УДК 681.513.8

© 2021 г. **Е.Л. Еремин**, д-р техн. наук
(Амурский государственный университет, Благовещенск)

МЕТОД БОЛЬШОГО КОЭФФИЦИЕНТА УСИЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ САМООРГАНИЗАЦИИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СТРУКТУРНО НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ЛИНЕЙНЫМИ ОБЪЕКТАМИ С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ. I

В классе минимально фазовых линейных объектов, функционирующих в условиях априорной неопределенности и структурных переключений, рассматривается способ построения самоорганизующихся по выходу следящих систем для случая, когда основной контур управления обладает большим коэффициентом усиления. Предполагается, что в произвольные моменты времени порядки числителя и знаменателя передаточной функции объекта могут изменяться скачком в заранее известных границах их допустимых значений. Для решения задачи синтеза самоорганизующейся системы управления объектом с относительной степенью больше единицы в основном контуре системы используется динамический корректор.

Ключевые слова: минимально фазовый линейный объект с переключениями, структурная неопределенность, неявный эталон, регулятор с большим коэффициентом усиления; динамический корректор; расширение пространства состояний, сжатие объема переменных состояния, управляемая динамическая декомпозиция, L -диссипативность, самоорганизующаяся система управления.

DOI: 10.22250/isu.2021.70.95-109

Введение

При разработке алгоритмов управления техническими системами в условиях априорной неопределенности, когда их нормальные режимы функционирования сопровождаются структурными переключениями, а порядки числителя и знаменателя передаточных функций объектов изменяются произвольным образом в заданных пределах, общепринято проектировать само-

организующиеся системы управления [1]. Здесь понятие «самоорганизация», впервые определенное Уильямом Эшби в 1947 г. [2], означает «процесс упорядочения в системе за счет внутренних факторов, без внешнего специфического воздействия».

Как правило, для создания самоорганизующихся систем применяют синергетическую теорию управления [3]. Однако и с помощью кибернетического подхода, для построения систем управления в условиях структурных переключений и неопределенности, можно синтезировать высокоэффективные системы управления, – например, сохраняющих устойчивость при сколь угодно больших коэффициентах усиления [4].

Одно из направлений развития такого подхода, связанное с задачей слежения за эталонным сигналом в условиях априорной неопределенности, рассматривалось в работах [5 – 10], где для систем управления с единичной отрицательной обратной связью было показано, что существование в разомкнутой цепи *строго минимально фазовой системы*¹ с большим коэффициентом усиления χ_0 обеспечивает частотной передаточной функции замкнутой системы $W_{ЗС}(j\omega)$ строгую вещественную положительность:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} W_{ЗС}(j\omega) &= \operatorname{Re} \frac{W_{РС}(j\omega)}{1 + W_{РС}(j\omega)} = \operatorname{Re} \frac{\chi_0 \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)}}{1 + \chi_0 \frac{b(j\omega)}{a(j\omega)}} = \operatorname{Re} \frac{\chi_0 b(j\omega)}{a(j\omega) + \chi_0 b(j\omega)} \cong \\ &\cong \operatorname{Re} \frac{\chi_0 b(j\omega)}{(j\omega + \chi_0) b(j\omega)} = \operatorname{Re} \frac{\chi_0}{j\omega + \chi_0} > 0, \chi_0 \gg 1, \forall \omega > 0. \end{aligned}$$

Важно подчеркнуть, что в этом случае замыкание строго минимально фазовой разомкнутой системы произвольного порядка с большим коэффициентом усиления позволяет существенно упростить структуру основного контура управления, поскольку математические модели замкнутой системы и апериодического звена первого порядка оказываются адекватными. При этом понижение порядка или сжатие объема переменных состояния замкнутой системы соответствует ее структурной самоорганизации.

Таким образом, строгая вещественная положительность частотной передаточной функции замкнутой системы управления – это необходимое и достаточное условие ее самоорганизации, позволяющее гарантированно обеспечивать достижение поставленных целей в условиях структурно параметрической неопределенности.

¹ Записанная в изображениях Лапласа передаточная функция разомкнутой системы $W_{РС}(s) = b(s)/a(s)$ называется строго минимально фазовой, если ее относительная степень $\rho = \deg a(s) - \deg b(s) = n - (n - 1) = 1$, а полином $b(s)$ – гурвицев с положительным старшим коэффициентом, где s – комплексная переменная; n – порядок системы; $a(s)$ – нормированный полином с произвольным расположением корней.

Если же разомкнутая система является нестрого минимально фазовой, т.е. ее относительная степень $\rho > 1$, то для построения самоорганизующихся систем управления на основе метода большого коэффициента усиления необходимо *модифицировать* исходную схему регулирования, – например, с помощью: компенсаторов, наблюдателей или фильтров [11 – 18]; разделения движений [19]; расширения ошибки [20]; алгоритмов адаптации высокого порядка [21 – 24] и других подходов [25 – 30].

Центральный результат данной статьи заключается в построении самоорганизующейся системы управления нестрого минимально фазовым *объектом с переключениями* (ОсП) при условии, что в основном контуре системы к выходу *пропорционального регулятора* (ПР) с большим коэффициентом усиления подключен *динамический корректор* (ДК), состоящий из последовательно соединенных малоинерционных упругих звеньев. При разработке самоорганизующейся системы используется принцип «расширения – сжатия» связанный, во-первых, с расширением пространства переменных состояния разомкнутой системы управления, осуществляемом с помощью добавления такого количества переменных, которого будет достаточно для достижения поставленной цели управления, и, во-вторых, за счет сжатия объема переменных состояния замкнутой системы (снижения порядка), которому предшествует этап декомпозиции диссипативной структуры разомкнутой системы путем ее разбиения на быстрые и медленные подсистемы.

Математическое описание элементов системы управления

На рис. 1 изображена система управления, где за счет введения ДК в основной контур пространство переменных состояния как разомкнутой, так и замкнутой систем оказывается расширенным; здесь же приняты следующие обозначения: $r(t)$ – задающий сигнал; $u(t)$ – сигнал управления; $e(t)$ – ошибка слежения; $\mu(t)$ – выход ДК; $f(t)$ – внешнее возмущение; $\theta(t)$ и $y(t)$ – соответственно вход и выход ОсП.

Рис. 1. Схема линейной системы управления.

Предполагается, что ОсП описывается уравнением

$$y(s) = W(s)\theta(s) = \frac{b(s)}{a(s)}\theta(s) = \frac{b_0s^m + b_1s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n}\theta(s), \quad (1)$$

где $y(s)$, $\theta(s)$ – изображения Лапласа переменных $y(t)$ и $\theta(t)$; $W(s)$ – передаточная функция ОсП; $a(s)$ и $b(s)$ – полиномы порядка n и m .

Пусть для ОсП выполнены следующие условия.

Допущение 1. Полином $b(s)$ является гурвицевым.

Допущение 2. Порядки n и m – априорно неизвестны, но их значения не нарушают справедливость условия $0 \leq m \leq n - 1$.

Допущение 3. Относительная степень $\rho = n - m \geq 1$ ограничена величиной $\bar{\rho} = \max \rho = \bar{n} - \underline{m}$, где $\bar{\rho}$, $\bar{n}$ и $\underline{m}$ – известные числа, соответственно максимальные и минимальное.

Допущение 4. Коэффициенты передаточной функции $W(s)$ неизвестны, но их значения принадлежат известным диапазонам.

Допущение 5. Возмущающее воздействие $f(t)$ и задающий сигнал $r(t)$ – гладкие ограниченные функции.

Допущение 6. Измерению доступна регулируемая переменная $y(t)$, но не ее производные.

Если закон управления ПР, аналогично [5, 13], задать уравнением

$$u(t) = \chi_0 e(t) = \chi_0 (r(t) - y(t)), \quad (2)$$

где $\chi_0 = \text{const} \gg 0$ – достаточно большой коэффициент усиления, то желаемая динамика *неявного эталона* (НЭ) определится соотношениями

$$y_m(s) = W_{\text{НЭ}}(s)r(s), \quad W_{\text{НЭ}}(s) \cong \frac{\chi_0}{s + \chi_0} = \frac{1}{\chi_0^{-1}s + 1}, \quad y_m(t) \cong r(t). \quad (3)$$

Пусть ДК (с учетом допущения 3) описывается уравнением последовательного соединенных k -упругих звеньев первого порядка

$$\mu(s) = W_{\text{ДК}}(s)u(s) = \frac{d(s)}{c(s)}u(s) = \left(\frac{Ts + 1}{T_*s + 1} \right)^k u(s), \quad k = \bar{\rho} - 1, \quad (4)$$

где T_* и T – известные постоянные времени.

Постановка задачи

В условиях структурной неопределенности и переключений самоорганизующейся системы управления (1), (2), (4) *требуется* таким образом определить значения постоянных времени T_* , T , коэффициента усиления χ_0 и числа k (количество упругих звеньев в ДК), чтобы при ограниченности всех сигналов в L -диссипативной замкнутой системе имело бы место выполнение целевого неравенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |r(t) - y(t)| \cong \lim_{t \rightarrow \infty} |y_m(t) - y(t)| \leq \Delta_0 = \text{const}, \quad (5)$$

где $\Delta_0 > 0$ – достаточно малая величина.

Самоорганизация системы управления ОсП с постоянной относительной степенью

В первой части настоящей статьи рассматривается частный случай функционирования системы управления (1), (2), (4), когда в условиях структурной неопределенности относительная степень ОсП (1), в силу $\rho_* \equiv \bar{\rho}$, является известной и постоянной величиной $\rho = n - m = \rho_*$, что позволяет записать модель ДК (4) в упрощенном виде:

$$\mu(s) = W_{\text{ДК}}(s)u(s) = \frac{d(s)}{c(s)}u(s) = \left(\frac{Ts + 1}{T_*s + 1} \right)^k u(s), \quad k = \rho_* - 1 = \text{const}. \quad (6)$$

Покажем, что в самоорганизующейся системе управления (1), (2), (6), за счет выбора соответствующих значений T_* , T , χ_0 , k , а также реорганизации прямых и обратных связей, разнотемповой декомпозиции, сжатия объема переменных состояния, можно обеспечить достижение цели управления (5).

Расширение пространства состояний

Поскольку система управления (1), (2), (6) описывается уравнениями:

$$y(s) = W_{\text{РС}}(s)e(s) = \frac{\chi_0 \alpha(s)}{c(s)a(s)}e(s), \quad \alpha(s) = d(s)b(s) = \alpha_0 s^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1}, \quad (7)$$

$$y(s) = W_{\text{ЗС}}(s)r(s) = \frac{\chi_0 \alpha(s)}{\beta(s)}r(s), \quad \beta(s) = c(s)a(s) + \chi_0 \alpha(s), \quad (8)$$

следовательно, за счет введения корректора в основной контур системы, величина расширения пространства переменных состояний при любых n и m , учитывая $\rho_* \equiv \bar{\rho}$, – это известное число $k = \rho_* - 1 = n - m - 1 = \text{const}$.

Устойчивость и L -диссипативность

Если характеристическое уравнение передаточной функции замкнутой системы (8) записать в развернутом виде

$$\begin{aligned} \beta(s) = & \left(T_*^k s^k + \sum_{i=1}^{k-1} q_i T_*^{k-i} s^{k-i} + 1 \right) (s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n) + \chi_0 \alpha(s) = \\ & = T_*^k s^{k+n} + T_*^{k-1} \{q_1 + T_* a_1\} s^{k+n-1} + \dots + \\ & + T_* \{q_{k-1} + q_{k-2} T_* a_1 + \dots + T_*^{k-1} a_{k-1}\} s^{n+1} + \\ & + \{1 + q_{k-1} T_* a_1 + q_{k-2} T_*^2 a_2 + \dots + T_*^k a_k\} s^n + \\ & + \chi_0 \{ \alpha_0 + \chi_0^{-1} \alpha_1 + \chi_0^{-1} \alpha_2 q_{k-1} T_* + \chi_0^{-1} \alpha_3 q_{k-2} T_*^2 + \dots \} s^{n-1} + \\ & + \chi_0 \{ \alpha_1 + \chi_0^{-1} \alpha_2 + \chi_0^{-1} \alpha_3 q_{k-1} T_* + \chi_0^{-1} \alpha_4 q_{k-2} T_*^2 + \dots \} s^{n-2} + \\ & + \dots + \chi_0 \{ \alpha_{n-2} + \chi_0^{-1} \alpha_{n-1} + \chi_0^{-1} \alpha_3 q_{k-1} T_* \} s + \chi_0 \{ \alpha_{n-1} + \chi_0^{-1} \} \alpha_n, \end{aligned} \quad (9)$$

здесь $\alpha(s)$ – гурвицев полином из (7); q_i – соответствующее число сочетаний

$$q_1 = q_{k-1} = \frac{k!}{(k-1)!1!} = k, \quad q_2 = q_{k-2} = \frac{k!}{(k-2)!2!} = \frac{k(k-1)}{2}, \dots, \quad (10)$$

и задать постоянные T_* и χ_0^{-1} существенно малыми величинами, то значения всех коэффициентов (см. выражения в правой части (9), выделенные фигурными скобками) окажутся близки, с достаточной точностью, к числовым значениям следующих коэффициентов:

$$\begin{cases} (q_1 + T_* a_1) \cong q_1, \dots, \\ (q_{k-1} + q_{k-2} T_* a_1 + \dots + T_*^{k-1} a_{k-1}) \cong q_{k-1}, \\ (1 + q_{k-1} T_* a_1 + q_{k-2} T_*^2 a_2 + \dots + T_*^k a_k) \cong 1, \\ (\alpha_0 + \chi_0^{-1} \alpha_1 + \chi_0^{-1} \alpha_2 q_{k-1} T_* + \chi_0^{-1} \alpha_3 q_{k-2} T_*^2 + \dots) \cong \alpha_0, \\ (\alpha_1 + \chi_0^{-1} \alpha_2 + \chi_0^{-1} \alpha_3 q_{k-1} T_* + \chi_0^{-1} \alpha_4 q_{k-2} T_*^2 + \dots) \cong \alpha_1, \dots, \\ (\alpha_{n-2} + \chi_0^{-1} \alpha_{n-1} + \chi_0^{-1} \alpha_3 q_{k-1} T_*) \cong \alpha_{n-2}, \\ (\alpha_{n-1} + \chi_0^{-1} \alpha_n) \cong \alpha_{n-1}. \end{cases} \quad (11)$$

При этом, за счет введения новых обозначений

$$\begin{aligned} \beta_{00} &= T_*^k, \quad \beta_{01} = T_*^{k-1} q_1, \quad \dots, \quad \beta_{0(k-2)} = T_*^2 q_{k-2}, \quad \beta_{0(k-1)} = T_* q_{k-1}, \\ \beta_{0k} &= 1, \quad \beta_{0(k+1)} = \chi_0 \alpha_0, \quad \beta_{0(k+2)} = \chi_0 \alpha_1, \quad \dots, \quad \beta_{0(k+n)} = \chi_0 \alpha_{n-1} \end{aligned} \quad (12)$$

полином (9) можно представить в компактной форме записи

$$\begin{aligned} \beta(s) &\cong T_*^k s^{k+n} + T_*^{k-1} q_1 s^{k+n-1} + \dots + T_*^2 q_{k-2} s^{n+2} + T_* q_{k-1} s^{n+1} + \\ &+ s^n + \chi_0 \alpha_0 s^{n-1} + \chi_0 \alpha_1 s^{n-2} + \dots + \chi_0 \alpha_{n-2} s + \chi_0 \alpha_{n-1} = \sum_{j=0}^{k+n} \beta_{0j} s^{k+n-j}. \end{aligned} \quad (13)$$

Теперь, опираясь на соотношения (12), (13), осуществим поиск условий, обеспечивающих устойчивость системы управления (1), (2), (6). С этой целью можно воспользоваться так называемыми коэффициентами устойчивости, определив их вид, подобно [29], следующим образом:

$$\lambda_\mu = \frac{\beta_{0(\mu-1)} \beta_{0(\mu+2)}}{\beta_{0\mu} \beta_{0(\mu+1)}}, \quad \mu = \overline{1, k+n-1}. \quad (14)$$

Известно [31], что достаточным условием гурвицевости полинома (12) для любых μ является существование оценок

$$\lambda_\mu \leq 0.465, \quad \mu = \overline{1, k+n-1}. \quad (15)$$

Поскольку коэффициенты β_{0i} , $i = 0, 1, \dots, k$ полинома (13) тождественно равны коэффициентам гурвицева полинома $c(s)$ (см. знаменатель передаточной функции (6)), то коэффициенты устойчивости λ_μ , $\mu = 1, 2, \dots, (k-1)$ не требуют рассмотрения, так как они будут всегда сформированы только из коэффициентов β_{0i} . Аналогичная ситуация возникает у полинома (13) и в

случае с коэффициентами устойчивости λ_ν , $\nu = (k + 2), \dots, (k + n - 1)$, которые также можно будет опустить из рассмотрения, поскольку в их формировании участвуют только коэффициенты β_{0j} , $j = k, \dots, (k + n)$, полностью совпадающие с коэффициентами гурвицева полинома $\alpha(s)$ (см. числитель передаточной функции (7)).

Следовательно, гурвицевость полинома (13) зависит от значений только двух коэффициентов устойчивости:

$$\lambda_k = \frac{\beta_{0(k-2)}\beta_{0(k+1)}}{\beta_{0(k-1)}\beta_{0k}} = \frac{T_*^2 q_{k-2}}{T_* q_{k-1}} \cdot \frac{\chi_0 \alpha_0}{1} \text{ и } \lambda_{k+1} = \frac{\beta_{0(k-1)}\beta_{0(k+2)}}{\beta_{0k}\beta_{0(k+1)}} = \frac{T_* q_{k-1}}{1} \cdot \frac{\chi_0 \alpha_1}{\chi_0 \alpha_0},$$

которые, с учетом (10), (12), (14) и (15), должны удовлетворять оценкам

$$\lambda_k = T_* \chi_0 \alpha_0 \frac{k-1}{2} \leq 0.465, \quad \lambda_{k+1} = T_* k \frac{\alpha_1}{\alpha_0} \leq 0.465,$$

т.е. при $k > 1$ значения параметров T_* и χ_0^{-1} надо выбирать из условий

$$T_* \leq \frac{0.93}{\alpha_0(k-1)} \chi_0^{-1}, \quad T_* \leq \frac{0.465 \alpha_0}{\alpha_1 k}, \quad (16)$$

что и требовалось определить.

Поскольку для устойчивости системы управления (1), (2), (6) достаточно, чтобы при задании существенно малых значений постоянных T_* и χ_0^{-1} были выполнены требования (16), то при ограниченных входных воздействиях $r(t)$ все выходные реакции системы управления (1), (2), (6) будут также ограничены. Следовательно, согласно [32], система (1), (2), (6) является *диссипативной по Левинсону*, или *L-диссипативной*, так как все ее траектории с течением времени входят в некоторое ограниченное множество и остаются в нем при $t \rightarrow \infty$.

Декомпозиция и сжатие объема переменных состояния

В результате расширения пространства состояний замкнутой системы управления (1), (2), (6) порядки числителя и знаменателя передаточной функции (8) соответственно будут равны $\deg \alpha(s) = n - 1$, $\deg \beta(s) = 2n - m - 1$, а выбор существенно малой постоянной времени T_* сократит порядок полинома $\beta(s)$ в выражении (13) до величины

$$\deg \beta(s) = \deg \alpha(s) + 1. \quad (17)$$

Действительно, поскольку величина T_* , удовлетворяющая ограничениям (16), должна быть еще и достаточно малой (см. п. 3.2), причем настолько, что в комплексной плоскости $(n - m - 1)$ корней полинома (13) будут смещены существенно влево от мнимой оси. В результате это позволит опустить из рассмотрения $(n - m - 1)$ переменных и, учитывая

$$\deg \beta(s) \rightarrow (2n - m - 1) - (n - m - 1) = n,$$

представить явный вид полинома следующим образом:

$$\beta(s) \cong s^n + \chi_0 \alpha(s) = s^n + \chi_0 (\alpha_0 s^{n-1} + \alpha_1 s^{n-2} + \dots + \alpha_{n-2} s + \alpha_{n-1}), \quad (18)$$

здесь n – число *ведущих фазовых координат* (так называемых *параметров порядка*), выделенных из множества переменных системы и формирующих процессы самоорганизации.

Итак, путем целенаправленной разнотемповой декомпозиции системы (1), (2), (6), т.е. выделения медленных и быстрых подсистем, замкнутую L -диссипативную систему можно будет описать уравнением

$$y(s) = W_{3C}(s)r(s) \cong \frac{\chi_0 \alpha(s)}{\beta(s)} r(s) = \frac{\chi_0 \alpha(s)}{s^n + \chi_0 \alpha(s)} r(s). \quad (19)$$

Более того, как показано в работах [4, 5], из-за наличия достаточно большого значения χ_0 и принципиального изменения положения n корней полинома (18) в комплексной плоскости, когда значения его $(n - 1)$ корней будут совпадать со значениями корней полинома $\alpha(s)$, а n -й корень станет равен величине $s_n = -\chi_0$, окажется справедливым соотношение

$$s^n + \chi_0 \alpha(s) \cong (s + \chi_0) \alpha(s), \quad (20)$$

что в результате позволит передаточную функцию (19) преобразовать к эквивалентному виду, совпадающему с передаточной функции НЭМ (3), т.е.

$$y(s) = W_{3C}(s)r(s) \cong \frac{\chi_0}{s + \chi_0} r(s). \quad (21)$$

Таким образом, выполнение требований (16) и наличие в системе (1), (2), (6) достаточно малых значений параметров T^* и χ_0^{-1} обеспечивают как максимальное сжатие объема переменных состояния, так и выполнение целевого неравенства (5).

Эквивалентные модели ОсП

Предваряя вычислительный эксперимент и анализ динамических характеристик самоорганизующейся системы управления, рассмотрим эквивалентные варианты математического описания ОсП (1), ориентированные на применение программной среды MatLab-Simulink.

Предположим, что функционирование ОсП (1) протекает в условиях априорной неопределенности и при наличии структурно-параметрических переключений в некоторые моменты времени $t_q = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{\text{кон}}$, на в интервале $t_q \in [t_{\text{нач}}, t_{\text{кон}}]$, где q – число переключений, включая и начальный момент времени $t_0 = t_{\text{нач}} = 0$.

Рассматривая случай, когда относительная степень и порядки ОсП (1)

удовлетворяют соотношениям

$$\rho_* = n - m = 2, \quad n \leq \bar{n} = 4, \quad m \geq \underline{m} = 0, \quad (22)$$

а также выделяя (для определенности) моменты времени t_0 , t_1 и t_2 , будем полагать, что значения переключаемых коэффициентов в передаточной функции (1) принадлежат диапазонам:

$$\begin{aligned} b_0^- \leq b_0(t_q) \leq b_0^+; \quad b_1^- \leq b_1(t_q) \leq b_1^+; \quad b_2^- \leq b_2(t_q) \leq b_2^+, \quad a_0^- \leq a_0(t_q) \leq a_0^+; \\ a_1^- \leq a_1(t_q) \leq a_1^+; \quad a_2^- \leq a_2(t_q) \leq a_2^+; \quad a_3^- \leq a_3(t_q) \leq a_3^+; \quad q = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (23)$$

Следовательно, при любых кусочно-постоянных коэффициентах $b_2(t_q), b_1(t_q), b_0(t_q), a_3(t_q), a_2(t_q), a_1(t_q), a_0(t_q)$, $q = 0, 1, 2$ модель ОсП (1) на выделенных интервалах времени будет описываться уравнениями:

при $t_0 \leq t < t_1$,

$$y(s) = W_1(s)\theta(s) = \frac{b_2(t_0)s^2 + b_1(t_0)s + b_0(t_0)}{s^4 + a_3(t_0)s^3 + a_2(t_0)s^2 + a_1(t_0)s + a_0(t_0)}\theta(s); \quad (24)$$

при $t_1 \leq t < t_2$,

$$y(s) = W_2(s)\theta(s) = \frac{b_0(t_1)}{s^2 + a_1(t_1)s + a_0(t_1)}\theta(s); \quad (25)$$

при $t_2 \leq t < t_k$,

$$y(s) = W_3(s)\theta(s) = \frac{b_1(t_2)s + b_0(t_2)}{s^3 + a_2(t_2)s^2 + a_1(t_2)s + a_0(t_2)}\theta(s). \quad (26)$$

Однако передаточные функции (24) – (26), записанные в изображениях Лапласа, обладают *разными* порядками $n = 4, 2, 3$, но имеют *равные* относительные степени $\rho = 2$, поэтому целесообразно за счет перехода к эквивалентным передаточным функциям в операторной форме записать их таким образом, чтобы не только относительные степени, но и порядки передаточных функций были равными. Покажем, что можно получить при $n = 4$:

1) поскольку порядок передаточной функции в уравнении (24) $n = 4$, структура эквивалентного операторного уравнения остается прежней:

при $t_0 \leq t < t_1$,

$$y(t) = \tilde{W}_1(p)\theta(t) = \frac{\tilde{b}_2(t_0)p^2 + \tilde{b}_1(t_0)p + \tilde{b}_0(t_0)}{p^4 + \tilde{a}_3(t_0)p^3 + \tilde{a}_2(t_0)p^2 + \tilde{a}_1(t_0)p + \tilde{a}_0(t_0)}\theta(t), \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_2(t_0) = b_2(t_0), \quad \tilde{b}_1(t_0) = b_1(t_0), \quad \tilde{b}_0(t_0) = b_0(t_0), \quad \tilde{a}_3(t_0) = a_3(t_0), \\ \tilde{a}_2(t_0) = a_2(t_0), \quad \tilde{a}_1(t_0) = a_1(t_0), \quad \tilde{a}_0(t_0) = a_0(t_0), \end{aligned} \quad (28)$$

здесь обозначения с символом $(\sim)$ в виде $\tilde{W}_{(\cdot)}(p)$ и $\tilde{b}(\cdot)$, $\tilde{a}(\cdot)$ отражают их отношение к передаточным функциям и коэффициентам эквивалентных систем; $p = d/dt$ – оператор дифференцирования;

2) так как в уравнении (25) порядок $n = 2$, а в эквивалентном уравнении нужен порядок $n = 4$, запишем передаточную функции уравнения (25) в операторной форме и введем в ее числитель и знаменатель сомножители из полиномов второго порядка, – например, в виде $(p + 1)^2$. Тогда, учитывая, что одновременное включение или исключение одинаковых нулей и полюсов в передаточной функции системы не изменяет ее динамику, уравнение (25) опишем в эквивалентном виде:

при $t_1 \leq t < t_2$,

$$y(t) = \tilde{W}_2(p)\theta(t) = \frac{b_0(t_1)}{p^2 + a_1(t_1)p + a_0(t_1)} \cdot \frac{(p+1)^2}{(p+1)^2} \theta(t) = \quad (29)$$

$$= \frac{\tilde{b}_2(t_1)p^2 + \tilde{b}_1(t_1)p + \tilde{b}_0(t_1)}{p^4 + \tilde{a}_3(t_1)p^3 + \tilde{a}_2(t_1)p^2 + \tilde{a}_1(t_1)p + \tilde{a}_0(t_1)} \theta(t),$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_2(t_1) &= b_0(t_1), \quad \tilde{b}_1(t_1) = 2b_0(t_1), \quad \tilde{b}_0(t_1) = b_0(t_1), \quad \tilde{a}_3(t_1) = a_1(t_1) + 1, \\ \tilde{a}_2(t_1) &= a_0(t_1) + a_1(t_1) + 1, \quad \tilde{a}_1(t_1) = a_0(t_1) + a_1(t_1), \quad \tilde{a}_0(t_1) = a_0(t_1); \end{aligned} \quad (30)$$

3) поскольку порядок передаточной функции в уравнении (26) $n = 3$, то для построения ее эквивалентной передаточной функции в виде уравнения порядка $n = 4$ (аналогично способу формирования передаточной функции уравнения (28)) в числитель и знаменатель передаточной функции уравнения (26) достаточно ввести сомножители из полиномов $(p + 1)$, что в результате даст следующее уравнение:

при $t_2 \leq t < t_{\text{кон}}$,

$$y(t) = \tilde{W}_3(p)\theta(t) = \frac{b_1(t_2)s + b_0(t_2)}{s^3 + a_2(t_2)s^2 + a_1(t_2)s + a_0(t_2)} \cdot \frac{(p+1)}{(p+1)} \theta(t) = \quad (31)$$

$$= \frac{\tilde{b}_2(t_2)p^2 + \tilde{b}_1(t_2)p + \tilde{b}_0(t_2)}{p^4 + \tilde{a}_3(t_2)p^3 + \tilde{a}_2(t_2)p^2 + \tilde{a}_1(t_2)p + \tilde{a}_0(t_2)} \theta(t),$$

$$\begin{aligned} \tilde{b}_2(t_2) &= b_1(t_2), \quad \tilde{b}_1(t_2) = b_1(t_2) + b_0(t_2), \quad \tilde{b}_0(t_2) = b_0(t_2), \quad \tilde{a}_3(t_2) = a_2(t_2) + 1, \\ \tilde{a}_2(t_2) &= a_2(t_2) + a_1(t_2), \quad \tilde{a}_1(t_2) = a_1(t_2) + a_0(t_2), \quad \tilde{a}_0(t_2) = a_0(t_2). \end{aligned} \quad (32)$$

Таким образом, уравнения с передаточными функциями (24) – (26), записанные в изображениях Лапласа и уравнения с передаточными функциями (27) – (32), представленные в операторной форме (см. выделенные цветом), при наличии разных порядков, тем ни менее, являются полностью эквивалентными и описываются уравнениями

$$y(t) = \frac{\tilde{b}_2(t_q)p^2 + \tilde{b}_1(t_q)p + \tilde{b}_0(t_q)}{p^4 + \tilde{a}_3(t_q)p^3 + \tilde{a}_2(t_q)p^2 + \tilde{a}_1(t_q)p + \tilde{a}_0(t_q)} \theta(t), \quad q = 0, 1, 2, \quad (33)$$

которые в векторно-матричной форме имеют вид

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t_q)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t_q)u(t) + \mathbf{f}(t), \quad y(t) = \mathbf{g}^T \mathbf{x}(t), \quad q = 0, 1, 2, \quad (34)$$

где $\mathbf{x}(t) \in R^4$ – вектор состояния; $u(t) \in R$ – выход ПР; $\mathbf{f}(t) \in R^4$ – вектор возмущения; $y(t) \in R$ – выход ОсП; $\mathbf{A}(t_q)$, $\mathbf{b}(t_q)$ – набор постоянных матриц и векторов; $\mathbf{g}$ – постоянный вектор. При этом, учитывая обозначения (28), (30) и (32), матрицы $\mathbf{A}(t_q)$ и векторы $\mathbf{b}(t_q)$ описываются следующим образом:

$$\mathbf{A}(t_q) = \begin{pmatrix} \tilde{a}_3(t_q) & 1 & 0 & 0 \\ \tilde{a}_2(t_q) & 0 & 1 & 0 \\ \tilde{a}_1(t_q) & 0 & 0 & 1 \\ \tilde{a}_0(t_q) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b}(t_q) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{b}_2(t_q) \\ \tilde{b}_1(t_q) \\ \tilde{b}_0(t_q) \end{pmatrix}, q = 0, 1, 2. \quad (35)$$

Вычислительный эксперимент

Рассматривая иллюстративный пример самоорганизующейся системы управления, будем полагать, что явный вид S -модели ОсП (1) определен уравнениями (24) – (26), коэффициенты которых, принадлежащие диапазонам

$$\begin{aligned} 1 \leq b_0(t_q) \leq 5; \quad 2 \leq b_1(t_q) \leq 7; \quad 2.1 \leq b_2(t_q) \leq 2.4, \quad -1 \leq a_0(t_q) \leq 1; \\ -2 \leq a_1(t_q) \leq 2.5; \quad -2 \leq a_2(t_q) \leq 2; \quad 0 \leq a_3(t_q) \leq 3, \quad q = 0, 1, 2, \end{aligned} \quad (35)$$

были заданы произвольным образом со значениями

$$\begin{aligned} b_2(t_0) = 2.4, \quad b_1(t_0) = 2.2, \quad b_0(t_0) = 2, \quad a_3(t_0) = 1.5, \quad a_2(t_0) = -2, \\ a_1(t_0) = -1.5, \quad a_0(t_0) = 1; \quad b_0(t_1) = 2.1, \quad a_1(t_1) = -1, \quad a_0(t_1) = -1; \\ b_1(t_2) = 2.3, \quad b_0(t_2) = 4.6, \quad a_2(t_2) = -1, \quad a_1(t_2) = 3, \quad a_0(t_2) = -1. \end{aligned} \quad (36)$$

В такой ситуации, учитывая соотношения (28), (30), (32), эквивалентный вид S -модели ОсП (24) – (26) окончательно можно представить в векторно-матричной форме записи (34), со следующими матрицами и векторами:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(t_0) = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1.5 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.4 \\ 2.2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b}(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.1 \\ 4.2 \\ 2.1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}(t_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.3 \\ 6.9 \\ 4.6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (37) \\ \mathbf{g}^T = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 0). \end{aligned}$$

В рассматриваемой самоорганизующейся системе управления также используются S -модели ПР (2) и ДК (6), описываемые уравнениями:

$$u(t) = \chi_0 e(t), \quad \mu(t) = \frac{Tp+1}{T_*p+1} u(t), \quad (38)$$

$$\chi_0 = 500, \quad T = 0.5 \text{ с}, \quad T_* = 0.001 \text{ с},$$

где значения χ_0 , T_* выбраны согласно требованиям (16) и уточнялись, совместно со значением T , на этапе имитационного моделирования.

Пусть задающий сигнал $r(t)$ в самоорганизующейся системе управления (34), (37), (38) в режимах стабилизации и слежения соответственно имеет вид

$$r(t) = 1(t), \quad (39)$$

$$r(t) = 0.6 \sin(2\pi t) + 0.5 \sin(3\pi t),$$

а внешнее периодическое возмущение описывается уравнением

$$f(t) = 0.3 \sin(\pi t) + 0.2 \sin(1.5\pi t). \quad (40)$$

Результаты моделирования самоорганизующейся системы (34), (37), (38) – (40) при начальных условиях $x_1(0) = x_2(0) = 1$, $x_3(0) = x_4(0) = 0$, полученные с помощью программной среды MatLab-Simulink в режимах как стабилизации (с переключениями в моменты $t_1 = 2.5$ (с), $t_2 = 4.6$ (с)), так и слежения (с переключениями в моменты $t_1 = 1.45$ (с), $t_2 = 2.6$ (с)), изображены соответственно на рис. 2 и рис. 3.

Рис. 2. Динамические процессы самоорганизующейся системы управления (34), (37), (38) – (40) в режиме стабилизации.

Рис. 3. Динамические процессы самоорганизующейся системы управления (34), (37), (38) – (40) в режиме слежения.

Как следует из графиков на рис. 2 и 3, величина установившейся ошибки $e(t) = r(t) - y(t)$ в самоорганизующейся системе управления (34), (37), (38) – (40), за исключением коротких и ограниченных всплесков $e(t)$ в моменты переключений, на каждом временном интервале не превышает 1% (рис. 2b) при стабилизации и 2% (рис. 3b) – при слежении.

Заключение

Построение самоорганизующейся системы управления нестрого минимально фазовым объектом с переключениями за счет использования в основном контуре малоинерционного динамического корректора и регулятора с большим коэффициентом усиления показало, что в рамках кибернетического подхода можно синтезировать высокоэффективные системы управления. Достоинство предлагаемых систем управления, функционирующих в условиях априорной неопределенности, наличия переключений и действия ограниченных возмущений, состоит в обеспечении достаточно малых ошибок в режимах стабилизации и слежения.

Преобразование структурно и параметрически неопределенных моделей линейных объектов с одинаковой относительной степенью к их эквива-

лентным моделям, содержащим только параметрическую неопределенность, что имеет самостоятельного значение, позволило упростить этап имитационного моделирования системы управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1972.
2. Ashby W.R. Principles of the Self-Organizing Dynamic System // Journal of General Psychology. – 1947. – Vol. 37. – P. 125-128.
3. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. – М.: Энергоатомиздат, 1994.
4. Мееров М.В. Синтез структур систем автоматического регулирования высокой точности. – М.: Наука, 1967.
5. Фрадков А.Л. Синтез адаптивной системы стабилизации линейного динамического объекта // Автоматика и телемеханика. – 1974. – №12. – С. 96-103.
6. Фрадков А.Л. Метод синтеза алгоритмов адаптивной стабилизации линейного многосвязного динамического объекта // Вопросы кибернетики. Адаптивные системы. – М.: Наука, 1976. – С. 81-84.
7. Якубович В.А. Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования // ДАН СССР. –1962. – Т. 143, №6. – С. 1304-1307.
8. Еремин Е.Л., Цыкунов А.М. Синтез адаптивной системы стабилизации для одного класса линейных многосвязных динамических объектов с запаздыванием // Анализ и синтез высококачественных систем управления. – Фрунзе: Фрунз. политех. ин-т, 1977. – С. 22-27.
9. Андриевский Б.Р. Синтез адаптивных систем слежения с неявной моделью методом матричных неравенств // Оптимальные и адаптивные системы. – Фрунзе: Фрунз. политех. ин-т, 1979. – С. 20-35.
10. Фрадков А.Л. Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. – М.: Наука, 1990.
11. Бобцов А.А. Робастное управление по выходу линейной системой с неопределенными коэффициентами // Автоматика и телемеханика. – 2002. – № 21. – С.108-117.
12. Еремин Е.Л. L-диссипативность гиперустойчивой системы управления при структурном возмущении. II // Информатика и системы управления. – 2007. – № 1(13). – С. 86-95.
13. Еремин Е.Л., Чепак Л.В. Робастная система управления аффинным объектом в схеме с двумя эталонными моделями // Информатика и системы управления. – 2014. – № 3(41). – С.121-129.
14. Еремин Е.Л., Шеленок Е.А. Комбинированная адаптивная система управления структурно-параметрически неопределенным нелинейным объектом периодического действия // Информатика и системы управления. – 2015. – № 2(44). – С.99-109.
15. Борцов Ю.А., Поляхов Н.Д., Путов В.В. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением. – Л.: Энергоатомиздат, 1984.
16. Краснова С.А. Каскадный синтез наблюдателя состояния для нелинейных систем при наличии внешних возмущений // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 1. – С.31-54.

17. *Lee K.W., Khalil H.K.* Adaptive output feedback control of robot manipulators using high-gain observers // *Int. J. Control.* – 1997. – Vol. 67. – P.869-886.
18. *Oh S., Khalil H.K.* Nonlinear output feedback tracking using high-gain observer and variable structure control // *Automatica.* – 1997. – Vol. 33. – P.1845-1856.
19. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах: беспоисковые методы. – М.: Наука, 1990.
20. *Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Схемы адаптивного управления с расширенной ошибкой. Обзор // *Автоматика и телемеханика.* – 1994. – № 9. – С.3-22.
21. *Morse A.S.* High-order parameter tuners for adaptive control of nonlinear systems // *Isidory A., Tarn T.J. (eds.) Systems, Models and Feedback: Theory and Applications.* Birkhauser. – 1992. – P.339-364.
22. *Khalil H.K.* Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input-output models // *IEEE Trans. Automat. Contr.* – 1996. – Vol. 41. – P.177-188.
23. *Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л.* Нелинейное адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб.: Наука, 2000.
24. *Цыкунов А.М.* Модифицированный адаптивный алгоритм высокого порядка для управления линейным объектом по выходу // *Автоматика и телемеханика.* – 2006. – № 8. – С.143-153.
25. *Tao G., Ioannou P.A.* Model reference adaptive control for plants with unknown relative degree // *IEEE Trans. Automat. Control.* – 1993. – V. 38, No. 6. – P. 976-982.
26. *Hoagg J.B.* Direct adaptive command following and disturbance rejection for minimum phase systems with unknown relative degree // *Int. J. Adaptiv. Control Signal Proc.* – 2007. – V. 21, No. 1. – P. 49-75.
27. *Фуртат И.Б., Цыкунов А.М.* Робастное управление нестационарными нелинейными структурно неопределенными объектами // *Проблемы управления.* – 2008. – № 5. – С. 2-7.
28. *Еремин Е.Л.* Робастный регулятор для неаффинного по управлению нестационарного объекта // *Информатика и системы управления.* – 2016. – № 1(47). – С. 101-116.
29. *Еремин Е.Л.* Новый тип алгоритмов параметрической настройки адаптивных регуляторов для систем управления нестационарными Т-периодическими объектами // *Информатика и системы управления.* – 2003. – № 2(6). – С. 100-110.
30. *Цыкунов А. М.* Децентрализованное робастное управление многосвязными структурно неопределенными объектами // *Автоматика и телемеханика.* – 2010. – № 12. – С. 111-121.
31. *Соколов Н.И., Судзиловский Н.Б., Рутковский В.Ю.* Адаптивные системы автоматического управления летательными аппаратами. – М.: Машиностроение, 1988.
32. *Levinson N.* Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order // *Ann. Math.* – 1944. – Vol. 45, №4. – P.723-737.

E-mail:

Еремин Евгений Леонидович – ereminel@mail.ru.