оптимального управления — это выбор наиболее выгодных режимов управления сложными динамическими системами. В данной статье приведено решение задачи оптимального управления, предложенной Е. А. Андреевой и В. М. Цирулёвой в учебном пособии «Вариационное исчисление и методы оптимизации». Для решения задачи был применен принцип максимума Понтрягина.

Ключевые слова: оптимальное управление, краевая задача, система обыкновенных дифференциальных уравнений, принцип максимума Понтрягина.

UDK 517.977.52

E. P. Belousova,
E. A. Lebedeva

OPTIMAL POLICY IN THE FIELD OF ADVERTISING

Abstract: the tasks of optimal control are choosing the most advantageous modes of managing complex dynamic systems. In this paper, we give a solution to the optimal control problem proposed by E. A. Andreeva and V. M. Tsirulova in the training manual «Calculus of Variations and Optimization Methods». To solve the problem, the Pontryagin maximum principle was applied.

Keywords: optimal control, boundary value problem, system of ordinary differential equations, Pontryagin maximum principle.

Введение

Задачи оптимального управления относятся к задачам определения максимальных и минимальных значений, то есть к теории экстремальных задач. В настоящее время признанными фундаментальными принципами теории оптимального управления являются метод динамического программирования и принцип максимума Понтрягина.

Постановка конкретной задачи оптимального управления состоит из нескольких факторов: математической модели управляемого объекта, цели управления или, иначе, критерия качества, различных ограничений на траекторию системы, управляющее воздействие, длительность процесса управления и класс допустимых управлений [4].

Определение 1. *Оптимальной траекторией называется кривая $x(t)$ в $(n + 1)$ -мерном пространстве переменных $t, x_1, \dots, x_n$, по которой движется точка $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ и ее движение описывается дифференциальным уравнением*

$$\dot{x} = f(t, x, u),$$

переводящая начальное состояние $x(t_0) = x_0$ в конечное состояние $x(t_1) = x_1$ под воздействием оптимального управления $u(t)$, доставляющего минимальное значение заданному функционалу

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u) dt.$$

Для решения задач оптимального управления со свободным правым концом и заданным временем применяется прин-

цип максимума Понтрягина. Рассмотрим задачу управления

$$\begin{aligned} x(t) &= f(t, x(t), u(t)), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m, \\ t_0 &\leq t \leq T, \quad x(t_0) = x_0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$J(u) = \varphi(x(T)) \longrightarrow \inf, \quad (2)$$

$$u(t) \in U. \quad (3)$$

Необходимые условия оптимальности, называемые принципом максимума Понтрягина, формулируются следующим образом.

Теорема 1. (принцип максимума Понтрягина) [2]. Пусть $u_0(t)$ — оптимальное управление в задаче (1) — (3), а $x_0(t)$ — соответствующая ему оптимальная траектория. Тогда $u_0(t)$ удовлетворяет условию максимума

$$\max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)). \quad (4)$$

Здесь гамильтониан H определяется равенством

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \psi'(t)f(t, x(t), u(t)),$$

а вектор сопряженных переменных $\psi(t)$ является решением задачи

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)),$$

$$\psi(T) = -\bar{\phi}_x(x_0(T)).$$

Поиск оптимальной траектории с помощью принципа максимума сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $x(t)$, $\psi(t)$. Оптимальная траектория находится среди решений полученной системы. Так как принцип максимума позволяет определить только необходимые условия оптимальности, то для окончательного решения необходимы дополнительные обоснования оптимальности полученных траекторий и управления.

Постановка задачи

Требуется выработать оптимальную политику в области рекламной деятельности, которая стимулирует объем продаж продукта за некоторый промежуток времени при следующих условиях: скорость изменения объема продаж уменьшается пропорционально объему продаж и увеличивается пропорционально уровню рекламной деятельности в той части рынка, которая этим продуктом не насыщена [2]. Задача имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^T x(t) dt &\longrightarrow \max, \\ \dot{x}(t) &= -\alpha x + bu(t) \left[1 - \frac{x(t)}{M} \right], \\ x(t_0) &= S_0, \\ 0 &\leq u(t) \leq A, \end{aligned} \quad (5)$$

где $x(t)$ — объем продаж в единицу времени; $u(t)$ — уровень рекламной деятельности; M — емкость рынка; α , t_0 , T , b , S_0 , A — заданные положительные параметры;

t_0 и T — начальный и конечный моменты времени соответственно;

α — показатель скорости продаж,

b — эффективности рекламной деятельности;

S_0 — начальный объем продаж;

A — максимальный уровень рекламной деятельности.

Решение. Для решения задачи применим принцип максимума Понтрягина. Запишем условия принципа максимума для (5).

1. Минимизируемый функционал примет вид

$$\int_0^T -x(t) dt \longrightarrow \inf. \quad (6)$$

Построим функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(t, x, u, \lambda_0, p(t)) = -\lambda_0 x(t) + p(t) \left(-\alpha x(t) + bu(t) \left[1 - \frac{x(t)}{M} \right] \right),$$

$\lambda_0 = 1$, так как решается задача на минимум. Тогда

$$H(t, x, u, \lambda_0, p(t)) = -x(t) + p(t) \left(-\alpha x(t) + bu(t) \left[1 - \frac{x(t)}{M} \right] \right). \quad (7)$$

2. Запишем условие максимума

$$\begin{aligned}
 & -\bar{x}(t) + p(t) \left(-\alpha \bar{x}(t) + b \bar{u}(t) \left[1 - \frac{\bar{x}(t)}{M} \right] \right) = \\
 & \max_{u \in [0, A]} \left\{ -\bar{x}(t) + p(t) \left(-\alpha \bar{x}(t) + b u(t) \left[1 - \frac{\bar{x}(t)}{M} \right] \right) \right\} = \\
 & -\bar{x}(t) - \alpha \bar{x}(t) p(t) + \max_{u \in [0, A]} \left\{ p(t) b u(t) \left[1 - \frac{\bar{x}(t)}{M} \right] \right\}. \quad (8)
 \end{aligned}$$

По найденному условию можем определить $\bar{u}(t)$

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} A, & \text{если } b p(t) \left[1 - \frac{\bar{x}(t)}{M} \right] > 0, \\ 0, & \text{если } b p(t) \left[1 - \frac{\bar{x}(t)}{M} \right] < 0. \end{cases} \quad (9)$$

3. Запишем сопряженное уравнение

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial x} = 1 + \alpha p(t) + \frac{b \bar{u}(t) p(t)}{M}. \quad (10)$$

4. Условие трансверсальности имеет вид $p(T) = 0$.

На основании пунктов 1—4 составим краевую задачу для принципа максимума, примененного к (5). Она примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\alpha x(t) + b \bar{u}(t) \left[1 - \frac{x(t)}{M} \right], \\ \dot{p}(t) = 1 + \alpha p(t) + \frac{b \bar{u}(t) p(t)}{M}, \\ x(t_0) = S_0, \\ p(T) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

По составленным в системе (11) дифференциальным уравнениям для $x(t)$ и $p(t)$ найдем общий вид траекторий, на которых управление непрерывно. Так как на промежутке $[0, A]$ $u(t)$ согласно (9) принимает только два значения — рассмотрим их.

1. Рассмотрим случай $\bar{u}(t) = A$. Функция объема продаж примет вид

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= -\alpha x(t) + bA \left[1 - \frac{x(t)}{M} \right], \\
 \dot{x}(t) + \left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) x(t) &= bA. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Решим однородное уравнение

$$\dot{x}(t) + \left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) x(t) = 0$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) \int dt$$

$$x_{\text{одн}} = c_1 e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t}.$$

Методом вариации произвольной постоянной [3] найдем частное решение неоднородного уравнения. Согласно этому методу

подставим $x_{\text{чн}} = c_1(t) e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t}$ в исходное уравнение (12) и найдем $c_1(t)$.

$$\begin{aligned}
 & \left(c_1(t) e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t} \right)' + c_1(t) \left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t} = bA \\
 & \dot{c}_1(t) e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t} - c_1(t) \left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t} + c_1(t) \left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t} = bA \\
 & \dot{c}_1(t) = bA e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t} \\
 & \frac{dc_1}{dt} = bA e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t} \\
 & \int dc_1 = \int bA e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t} dt \\
 & c_1(t) = \frac{bAM}{\alpha M + bA} e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t},
 \end{aligned}$$

тогда

$$x_{\text{чн}} = \frac{bAM}{\alpha M + bA} e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t} e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t} = \frac{bAM}{\alpha M + bA}.$$

Запишем общее решение

$$x_{\text{общ}} = x_{\text{одн}} + x_{\text{чн}} = c_1 e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M} \right) t} + \frac{bAM}{\alpha M + bA}. \quad (13)$$

Сопряженное уравнение примет вид:

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= 1 + \alpha p(t) + \frac{bAp(t)}{M}, \\ \dot{p}(t) - \left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)p(t) &= 1.\end{aligned}\quad (14)$$

Решим однородное уравнение

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) - \left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)p(t) &= 0 \\ \int \frac{dp}{p} &= \left(\alpha + \frac{bA}{M}\right) \int dt \\ p_{одн} &= c_2 e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t}.\end{aligned}$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной [3]. Подставим

$$p_{\text{чн}} = c_2(t) e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t} \text{ в исходное уравнение (14) и найдем } c_2(t)$$

$$\begin{aligned}\left(c_2(t) e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t}\right)' - c_2(t) \left(\alpha + \frac{bA}{M}\right) e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t} &= 1 \\ c_2(t) e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t} + c_2(t) \left(\alpha + \frac{bA}{M}\right) e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t} - c_2(t) \left(\alpha + \frac{bA}{M}\right) e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t} &= 1 \\ \dot{c}_2(t) e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t} &= e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t} \\ \frac{dc_2}{dt} &= e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t} \\ \int dc_2 &= \int e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t} dt \\ c_2(t) &= -\frac{M}{\alpha M + bA} e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t},\end{aligned}$$

тогда

$$p_{\text{чн}} = -\frac{M}{\alpha M + bA} e^{-\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t} e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t} = -\frac{M}{\alpha M + bA}.$$

Запишем общее решение

$$p_{\text{общ}} = p_{\text{одн}} + p_{\text{чн}} = c_2 e^{\left(\alpha + \frac{bA}{M}\right)t} - \frac{M}{\alpha M + bA}. \quad (15)$$

2. Рассмотрим случай $\bar{u}(t) = 0$. Функция объема продаж примет вид

$$\dot{x}(t) = -\alpha x(t).$$

Найдем общее решение

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} &= -\alpha \int dt \\ x_{\text{общ}} &= c_3 e^{-\alpha t}.\end{aligned}\quad (16)$$

Сопряженное уравнение примет вид:

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) &= 1 + \alpha p(t) \\ \dot{p}(t) - \alpha p(t) &= 1.\end{aligned}\quad (17)$$

Решим однородное уравнение

$$\begin{aligned}\dot{p}(t) - \alpha p(t) &= 0 \\ \int \frac{dp}{p} &= \alpha \int dt \\ p_{\text{одн}} &= c_4 e^{\alpha t}.\end{aligned}$$

Найдем частное решение неоднородного уравнения методом вариации произвольной постоянной [3]. Подставим $p_{\text{чн}} = c_4(t) e^{\alpha t}$ в исходное уравнение (17) и найдем $c_4(t)$

$$\begin{aligned}(c_4(t) e^{\alpha t})' - \alpha c_4(t) e^{\alpha t} &= 1 \\ \dot{c}_4(t) e^{\alpha t} + \alpha c_4(t) e^{\alpha t} - \alpha c_4(t) e^{\alpha t} &= 1 \\ \dot{c}_4(t) &= e^{-\alpha t} \\ \frac{dc_4}{dt} &= e^{-\alpha t} \\ \int dc_4 &= \int e^{-\alpha t} dt \\ c_4(t) &= -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t},\end{aligned}$$

тогда

$$p_{\text{чн}} = -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} e^{\alpha t} = -\frac{1}{\alpha}.$$

Запишем общее решение

$$p_{\text{общ}} = p_{\text{одн}} + p_{\text{чн}} = c_4 e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha}. \quad (18)$$

Найдем оптимальные траектории при заданном управлении, определенном по (9).

1. Пусть $\bar{u}(t) = A$, $t \in [t_0, T]$, $t_0 = 0$ и согласно (9) должно выполняться условие

$$bp(t) \left[1 - \frac{\bar{x}(t)}{M} \right] > 0. \text{ Найдем решения (13)}$$

и (15) для заданных краевых условий. Краевая задача запишется в виде:

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= c_1 e^{-(\alpha + \frac{bA}{M})t} + \frac{bAM}{\alpha M + bA} \\ \bar{p}(t) &= c_2 e^{(\alpha + \frac{bA}{M})t} - \frac{M}{\alpha M + bA}\end{aligned}\quad (19)$$

$$\bar{x}(t_0) = S_0,$$

$$\bar{p}(T) = 0 \quad (20)$$

Применим условие трансверсальности (20)

$$\begin{aligned}c_2 e^{(\alpha + \frac{bA}{M})T} - \frac{M}{\alpha M + bA} &= 0 \\ c_2 &= \frac{M}{\alpha M + bA} e^{-(\alpha + \frac{bA}{M})T},\end{aligned}$$

тогда запишем $\bar{p}(t)$

$$\bar{p}(t) = \frac{M}{\alpha M + bA} e^{(\alpha + \frac{bA}{M})(t-T)} - \frac{M}{\alpha M + bA} \quad (21)$$

или можем представить в виде

$$\bar{p}(t) = Q e^{(\alpha + \frac{bA}{M})(t-T)} - Q, Q = \frac{M}{\alpha M + bA}. \quad (22)$$

Применим начальное условие (19)

$$\begin{aligned}c_1 + \frac{bAM}{\alpha M + bA} &= S_0 \\ c_1 &= S_0 - \frac{bAM}{\alpha M + bA},\end{aligned}$$

тогда запишем $\bar{x}(t)$

$$\bar{x}(t) = (S_0 - \frac{bAM}{\alpha M + bA}) e^{-(\alpha + \frac{bA}{M})t} + \frac{bAM}{\alpha M + bA}. \quad (23)$$

Проанализируем полученные результаты: оценим сопряженное уравнение $\bar{p}(t)$ (22) по Q :

1. $Q = 0 \Rightarrow \bar{p}(t) = 0$ — принцип максимума ответа не дает.

2. $Q > 0 \Rightarrow \bar{p}(t) = Q \left(e^{(\alpha + \frac{bA}{M})(t-T)} - 1 \right)$. Чтобы про-

анализировать функцию, запишем ее в виде

$$\bar{p}(t) = Q \left(\frac{1}{e^{(\alpha + \frac{bA}{M})(T-t)}} - 1 \right),$$

так как $t \rightarrow T, (T-t) \rightarrow 0$ из чего следует, что

показатель степени $(\alpha + \frac{bA}{M})(T-t) \rightarrow 0$, тог-

да $e^{(\alpha + \frac{bA}{M})(T-t)} \rightarrow 1$ и убывает, а $\frac{1}{e^{(\alpha + \frac{bA}{M})(T-t)}}$ соответственно возрастает к предельному значению 1. При вычитании 1 получим возрастающую, но отрицательную функцию $\bar{p}(t)$.

Из этих рассуждений и соотношения (9) можем сделать выводы об условиях для постоянного $\bar{u}(T) = A$ на всем отрезке:

$$p(t) < 0, \bar{x}(t) > M, t \in [0, T], S_0 < \frac{bAM}{\alpha M + bA} \quad (24)$$

или

$$\begin{aligned}(S_0 - \frac{bAM}{\alpha M + bA}) e^{-(\alpha + \frac{bA}{M})t} + \frac{bAM}{\alpha M + bA} &> M \\ S_0 &< \frac{bAM}{\alpha M + bA} \\ t &\in [0, T].\end{aligned}\quad (25)$$

3. Пусть $\bar{u}(t) = 0, t \in [t_0, T], t_0 = 0$ и согласно (9) должно выполняться условие

$$bp(t) \left[1 - \frac{\bar{x}(t)}{M} \right] < 0.$$

Найдем решения (16) и (18) для заданных краевых условий. Краевая задача запишется в виде

$$\begin{aligned}\bar{x}(t) &= c_3 e^{-\alpha t} \\ \bar{p}(t) &= c_4 e^{\alpha t} - \frac{1}{\alpha} \\ \bar{x}(t_0) &= S_0 \\ \bar{p}(T) &= 0.\end{aligned}\quad (26)$$

Применим условие трансверсальности

$$\begin{aligned}c_4 e^{\alpha T} - \frac{1}{\alpha} &= 0 \\ c_4 &= \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha T},\end{aligned}$$

тогда запишем $\bar{p}(t)$

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha(t-T)} - \frac{1}{\alpha}. \quad (27)$$

Применим начальное условие

$$\begin{aligned}c_3 e^{-\alpha t_0} &= S_0 \\ c_3 &= S_0,\end{aligned}$$

тогда запишем $\bar{x}(t)$

$$\bar{x}(t) = S_0 e^{-at} \quad (28)$$

Проанализируем полученный результат. Рассмотрим сопряженное уравнение

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha(t-T)} - 1).$$

Чтобы проанализировать функцию, запишем ее в виде

$$\bar{p}(t) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{e^{\alpha(T-t)}} - 1 \right),$$

из такой записи видно, что $t \rightarrow T$, $(T-t) \rightarrow 0$ из чего следует, что показатель степени $\alpha(T-t) \rightarrow 0$, тогда $e^{\alpha(T-t)} \rightarrow 1$ и убывает, а $\frac{1}{e^{\alpha(T-t)}}$ соответственно возрастает к предельному значению 1. При вычитании единицы получим возрастающую, но отрицательную функцию $\bar{p}(t)$.

Запишем условия для постоянного $\bar{u}(t) = 0$ на всем отрезке, используя соотношение (9) и полученный выше результат для $\bar{p}(t)$

$$p(t) < 0, \bar{x}(t) < M, t \in [0, T] \quad (29)$$

или

$$S_0 e^{-at} < M \\ t \in [0, T]. \quad (30)$$

Теперь рассмотрим возможность и условия переключения управления в данной задаче. Функция переключения управления имеет вид

$$\varphi(t) = p(t)bu(t) \left[1 - \frac{x(t)}{M} \right]. \quad (31)$$

Так как по результатам, полученным ранее, $p(t) < 0$ на всем отрезке времени $[t_0, T]$, а b — заданный положительный параметр, переключение управления происхо-

дит только в зависимости от $\left[1 - \frac{x(t)}{M} \right]$. По условию максимума (8)

$$p(t)bu(t) \left[1 - \frac{x(t)}{M} \right] \rightarrow \max$$

тогда

$$\left[1 - \frac{x(t)}{M} \right] > 0 \Rightarrow \bar{u}(t) = 0, \quad (32)$$

$$\left[1 - \frac{x(t)}{M} \right] < 0 \Rightarrow \bar{u}(t) = A. \quad (33)$$

Заключение

В ходе решения задачи были получены следующие результаты:

$$\text{если } \left[1 - \frac{x(t)}{M} \right] > 0 \text{ то } \bar{u}(t) = 0,$$

$$\text{если } \left[1 - \frac{x(t)}{M} \right] < 0 \text{ то } \bar{u}(t) = A.$$

В терминах поставленной задачи можно сформулировать полученный результат следующим образом: пока рынок продуктами не насыщен, оптимальной стратегией будет минимальная рекламная деятельность. При насыщении же рынка продуктами рекламная деятельность должна быть максимальной.

При этом максимальное управление возможно при следующих условиях для начального и текущего объема продаж:

$$\left(S_0 - \frac{bAM}{\alpha M + bA} \right) e^{-(\alpha + \frac{bA}{M})t} + \frac{bAM}{\alpha M + bA} > M,$$

$$S_0 < \frac{bAM}{\alpha M + bA},$$

$$t \in [0, T].$$

То есть, начальный объем продаж должен быть меньше определенного уровня, а при максимальном управлении объем продаж всегда превышает емкость рынка.

Минимальное же управление — при условии выполнения полученного соответствия начального объема продаж и емкости рынка

$$S_0 e^{-at} < M,$$

$$t \in [0, T]$$

Все полученные нами теоретические результаты можно достаточно наглядно проиллюстрировать на рисунках и графиках, которые подтверждают их несомненную достоверность.

Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

Рис. 5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева Е. А. Вариационное исчисление и методы оптимизации : учебное пособие / Е. А. Андреева, В. М. Цирулёва. — Тверь : Твер. гос. университет, 2001. — 576 с.

2. Афанасьев В. Н. Математическая теория конструирования систем управления : учеб. для вузов / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. — М. : Высш.шк., 2003. — 614 с.

3. Боровских А. В. Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям / А. В. Боровских, А. И. Перов. — Москва-Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая

динамика». Институт компьютерных исследований, 2004. — 540 с.

4. Колмановский В. Б. Задачи оптимального управления / В. Б. Колмановский // Соросовский образовательный журнал. — 1997. — № 6. — С. 121—127.

Воронежский государственный университет

Белоусова Е. П., кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры системного анализа и управления

E-mail: e.p.belousova@gmail.com

Лебедева Е. А., магистр

E-mail: e.p.belousova@gmail.com