УДК 519.6

© 2021 г. **И.И. Потапов**, д-р физ.-мат. наук,

П.С. Тимош

(Вычислительный центр Дальневосточного отделения РАН)

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЦЕНТРАЛЬНО-РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В работе предложен метод решения задачи газовой динамики, реализованный на основе центрально-разностной схемы, устойчивость которой достигается выполнением коррекции вычисляемых потоков. На примере задачи о распаде разрыва решения показано, что предложенный метод является устойчивым, сравним по точности с методами Мак-Кормака и Лакса-Вендроффа, превосходя их по производительности.

Ключевые слова: центрально-разностная схема, метод коррекции потоков, схема Мак-Кормака, схема Лакса-Вендроффа, задача о распаде разрыва.

DOI: 10.22250/isu.2021.68.17-22

Введение

Внимание к проблеме получения монотонных решений для гиперболических уравнений при наличии разрыва в начальных условиях, например, задаче о движении ударной волны в газовой динамике, не ослабевает на протяжении уже более полувека [1 – 5], что является свидетельством ее важности и актуальности. Разнообразие методов решения данной проблемы свидетельствует об отсутствии универсальных подходов к ее решению.

В работах [2, 5] показано, что линейная разностная схема со вторым порядком точности не может иметь устойчивого монотонного решения. Для преодоления указанного ограничения были разработаны различные классы нелинейных схем, в которых монотонность решения достигается за счет нелинейной коррекции потоков. Одним из таких методов является метод коррекции потоков (FCT), предложенный Борисом и Буком [3], а позднее обоб-

щенный Залесаком [1]. Метод вводит в решение диффузионные и антидиффузионные потоки. Ограничение антидиффузионных потоков позволяет гасить ложные осцилляции в решении. Указанный метод традиционно применяется совместно со схемами Мак-Кормака [1] и Лакса – Вендроффа [1, 3].

В настоящей работе для решения задачи газовой динамики предложен вычислительный метод, использующий центрально–разностную схему, устойчивость которой достигается выполнением коррекции вычисляемых потоков FCT [1]. Выполнено сравнение предложенного метода с методами Мак-Кормака и Лакса – Вендроффа, также использующих метод коррекции потоков FCT.

1. Постановка задачи

Рассмотрим одномерную нестационарную задачу о движении идеального, сжимаемого, нетеплопроводного и нетяжелого газа, описываемую уравнениями [1]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Здесь q и F – векторы консервативных переменных и потоков соответственно; $u = u(x, t)$ – скорость газа; $p = p(x, t)$ – давление газа; $E = \varepsilon + \frac{u^2}{2}$ – полная удельная энергия; $\varepsilon = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}$ – удельная внутренняя энергия; $\rho = \rho(x, t)$ – плотность; γ – отношение удельных теплоемкостей.

Уравнения (1) замыкаются граничными условиями

$$\begin{aligned} u(x_1, t) = u_1, \quad \rho(x_1, t) = \rho_1, \quad p(x_1, t) = p_1, \\ u(x_2, t) = u_2 = 0, \quad \rho(x_2, t) = \rho_2, \quad p(x_2, t) = p_2 \end{aligned} \quad (2)$$

и начальными условиями, учитывающими разрыв решения в точке $x = x_0$, с учетом которого они имеют вид:

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_1, \quad \rho(x, 0) = \rho_1, \quad p(x, 0) = p_1, \quad x_1 \leq x \leq x_0, \\ u(x, 0) = 0, \quad \rho(x, 0) = \rho_2, \quad p(x, 0) = p_2, \quad x_0 < x \leq x_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя $u' = \frac{u}{c}$, $\rho' = \frac{\rho}{\rho_2}$, $p' = \frac{p}{p_2}$, $x' = \frac{x}{L}$, $x'_0 = \frac{x_0}{L}$, $t' = \frac{ct}{L}$, $c = \sqrt{\gamma \frac{p_2}{\rho_2}}$, приводим задачу (1) – (3) к безразмерному виду

$$\frac{\partial q'}{\partial t'} + \frac{\partial F'}{\partial x'} = 0, \quad q' = \begin{bmatrix} \rho' \\ \rho' u' \\ \frac{p'}{\gamma-1} + \frac{\rho' u'^2}{2} \end{bmatrix}, \quad F' = \begin{bmatrix} \rho u' \\ \rho' u'^2 + \frac{p'}{\gamma} \\ \left(\frac{p' \gamma}{\gamma-1} + \frac{\rho' u'^2}{2} \right) u' \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$u'_1(x'_1, t') = \frac{u_1}{c}, \quad \rho'_1(x'_1, t') = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad p'_1(x'_1, t') = \frac{p_1}{p_2}, \quad x'_1 = \frac{x_1}{L}, \quad (5)$$

$$u'_2(x'_2, t') = 0, \quad \rho'_2(x'_2, t') = 1, \quad p'_2(x'_2, t') = 1, \quad x'_2 = \frac{x_2}{L},$$

$$u'(x', 0) = u'_1(x', 0), \quad \rho'(x', 0) = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad p'(x', 0) = \frac{p_1}{p_2}, \quad x'_1 \leq x' \leq x'_0, \quad (6)$$

$$u'(x', 0) = 0, \quad \rho'(x', 0) = 1, \quad p'(x', 0) = 1, \quad x'_0 < x' \leq x'_2.$$

Здесь $L = x_2 - x_1$ – длина расчетной области; c – скорость распространения звука в среде.

Отношение давлений p_2 / p_1 является основным параметром этой задачи, при заданном отношении давлений p_2 / p_1 граничные значения величин u'_1 и ρ'_1 получаются из соотношений Ренкина – Гюгонио [1]:

$$u'_1 = (p'_1 - 1) \sqrt{\frac{d}{a}}, \quad \rho'_1 = \frac{a}{b p'_1},$$

$$\text{где } a = 1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} p'_1, \quad b = 1 + \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{1}{p'_1}, \quad d = \frac{2}{\gamma(\gamma-1)}.$$

Далее, (считается, что это не мешает логике изложения материала), «штрих», определяющий безразмерные переменные, будет опускаться.

2. Метод решения задачи

Решение задачи (4) – (6) будем искать в расчетной области $x_i = \Delta x \cdot i$, $i = \overline{0..N}$, $t_n = \Delta t \cdot n$, $n = \overline{0..M}$, здесь Δx , Δt — шаги сетки по пространству и времени соответственно.

Для решения задачи (4) – (6) предлагается следующий алгоритм.

1. Вычисление немонотонно вектора решения

$$q_j^+ = q_j^n - \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x} (F_{j+1}^n - F_{j-1}^n).$$

2. Вычисление диффузионных и антидиффузионных поправок

$$f_j^{ad} = \mu_j (q_{j+1}^+ - q_j^+), \quad f_j^d = \nu_j (q_{j+1}^n - q_j^n),$$

где $\alpha_j = \frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2} \frac{\Delta t}{\Delta x}$, $\nu_j = \eta_0 + \eta_1 \alpha_j^2$, $\mu_j = \eta_0 + \eta_2 \alpha_j^2$.

3. Стабилизация решения избыточной искусственной диффузией

$$q_j^* = q_j^+ + f_j^d - f_{j-1}^d.$$

4. Расчет градиента для стабилизированного решения

$$\Delta q_j^* = q_j^* - q_{j-1}^*.$$

5. Расчет корректора

$$f_j^{cad} = S_j \max\{0, \min[S_j \Delta q_{j-1}^*, f_j^{ad}, S_j \Delta q_{j+1}^*]\}, \quad S_j = \text{sign } f_j^{ad}.$$

6. Коррекция решения

$$q_j^{n+1} = q_j^* - f_j^{cad} + f_{j-1}^{cad}.$$

7. Пересчет функций ρ_j^{n+1} , u_j^{n+1} , p_j^{n+1} из вектора q_j^{n+1} . Пересчет вектора F для нового временного слоя.

$$F_j^{n+1} = \begin{bmatrix} \rho_j^{n+1} u_j^{n+1} \\ \rho_j^{n+1} (u_j^{n+1})^2 + p_j^{n+1} \\ (\rho_j^{n+1} E_j^{n+1} + p_j^{n+1}) u_j^{n+1} \end{bmatrix}, \quad E_j^{n+1} = \frac{p_j^{n+1}}{\rho_j^{n+1}(\gamma - 1)} + \frac{(u_j^{n+1})^2}{2}.$$

Для предлагаемой схемы используется условие устойчивости [1]

$$(|u| + c) \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

3. Результаты расчетов

Для сравнения работы предлагаемого метода с методами Мак-Кормака и Лакса – Вендроффа использовались следующие безразмерные параметры задачи:

$$p_1 = 2,5, \quad p_2 = 1, \quad \rho_1 = 1,882, \quad \rho_2 = 1,$$

$$u_1 = 0,709, \quad u_2 = 0,$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_0 = 0,2.$$

Расчеты выполнялись на сетках $N = 1000$, $M = 1000$, $\Delta x = 0,01$, $\Delta t = 0,001$.

На рис. 1 приведены графики искомых функций p, ρ и u в момент времени $t = 0.1$, полученные по предлагаемому численному методу, методу Мак-Кормака и методу Лакса – Вендроффа.

Из графиков следует, что значения функций сравниваемых методов хорошо согласуются с аналитическим решением задачи и их относительная погрешность не превышает 1%.

Рис. 1: Сравнение точного решения (—) и численных решений по: предложенному методу ($\circ$), методу Мак-Кормака ($\times$) и методу Лакса – Вендроффа ($+$).

На заданной расчетной сетке $N \times M$, (с фиксированными $\Delta t, \Delta x$) решения задачи разными методами позволило получить время, затрачиваемое на расчет (процессор Intel Core i5–4288U, 2,6 ГГц; ОЗУ8 ГБ), приведенное в таблице.

N	Метод	M = 1000 (сек)
1000	Предлагаемый метод	0.260
	Мак-Кормака	0.343
	Лакса – Вендроффа	0.332
10000	Предлагаемый метод	2.629
	Мак-Кормака	3.345
	Лакса – Вендроффа	3.394

Из полученных результатов следует, что предлагаемый метод решения задачи газовой динамики, основанный на методе коррекции потоков для центрально-разностной схемы, при соизмеримой точности в среднем на

треть быстрее аналогичных реализаций для методов Мак-Кормака и Лакса – Вендроффа.

Заключение

В работе предложен метод решения задачи газовой динамики, реализованный на основе центрально-разностной схемы, устойчивость схемы достигается выполнением коррекции вычисляемых потоков. Показано, что при решении задачи о распаде разрыва предложенный метод является устойчивым, сравнимым по точности с методами Мак-Кормака и Лакса – Вендроффа и в среднем на треть быстрее.

ЛИТЕРАТУРА

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т. – Т.2. / пер. с англ. – М.: Мир, 1991.
2. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сборник. – 1959 – Т. 47, U3. – С. 271-306.
3. Laney C. Computational Gasdynamics // Cambridge University Press. – Cambridge, UK, 1998.
4. John A. Trangenstein Numerical Solution of Hyperbolic Conservation Laws. – Cambridge, UK; New York: Cambridge University Press, 2009.
5. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики: Учеб. пособие для вузов. – Изд. 2-е, доп. – М.: Наука, 1992.

Статья представлена к публикации членом редколлегии С.И. Смагиным.

E-mail:

Потапов Игорь Иванович – potapov2i@gmail.com;

Тимош Павел Сергеевич – pavel.timosh@yandex.ru.