Численный анализ устойчивости центрально-сжатого двутаврового стержня при стесненном кручении

А.Х. Абдурахмонов^{1,2}

¹ Проект-2018; г. Москва, Россия;

² Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Введение. На сегодняшний день тонкостенные конструкции получили широкое применение в строительной отрасли. Анализ жесткости, прочности и устойчивости таких конструкций является актуальной задачей и представляет высокий практический интерес. Рассмотрена методика численного анализа устойчивости центрально-сжатого двутаврового стержня при действии продольной силы и бимомента. Предмет исследования — центрально-сжатый стержень двутаврового профиля.

Материалы и методы. В качестве расчетного инструмента выбран вычислительный комплекс Femap with NX Nastran. Изучены консольно закрепленные стальные стержни двутаврового профиля различных гибкостей в условиях центрального сжатия при действии бимомента. Класс применяемой стали С245. Для определения методики численного расчета использованы аналитические данные согласно методике Эйлера и нормативной методике расчета рассматриваемой конструкции по СП 16.13330.

Результаты. Представлены результаты численных расчетов в геометрически и физически нелинейных постановках. Результаты численных расчетов тонкостенных стержней открытого профиля, загруженных не только продольной силой, но и бимоментом, сопоставлены с результатами аналитических расчетов.

Выводы. По результатам численных расчетов в геометрически и физически нелинейных постановках приведены рекомендации по выбору сетки конечных элементов модели при варьируемой густоте. Выполнена оценка сходимости результатов при различных диаграммах работы стали. Дана оценка несущей способности сжатых консольных стержней при действии бимомента для исследуемых гибкостей за пределом упругости. Для учета упругопластической работы стали рекомендуется использование упрощенной диаграммы работы стали согласно нормам проектирования стальных конструкций СП 16.13330. Разработанную для центрально-сжатых стержней численную методику расчета предполагается распространить на центрально-сжатые закручиваемые тонкостенные стержни открытого профиля. Для проверки достоверности численных результатов в НИУ МГСУ планируется проведение цикла экспериментов по испытанию работы центрально-сжатых двутавров при действии на них, кроме продольной силы бимомента. Испытания будут проведены с использованием консольных двутавров 10Б1.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: бимомент, устойчивость, стесненное кручение, сетка конечных элементов, консольный стержень двутаврового профиля, тонкостенный стержень открытого профиля, критическая сила, гибкость

Благодарности: Автор выражает благодарность профессору, доктору технических наук, проректору Национального исследовательского Московского государственного строительного университета Александру Романовичу Туснину за вклад в написание статьи.

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Абдурахмонов А.Х. Численный анализ устойчивости центрально-сжатого двутаврового стержня при стесненном кручении // Строительство: наука и образование. 2020. Т. 10. Вып. 4. Ст. 2. URL: <http://nsjournal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2020.4.2

Numerical analysis of stability of an axially-compressed i-beam rod subjected to constrained torsion

Amirshokh Kh. Abdurakhmonov^{1,2}

¹ Project-2018; Moscow, Russian Federation;

² Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU); Moscow, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. Today thin-walled structures are widely used in the construction industry. The analysis of their rigidity, strength and stability is a relevant task which is of particular practical interest. The article addresses a method for the numerical analysis of stability of an axially-compressed i-beam rod subjected to the axial force and the bimoment. An axially compressed i-beam rod is the subject of the study.

Materials and methods. Femap with NX Nastran were chosen as the analysis toolkit. Axially compressed cantilever steel rods having i-beam profiles and different flexibility values were analyzed under the action of the bimoment. The steel class is C245. Analytical data were applied within the framework of the Euler method and the standard method of analysis pursuant to Construction Regulations 16.13330 to determine the numerical analysis method.

Results. The results of numerical calculations are presented in geometrically and physically nonlinear settings. The results of numerical calculations of thin-walled open-section rods, exposed to the axial force and the bimoment, are compared with the results of analytical calculations.

Conclusions. Given the results of numerical calculations, obtained in geometrically and physically nonlinear settings, recommendations for the choice of a variable density FEM model are provided. The convergence of results is estimated for different diagrams describing the steel behavior. The bearing capacity of compressed cantilever rods, exposed to the bimoment, is estimated for the studied flexibility values beyond the elastic limit. A simplified diagram, describing the steel behaviour pursuant to Construction regulations 16.13330, governing the design of steel structures, is recommended to ensure the due regard for the elastoplastic behaviour of steel. The numerical analysis method, developed for axially-compressed rods, is to be applied to axially-compressed thin-walled open-section rods. National Research Moscow State University is planning to conduct a series of experiments to test the behaviour of axially-compressed i-beams exposed to the bimoment and the axial force. Cantilever i-beams 10B1 will be used in experimental testing.

KEYWORDS: bimoment, stability, constrained torsion, finite element mesh, cantilever rod having an i-beam section, open-section thin-walled rod, buckling force, flexibility

Acknowledgements: The author is grateful to Alexander Romanovich Tusnin, Professor, Doctor of Technical Sciences, Vice-Rector of the Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU) for his contribution to this article.

FOR CITATION: Abdurakhmonov A.Kh. Numerical analysis of stability of an axially-compressed i-beam rod subjected to constrained torsion. *Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie* [Construction: Science and Education]. 2020; 10(4):2. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2020.4.2 (rus.).

ВВЕДЕНИЕ

Раннее исчерпание несущей способности сжатых тонкостенных стержней открытого профиля при действии сжимающей силы и бимоментта заставляет обращать внимание на более глубокое изучение вопроса устойчивости стержней при данном напряженно-деформированном состоянии (НДС). Данный вопрос изучался Сен-Венаном еще в 1855 г., и с конца XIX – начала XX вв. получил свое развитие. Окончательную теорию расчета тонкостенного стержня открытого поперечного сечения при стеснении поперечного контура сечения предложил русский ученый, профессор В.З. Власов [1–3]. Начиная с XX в. теория кручения тонкостенных стержней, сохраняя свою актуальность по сегодняшний день, развивается благодаря работам следующих российских и зарубежных ученых и исследователей: С.П. Тимошенко [4], Н. Wagner [5], Я.Г. Пановко [6], Б.Н. Горбунова [7], А.Р. Туснина [8], А.Г. Белого [9], Н.И. Ватина [10], И.Л. Кузнецова [11], S. Back [12], R. Pavazza [13–15], N. Rizzi [16], G. Jang [17], R. Vieira [18], M. Brunetti [19], P. Dey [20], A. Argyridi [21].

Теория Власова основана на гипотезе о недеформируемости контура поперечного сечения элемента в своей плоскости. Установлено, что нормальные напряжения в поперечном сечении тонкостенного стержня распределяются пропорционально секториальным площадям. В результате перемещения точек сечения вдоль стержня не равны между собой, происходит секториальная деформация. Появление дополнительных нормальных секториальных напряжений вносит свой вклад в несущую способность и, как результат, в общую устойчивость стержня. При действии бимоментта эти напряжения суммируются с нормальными

напряжениями от усилий сжатия. В некоторых точках сечения сумма данных напряжений превысит предел текучести материала конструкции. Но следует отметить, что это превышение не приведет к полной потере несущей способности сжатых стоек, так как стержень начинает работать при развитии пластических деформаций вне предела упругости. Возникает так называемый «пластический шарнир». Следовательно, анализ вклада секториальных напряжений при расчете устойчивости от действия бимоментта в сжатых стержнях открытого поперечного сечения является важной задачей.

Следующий немаловажный фактор при численных расчетах конструкций независимо от вида программно-вычислительного комплекса, в котором пути решения задач основаны на методе конечных элементов (МКЭ), — выбор сетки конечных элементов (КЭ) модели. Во всех исследуемых задачах сходимость результатов зависит от плотности разбиения. Практика проектирования показывает, что слишком грубая сетка ведет к неточным результатам, однако частая сетка, улучшая точность расчетов, может привести к появлению больших напряжений в отдельных элементах КЭ модели. Также слишком густая сетка может привести к необоснованному увеличению времени расчета из-за появления новых уравнений при вычислении глобальной матрицы жесткости K . Таким образом, отсутствие единой «формулы» по выбору сетки КЭ модели заставляет признать, что тип и размеры КЭ в каждой исследуемой задаче, являясь уникальными, требуют отдельного внимания. Значит, подбор разбивочной сетки КЭ — важный критерий корректности полученных результатов численных расчетов в рамках проводимого исследования.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Цель численных расчетов — разработка уточненных методик расчета устойчивости центрально-сжатой двутавровой консольной стойки при кручении. Достоверность выполненных численных расчетов в конечно-элементной постановке оценивается сопоставлением полученных результатов с теоретически известными решениями. Также планируется провести экспериментальное исследование центрально-сжатых стоек при данном НДС и, в целях практического применения разработанной методики, сопоставить полученные результаты с экспериментальными сведениями. Для достижения поставленных задач в качестве расчетного инструмента был выбран вычислительный комплекс (ВК) Femap with NX Nastran. Все расчеты выполнялись в геометрически и физически нелинейных постановках.

На указанном этапе рассмотрим вопрос численного анализа устойчивости центрально-сжатой консольной стойки двутаврового поперечного сечения. Общий вид конечно-элементной модели представлен на рис. 1.

Рис. 1. Общий вид конечно-элементной модели стойки

Стержень замоделирован двумерными оболочечными элементами типа Plate. Во избежание искривления поперечного сечения стержня в консоли было предусмотрено ребро жесткости на свободном конце. Потеря устойчивости в сторону наименьшей изгибной жесткости спровоцирована приложением поперечной силы величиной 1/1000 доли от значения продольной силы N , равной 1000 кН. Значение продольной силы принято таким, чтобы вызвать появление закритических напряжений в полках двутавра.

Стойка подобрана из двутавра 10Б1 по ГОСТ Р 57837-2017. Класс применяемой стали С245 с пределом текучести 235 МПа. Рассматривались длины стоек: 37,2; 49,6; 62; 74,4 и 80,6 см, что соответствует гибкостям 60; 80; 100; 120 и 130 соответственно. Рассмотрены несколько вариантов разбивки сетки КЭ модели с целью подбора оптимальных параметров при численном анализе устойчивости (табл. 1).

Табл. 1. Разбивка геометрической модели на конечные элементы

Номер варианта		v1	v2	v3	v4	v5
Количество КЭ, шт.	Полка	2	4	6	8	10
	Стенка	4	6	8	10	12
	По длине	10	10	10	10	10

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Результаты расчетов при линейных характеристиках материала (табл. 2) были сопоставлены с известным решением по нахождению критической силы согласно методике Эйлера.

Анализ проводился статически в геометрически нелинейной постановке. Данное нелинейное решение в ВК Femap проводится итерационными методами, основанными на методе Ньютона – Рафсона [22].

По мере уменьшения шага разбивки по высоте сечения стержня при численном расчете в упругой стадии работы материала сходимость с теоретиче-

Табл. 2. Результаты геометрически нелинейного расчета устойчивости в упругой стадии работы материала

Критическая сила, кН		Гибкость стержня λ (при полном использовании несущей способности)				
		60	80	100	120	130
Теория (Эйлер)		584,01	328,5	210,24	146	124,4
Численный расчет (Femap)	v1	570,31	322,19	205,94	142,5	121,25
	v2	570,31	322,5	205,94	142,5	121,25
	v3	570	322,5	205,94	142,5	121,25
	v4	570	322,5	205,94	142,5	121,25
	v5	569,06	322,5	205,94	142,5	121,25
Теория (Femap)	$\Delta_{v3}, \%$	102,457	100,86	102,09	102,46	102,6

скими данными меняется незначительно при одновременном значительном увеличении времени, затраченного на расчет. Таким образом, выбор шага разбивки сетки КЭ модели в упругой стадии работы материала не следует обосновывать сходимостью полученных результатов значений критической силы с результатами расчета по методике Эйлера при разбивке сетки по высоте поперечного сечения стержня. На данном этапе критерием выбора сетки является точность распределения нормальных напряжений по ширине полок.

Векторные распределения напряжений, полученные в ходе численного расчета при различных вариантах разбивочной сетки КЭ модели по высоте сечения стержня, представлены на рис. 2.

В ходе анализа полученных векторных распределений напряжений выявлено, что:

- вариант 1 не позволяет установить закон распределения напряжений по ширине полки стержня ввиду отсутствия промежуточных результатов;

- вариант 2 дает общее представление о распределении напряжений, но также не позволяет дать детальную оценку НДС;

- варианты 3–5 дают представление о теоретическом распределении напряжений по ширине полки и, вместе с тем, имеют между собой малые (менее 6 %) расхождения в полученных значениях, что позволяет принять для дальнейшего рассмотрения вариант 3. Последующее уменьшение сетки не приводит к ощутимому увеличению точности, но приводит к росту времени расчета.

С целью приближения к действительной форме потери устойчивости элемента необходимо разбить геометрическую модель по длине стержня так, чтобы деформация (линия прогиба) была гладкой. Указанная разбивочная сетка приведена в табл. 3. Также стоит учитывать, что отношение максимального размера элемента к минимальному рекомендуется выбирать не более двух [23].

Рис. 2. Векторное распределение напряжений в полке двутавра при вариантах 1–5 разбивочной сетки

Табл. 3. Разбивка геометрической модели на конечные элементы по длине стержня

Номер варианта		v3.1	v3.2	v3.3	v3.4	v3.5
Количество КЭ, шт.	Полка	6				
	Стенка	8				
	По длине (<i>n</i>)	10	20	30	40	50

Выбираем вариант разбивки сетки КЭ модели по длине на основе сопоставления результатов численного расчета с результатами теоретического расчета определения критической силы по теории Эйлера. Результаты и анализ различных вариантов разбивки сетки КЭ модели по длине стержня представлены в табл. 4.

Установлено, что существует малое расхождение между вариантами v3.1 и v3.2. Начиная с варианта v3.3, значение силы не меняется. В варианте v3.5 из-за большего количества элементов время расчета относительно варианта v3.4 увеличилось. Соответственно, остановимся на выборе варианта

v3.4. Таким образом, принятая окончательная разбивка по длине стержня: вариант v3.4 ($n = 40$ элементов) при сравнении результатов по критерию Эйлера. Максимальная разница между теоретическими и численными расчетами составила 3,4 % по Эйлеру и 16,1 % по нормативной методике.

Предполагается, что при принятой по длине разбивки и следующей разбивки по сечению сходимость результатов расчета улучшится без существенного увеличения затрачиваемого времени. Выполним очередную итерацию разбивки сетки КЭ модели со следующими параметрами:

- полка — 8 шт.;
- стенка — 10 шт.;
- по длине (n) — 40 шт.

Данная разбивочная сетка отличается от ранее рассмотренного варианта большим количеством КЭ, что обеспечивает распределение напряжений в полке с более плавными скачками. В табл. 5 приведены результаты численного анализа устойчивости до полного исчерпания несущей способности стержня для вышеприведенного варианта разбивки.

Табл. 4. Результаты геометрически нелинейного расчета устойчивости в упругой стадии работы материала

Критическая сила, кН		Гибкость стержня λ (при полном использовании несущей способности)				
		60	80	100	120	130
Теория (Эйлер)		584,01	328,5	210,24	146	124,4
Нормативная методика (СП) ¹		199,37	170,42	137,41	107,83	95,51
Численный расчет (Femap)	v3.1	570,0	322,5	205,94	142,5	121,25
	v3.2	567,19	319,38	203,75	141,88	120,63
	v3.3	566,25	318,75	203,75	141,56	120,31
	v3.4	566,25	318,75	203,44	141,56	120,31
	v3.5	565,94	318,75	203,44	141,25	120,31
Численный расчет (Femap) при напряжениях предела текучести	v3.4	191,03	172,37	153,92	128,50	109,9
Теория (Femap)	$\Delta_{v3.4}, \%$	103,14	103,06	103,34	103,13	103,40
СП (Femap)	$\Delta_{v3.4}, \%$	104,36	98,87	89,27	83,91	86,9

Табл. 5. Результаты геометрически нелинейного расчета устойчивости в упругой стадии работы материала

Критическая сила, кН		Гибкость стержня λ (при полном использовании несущей способности)				
		60	80	100	120	130
Теория (Эйлер)		584,01	328,5	210,24	146	124,4
Нормативная методика (СП)		199,37	170,42	137,41	107,83	95,51
Численный расчет (Femap)		565,94	318,75	203,44	141,56	120,31
Численный расчет (Femap) при напряжениях предела текучести		187,68	168,99	150,56	125,1	106,64
Теория (Femap)	$\Delta \times 100, \%$	103,14	103,06	103,34	103,14	103,40
СП (Femap)	$\Delta \times 100, \%$	106,2	100,85	91,2	86,2	89,56

¹ СП 16.13330.2017. Стальные конструкции. Актуализированная редакция СНиП II-23-81* (с Поправкой, с Изменениями № 1, 2).

По данным табл. 5 установлено, что разбивка стержня по выбранному варианту сетки дает лучшую сходимость результатов при сравнении с нормативной методикой. При этом, как и предполагалось, точность при сравнении полученных результатов численного расчета с теоретическими результатами по методу Эйлера осталась неизменной. При сопоставлении результатов численного расчета с нормативной методикой (согласно СП 16.13330) результаты улучшились, в сравнении с предыдущей разбивочной сеткой КЭ (отличие до 13,8 %). Стоит также отметить, что для стержня с гибкостью 60 наблюдается ранняя потеря устойчивости (6,2 % от N), а для гибких стержней — потеря устойчивости при продольной силе, превышающей критическое значение по нормативной методике, что не отражает реальное поведение сжатых стержней при потере устойчивости.

Чтобы нивелировать полученные значения критических сил, итерационно выполнен расчет с контролем параметров заданных внешних воздействий (N и Q_y) для выбранных гибкостей. Результаты геометрически нелинейных расчетов устойчивости в упругой стадии приведены в табл. 6.

Данный подход доказывает правильность суждений. При расчете устойчивости в среде Femar with NX Nastran не рекомендуется задавать внешние силы в несколько раз больше критических, независимо от итерационных шагов приложения нагрузки. Также было определено влияние возмущающей поперечной силы. В результате выполненных расчетов в геометрически нелинейной постановке рекомендуется итерационно задавать внешнюю прикладываемую силу до получения одинаковых значений напряжений в наиболее нагруженном сечении модели. Что касается поперечной силы, то ее величина не должна превышать $N/1500$, чтобы избежать возникновения дополнительных напряжений в элементе.

Таким образом, после выполнения вышеуказанной процедуры разница между численной и нормативной методиками составила от 8 до 16 %, отражая работу сжатых стоек при практических наблюдениях. Данное расхождение обусловлено пре-

небрежением начальных несовершенств в стержнях. Нормативная методика по расчету устойчивости центрально-сжатых стержней основана на расчете внецентренно сжатых стержней с учетом случайного эксцентриситета внешней продольной силы и начального искривления оси (погиба) стержня². При сравнении критической силы для идеально упругих стержней по методу Эйлера, численные результаты дали высокую точность ($\Delta = +2$ %).

Выбор типа диаграммы работы материала при исследовании сходимости численных результатов по нелинейной деформационной модели является важной задачей. В данном исследовании в качестве расчетной диаграммы работы состояния материала, определяющей связь между деформациями и напряжениями, приняты следующие типы диаграмм:

1. Унифицированная диаграмма (рис. 3). Составляет из трех частей:

- области упругой работы с линейным законом распределения напряжений;
- гиперболической области, описывающей нелинейную работу материала стали [24];
- горизонтального участка, характеризующего площадку текучести.

Стоит отметить, что диаграммы работы материала, в зависимости от класса стали, существенно различаются друг от друга. Если построить значения параметров диаграммы в относительных координатах, то различия будут достаточно малы.

2. Диаграмма Прандтля (рис. 4). При физически нелинейном анализе конструкций в целях упрощения диаграмму работы стали можно заменить идеализированной диаграммой³. Данный тип диаграммы устанавливает, что вначале материал работает в совершенно упругом состоянии до предела упругости, после чего переходит в совершенно пластичное состояние.

² СП 294.1325800.2017. Конструкции стальные. Правила проектирования (с Изменением № 1).

³ Кудинин Ю.И. Металлические конструкции: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования. М. : ИЦ Академия, 2011. 688 с.

Табл. 6. Результаты геометрически нелинейного расчета устойчивости в упругой стадии работы материала

Критическая сила, кН		Гибкость стержня λ (при полном использовании несущей способности)				
		60	80	100	120	130
Теория (Эйлер)		584,01	328,5	210,24	146	124,4
Нормативная методика (СП)		199,37	170,42	137,41	107,83	95,51
Численный расчет (Femar)		574,31	322,03	206,16	143,75	122,39
Численный расчет (Femar) при напряжениях предела текучести		194,91	189,0	160,0	128,49	112,47
Теория (Femar)	$\Delta \times 100, \%$	101,69	102,0	101,98	101,56	101,64
СП (Femar)	$\Delta \times 100, \%$	102,29	90,17	85,88	83,92	93,97

Рис. 3. Унифицированная диаграмма работы стали

Рис. 4. Идеализированная диаграмма работы стали (диаграмма Прандтля)

3. Нормативная диаграмма (рис. 5). В соответствии с требованиями нормативной документации, отражающими действительную работу материала, при расчете конструкций рекомендуется использовать диаграмму с кусочно-линейным законом распределения напряжений – деформаций.

В табл. 7 приведены результаты вычислений в геометрически и физически нелинейных постановках в зависимости от заданного типа диаграммы.

Результаты расчета показали, что наибольшую сходимость показывает использование унифицированной диаграммы работы стали № 1 с гипербо-

лической зависимостью между участками предела пропорциональности и предела текучести. При идеализированной диаграмме № 2 сходимость результатов численного анализа с нормативной методикой уменьшилась при незначительной экономии времени, затрачиваемого для расчетов. Применение кусочно-линейной диаграммы № 3 по рекомендациям свода правил по проектированию стальных конструкций СП 16.13330 дает самую лучшую сходимость результатов при сравнении с нормативной методикой расчета устойчивости центрально-сжатых стержней. При данной диаграмме затрачивае-

Рис. 5. Нормативная диаграмма работы стали

Табл. 7. Численное значение критической силы N_{cr} с учетом физической нелинейности

Тип диаграммы			Значение N_{cr} в зависимости от гибкости стержня λ				
			60	80	100	120	130
1	$\Delta = 100 \times (1 - \text{СП/Femap}), \%$	$\Delta_{\max} = 17,7 \%$	201,52	188,67	157,22	131	112,36
2		$\Delta_{\max} = 18,21 \%$	193,9	188,94	168	131,77	116,06
3		$\Delta_{\max} = 17,45 \%$	194,26	181,25	153,38	130,63	112,08
Нормативное значение N_{cr} по СП 16.13330			199,37	170,42	137,41	107,83	95,51

мое время для расчетов меньше, чем при использовании диаграммы № 1 на 10 %, но больше, чем при использовании диаграммы № 2 на 18,5 %. Стоит отметить, что численный расчет с использованием идеализированной диаграммы при минимальных затратах времени не дал желаемых результатов. При этом типе диаграммы с учетом расчета конструкций в нелинейной постановке не отражается практическая картина потери устойчивости гибких стержней. Для гибких стержней потеря устойчивости должна происходить при напряжениях меньше предела упругости. Это явление отражается в диаграммах № 1 и 3.

С учетом полученных рекомендаций по выбору диаграммы и подобранной разбивочной сетки КЭ модели, выполним расчет устойчивости двутавровой балки при стесненном кручении.

При кручении стержня от действия бимоента B в поперечном сечении профиля появляются дополнительные секториальные напряжения, превышающие напряжение при центральном сжатии. В опасном сечении сумма данных напряжений мо-

жет переводить стержень в заkritическое состояние, вследствие чего он потеряет устойчивость. Для возникновения бимоента в исследуемом стержне прикладывалась пара сосредоточенных сил (рис. 6).

Для анализа несущей способности и заkritического поведения конструкции, так называемого деформационного анализа устойчивости, использовался модуль Nonlinear Static вычислительного комплекса Femap with NX Nastran. Численный расчет выполнен с учетом геометрической и физической нелинейностей. Численная критическая сила при действии бимоента соответствует предельной несущей способности стержня, при которой прерывается расчет [25].

Стоит отметить, что разработанная для центрально-сжатых стержней численная методика применима при расчете устойчивости центрально-сжатых закручиваемых конструкций при действии бимоента при условии сопоставимости результатов планируемого эксперимента с полученными результатами численного расчета.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ОБСУЖДЕНИЕ

По результатам проведенного исследования возможно сделать выводы:

1. Для расчета устойчивости двутаврового стержня при центральном сжатии рекомендуется следующая сетка разбиения на КЭ:

- полка — 8 шт.;
- стенка — 10 шт.;
- по длине стержня — 40 шт.

2. Для учета упругопластической работы стали рекомендуется использование упрощенной диаграммы работы стали согласно нормам проектирования стальных конструкций СП 16.13330.

3. Разработанную для центрально-сжатых стержней численную методику расчета предполагается распространить на центрально-сжатые закручиваемые тонкостенные стержни открытого профиля.

4. Для проверки достоверности численных результатов в НИУ МГСУ планируется проведение цикла экспериментов по испытанию работы центрально-сжатых двутавров при действии на них, кроме продольной силы бимоента. Испытания будут проведены с использованием консольных двутавров 10Б1.

Рис. 6. Консольный центрально-сжатый закручиваемый двутавр

ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. М. : Физматгиз, 1959. 568 с.
2. Власов В.З. Кручение и устойчивость тонкостенных открытых профилей // Строительная промышленность. 1938. № 6. С. 49–53; № 7. С. 55–60.
3. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни (прочность, устойчивость, колебания). М. ; Л. : Госстройиздат, 1940. 276 с.
4. Тимошенко С.П. Об устойчивости плоской формы изгиба двутавровой балки // Известия Санкт-Петербургского политехнического института. 1905. С. 151–219.
5. Wagner H. Verdrehung und Knickung von offenen Profilen // NACA Tech. Memo. 1937. No. 807. Pp. 329–343.
6. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М. : Наука, 1987. 352 с.
7. Горбунов Б.Н. Расчет пространственных рам из тонкостенных стержней // Прикладная математика и механика. 1943. Вып. 1. С. 188.
8. Туснин А.Р. Расчет и проектирование конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля : дис. ... д-ра техн. наук. М., 2004. 37 с.
9. Белый А.Г. Деформационный расчет и устойчивость тонкостенных призматических стержней произвольного профиля, сжатых с двухосным эксцентриситетом : дис. ... канд. техн. наук. СПб., 2000. 114 с.
10. Ватин Н.И., Рыбаков В.А. Расчет металлоконструкций: седьмая степень свободы // Стройпроект. 2007. № 2. С. 60–63.
11. Кузнецов И.Л., Богданович А.У. Устойчивость тонкостенного стержня переменного сечения при продольном сжатии и учет нелинейных деформаций // Известия высших учебных заведений. Строительство. 2003. № 2. С. 123–128.
12. Back S.Y., Will K.M. A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1998. Vol. 43. Issue 7. Pp. 1173–1191. DOI: 10.1002/(sici)1097-0207(19981215)43:7<1173::aid-nme340>3.0.co;2-4
13. Pavazza R., Matoković A., Vukasović M. A theory of torsion of thin-walled beams of arbitrary open sections with influence of shear // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2020. Pp. 1–36. DOI: 10.1080/15397734.2020.1714449
14. Pavazza R., Matoković A. Bending of thin-walled beams of open section with influence of shear, part I: Theory // Thin-Walled Structures. 2017. Vol. 116. Pp. 357–368. DOI: 10.1016/j.tws.2016.08.027
15. Pavazza R., Matoković A., Vukasović M. Bending of thin-walled beams of open section with influence of shear — Part II: Application // Thin-Walled Structures. 2017. Vol. 116. Pp. 369–386. DOI: 10.1016/j.tws.2016.08.026
16. Rizzi N.L., Varano V. The effects of warping on the postbuckling behaviour of thin-walled structures // Thin-Walled Structures. 2011. Vol. 49. Issue 9. Pp. 1091–1097. DOI: 10.1016/j.tws.2011.04.001
17. Jang G.W., Kim Y.Y. Theoretical analysis of coupled torsional, warping and distortional waves in a straight thin-walled box beam by higher-order beam theory // Journal of Sound and Vibration. 2011. Vol. 330. Issue 13. Pp. 3024–3039. DOI: 10.1016/j.jsv.2011.01.014
18. Vieira R.F., Virtuoso F.B.E., Pereira E.B.R. A higher order thin-walled beam model including warping and shear modes // International Journal of Mechanical Sciences. 2013. Vol. 66. Pp. 67–82. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2012.10.009
19. Brunetti M., Lofrano E., Paolone A., Ruta G. Warping and Ljapunov stability of non-trivial equilibria of non-symmetric open thin-walled beams // Thin-Walled Structures. 2015. Vol. 86. Pp. 73–82. DOI: 10.1016/j.tws.2014.10.004
20. Dey P., Talukdar S. Influence of warping on modal parameters of thin-walled channel section steel beam // Procedia Engineering. 2016. Vol. 144. Pp. 52–59. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.05.006.
21. Argyridi A.K., Sapountzakis E.J. Advanced analysis of arbitrarily shaped axially loaded beams including axial warping and distortion // Thin-Walled Structures. 2019; 134:127–147. DOI: 10.1016/j.tws.2018.08.019
22. Рычков С.П. Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. М. : ДМК Пресс, 2013. 783 с.
23. Шимкович Д.Г. Femap & Nastran. Инженерный анализ методом конечных элементов. М. : ДМК Пресс, 2012. 700 с.
24. Прокич М. Несущая способность стальных двутавровых балок при изгибе и кручении с учетом пластической работы материала : дис. ... канд. техн. наук. М., 2015. 22 с.
25. Туснин А.Р., Абдурахмонов А.Х. Несущая способность центрально-сжатого двутаврового стержня при стесненном кручении // Промышленное и гражданское строительство. 2020. № 9. С. 21–27. DOI: 10.33622/0869-7019.2020.09.21-27

Поступила в редакцию 2 ноября 2020 г.

Принята в доработанном виде 6 декабря 2020 г.

Одобрена для публикации 9 декабря 2020 г.

ОБ АВТОРЕ: Амиршох Хайдаршоевич Абдурахмонов — ведущий инженер-конструктор; Проект-2018; 123001, г. Москва, Ермолаевский пер., д. 27, стр. 1; аспирант кафедры металлических и деревянных конструкций; Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ); 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26; zandya@gmail.com.

INTRODUCTION

The early exhaustion of the bearing capacity of compressed thin-walled open-section rods, exposed to the compressive force and the bi-moment, makes it necessary to focus on the in-depth study of stability of rods in the stress-strain state (SSS). This problem was first studied by Saint Venant back in 1855, and its research was advanced in the late 19th and early 20th centuries. The final version of the design theory developed for a thin-walled open cross section rod, whose cross section is under torsion, was proposed by Russian researcher V.Z. Vlasov [1–3]. The theory of torsion of thin-walled rods has been relevant since the 20th century, and it has been advanced by the Russian and foreign scientists and researchers, including S.P. Timoshenko [4], H. Wagner [5], Ya.G. Panovko [6], B.N. Gorbunov [7], A.R. Tusnin [8], A.G. Belyy [9], N.I. Vatin [10], I.L. Kuznetsov [11], S. Back [12], R. Pavazza [13–15], N. Rizzi [16], G. Jang [17], R. Vieira [18], M. Brunetti [19], P. Dey [20] and A. Argyridi [21].

The Vlasov theory is based on the hypothesis that the contour of a cross-section of a member is nondeformable in its plane. Normal stresses arising in the cross section of a thin-walled rod are distributed proportionally to sectorial areas. As a result, displacements of cross-section points along the rod are not equal to each other, and this phenomenon causes sectorial warping. Additional normal sectorial stresses affect the strength and overall stability of a rod. These stresses supplement normal stresses caused by compressive forces under the action of the bi-moment. At some points of the cross-section, total stresses will exceed the yielding point of the material. However, this excess won't cause compressed rods to completely lose their strength, because the rod comes into operation when plastic deformations go beyond the elastic limit, resulting in the so-called “post-yield hinge”. Therefore, the contribution of sectorial stresses caused by the bi-moment in compressed rods having open cross-sections is an important challenge to be tackled in the process of stability analysis.

Another important factor that affects the numerical analysis of structures, regardless of the type of FEM software, is the choice of the FEM mesh for a model. The convergence of results depends on mesh spacing for all problems under research. The design practice shows that large mesh spacing leads to inaccurate results; however, small spacing, improving the accuracy of calculations, can cause large stresses in individual FEM elements. Also, small spacing can lead to an unreasonable increase in the calculation time due to the occurrence of new equations when the global stiffness matrix K is calculated. Therefore, lack of a universal “FEM mesh selection formula” makes us acknowledge that the unique type and sizes of finite elements in each problem under study require an individual approach. Therefore, the choice of FEM mesh spacing is

an important criterion of accuracy of calculation results obtained for this research project.

MATERIALS AND METHODS

The purpose of numerical calculations is to develop improved stability analysis methods for an axially-compressed i-beam cantilever bar under torsion. The reliability of numerical calculations, performed in the finite element setting, is assessed by comparing the results, obtained in the course of the research, with theoretical solutions. An experimental study of axially-compressed bars in this SSS is to be performed; its results are to be compared with experimental data. Femap with NX Nastran software was chosen as the calculation tool to attain these objectives. All calculations were performed in geometrically and physically nonlinear formulations.

At this stage, we will consider the numerical analysis of stability of an axially-compressed cantilever bar that has an i-beam cross section. The overall view of the finite element model is available in Fig. 1.

Fig. 1. Overall view of the finite element model of bar

The rod model represents two-dimensional shell elements of the Plate type. A free end of the cantilever has a stiffener to prevent the curvature of the cross section. The loss of stability in the area of lowest bending stiffness is caused by the application of a lateral force of $1/1,000$ of the value of the axial force N , equal to $1,000$ kN. The value of the axial force is assumed to cause overcritical stresses in the webs of an i-beam.

The rod is made of i-beam 10B1 according to Russian standard 57837-2017 (GOST R 57837-2017). C245 steel grade is used; its yield limit is equal to 235 MPa. The following bar lengths were considered: 37.2 ; 49.6 ; 62 ; 74.4 and 80.6 cm; they correspond to the flexibilities of 60 , 80 , 100 , 120 and 130 , respectively. Several FEM model options were analyzed to select optimal parameters for the numerical stability analysis (Table 1).

Table 1. Geometrical model meshing into finite elements

Option No.		O1	O2	O3	O4	O5
No. FE, pieces	Web	2	4	6	8	10
	Wall	4	6	8	10	12
	Length	10	10	10	10	10

RESEARCH RESULTS

The results of calculations obtained for linear characteristics of the material (Table 2) were compared with the well-known solution to the Euler buckling load problem.

The analysis was performed statically in the geometrically nonlinear formulation. This nonlinear solution is performed in Femap PC using iterative methods based on the Newton-Raphson method [22].

The numerical calculation performed at the stage of elastic behaviour of the material contemplates that the size of mesh elements reduces towards the top of the rod section; the convergence with the theoretical data does not change significantly while the time consumed by the calculations goes up to a significant extent. Thus, the choice of the mesh element size for the FE model at the stage of elastic behavior of the material should not be validated by the convergence between buckling force values and the calculation results obtained using the Euler method when meshing is performed along the cross-section of the rod. At this stage, accurate distribution of normal stresses over the web width serves as the meshing criterion.

Vectorial stress distributions, obtained by means of numerical calculations of various meshing options of the FE model in respect of the cross section of the rod are shown in Fig. 2.

Table 2. The results of the geometrically nonlinear analysis of stability in the elastic stage of the material behavior

Buckling force, kN		Rod flexibility, λ (if the bearing capacity is exhausted)				
		60	80	100	120	130
Theory (Euler)		584.01	328.5	210.24	146	124.4
Numerical calculation (Femap)	O1	570.31	322.19	205.94	142.5	121.25
	O2	570.31	322.5	205.94	142.5	121.25
	O3	570	322.5	205.94	142.5	121.25
	O4	570	322.5	205.94	142.5	121.25
	O5	569.06	322.5	205.94	142.5	121.25
Theory (Femap)	$\Delta_{03}, \%$	102.457	100.86	102.09	102.46	102.6

Fig. 2. (beginning) Vectorial distribution of stresses in the i-beam web for mesh options 1-5.

Option O4:

Option O5:

Fig. 2. (ending) Vectorial distribution of stresses in the i-beam web for mesh options 1-5.

In the course of the analysis of vectorial stress distributions it was found out that:

- option O1 does not allow to identify the regularity of stress distribution over the width of the rod web due to the lack of intermediate results;
- option O2 provides a general idea of stress distribution, but it does not allow to perform a detailed assessment of the SSS;
- options O3-O5 provide an idea of the theoretical distribution of stresses along the web width and, nonetheless, the results demonstrate a small discrepancy (below 6 %); therefore, Option O3 can be used in further calculations. Further mesh size reduction does not lead to any noticeable accuracy increase, but it slows down the calculation process.

In order to simulate the actual buckling mode in the most accurate way, it is necessary to split the geometrical model along the length of the rod so that the deformation (deflection line) were smooth. This mesh is shown in Table 3. It is also understood that the ratio

of the maximal element size to the minimal one should not exceed two [23].

Table 3. The meshing of the geometrical model into finite elements along the rod length

Option No.		O3.1	O3.2	O3.3	O3.4	O3.5
Number of FE, pieces	Web	6				
	Wall	8				
	Length (n)	10	20	30	40	50

Model meshing into finite elements along the length is selected on the basis of the comparison of the results of the numerical calculation and the results of the theoretical calculation of the buckling force according to the Euler theory. The analysis of various model meshing options along the length of the rod are presented in Table 4.

Table 4. The results of the geometrically nonlinear analysis of stability at the elastic stage of the material behavior¹

Buckling force, kN		Rod flexibility, λ (if the bearing capacity is exhausted)				
		60	80	100	120	130
Theory (Euler)		584.01	328.5	210.24	146	124.4
Normative methodology ¹		199.37	170.42	137.41	107.83	95.51
Numerical calculation (Femap)	O3.1	570.0	322.5	205.94	142.5	121.25
	O3.2	567.19	319.38	203.75	141.88	120.63
	O3.3	566.25	318.75	203.75	141.56	120.31
	O3.4	566.25	318.75	203.44	141.56	120.31
	O3.5	565.94	318.75	203.44	141.25	120.31
Numerical calculation (Femap) in case of limit yield stress	O3.4	191.03	172.37	153.92	128.50	109.9
Theory (Femap)	$\Delta_{O3.4}$, %	103.14	103.06	103.34	103.13	103.40
Construction regulations SP (Femap)	$\Delta_{O3.4}$, %	104.36	98.87	89.27	83.91	86.9

¹ Construction regulations SP 16.13330.2017. Steel structures. Updated version of SNiP II-23-81* (amended).

A small discrepancy between options O3.1 and O3.2 is discovered. As of option O3.3, the buckling force value does not change. Due to the larger number of elements in option O3.5, the calculation time relative goes up to the option O3.4. Therefore, we will focus on option O3.4. Thus, we chose option O3.4 ($n = 40$ elements), having compared the results according to the Euler criterion. The maximal difference between theoretical and numerical calculations reaches 3.4 % for Euler and 16.1 % for the normative methodology based on construction regulations. We assume that the accepted method of meshing along the length, if compared with the other cross-section meshing technique, will improve the convergence of results without significantly increasing the calculation time.

The next meshing iteration is performed for the model that has the following parameters: web — 8 pieces; wall — 10 pieces; length (n) — 40 pieces. This mesh differs from the previously considered version by a large number of FE, which ensure more homogeneous distribution of stresses over the web. Table 5 shows the results of the numerical analysis of stability up to the bearing capacity exhaustion.

According to Table 5, rod meshing according to the selected mesh option ensures better convergence of results if compared with the methodology specified in Construction regulations. However, as expected, the accuracy of results of numerical calculations compared with theoretical results obtained using the Euler method remains unchanged. When com-

paring the results of the numerical calculation with the methodology specified in Construction regulations (SP 16.13330), the results turn out better than those generated by the previous FE mesh (the discrepancy reaches 13.8 %). It is also noteworthy that a rod whose flexibility is equal to 60 demonstrates an early loss of stability (6.2 % of N). Flexible rods feature buckling under the axial force that exceeds the ultimate value pursuant to Construction regulations, which do not describe the real behavior of compressed buckling rods.

To neutralize the obtained values of ultimate forces, an iterative calculation is performed under the control of parameters of pre-set external actions N and Q_y for selected flexibility values. Calculation results are shown in Table 6.

This approach has proven the validity of the assertions. When stability is analyzed in Femap with NX Nastran, it is not recommended to set external forces several times greater than the critical values, regardless of iterative loading steps. The influence of the exciting lateral force was also identified. As a result of the calculations performed in the geometrically nonlinear formulation, it is recommended to iteratively set the external force value until the same stress values are obtained in the most heavily loaded cross section of the model. As for the lateral force, its value should not exceed $N/1,500$ to avoid additional stresses in the member.

Thus, upon completion of the above procedure, the discrepancy between numerical and regulatory methods reached 8 to 16 %, thus, reflecting the behavior

Table 5. Results of the geometrically nonlinear analysis of stability at the elastic stage of the material behavior

Buckling force, kN		Rod flexibility, λ (if the bearing capacity is exhausted)				
		60	80	100	120	130
Theory (Euler)		584.01	328.5	210.24	146	124.4
Normative methodology (Construction regulations)		199.37	170.42	137.41	107.83	95.51
Numerical calculation (Femap)		565.94	318.75	203.44	141.56	120.31
Numerical calculation (Femap) in case of limit yield stress		187.68	168.99	150.56	125.1	106.64
Theory (Femap)	$\Delta \times 100, \%$	103.14	103.06	103.34	103.14	103.40
Construction regulations (Femap)	$\Delta \times 100, \%$	106.2	100.85	91.2	86.2	89.56

Table 6. The results of the geometrically nonlinear analysis of stability at the elastic stage of the material behavior

Buckling force, kN		Rod flexibility, λ (if the bearing capacity is exhausted)				
		60	80	100	120	130
Theory (Euler)		584.01	328.5	210.24	146	124.
Normative methodology (Construction regulations)		199.37	170.42	137.41	107.83	95.51
Numerical calculation (Femap)		574.31	322.03	206.16	143.75	122.39
Numerical calculation (Femap) in case of limit yield stress		194.91	189.0	160.0	128.49	112.47
Theory (Femap)	$\Delta \times 100, \%$	101.69	102.0	101.98	101.56	101.64
Construction regulations (Femap)	$\Delta \times 100, \%$	102.29	90.17	85.88	83.92	93.97

of compressed bars identified in the course of practical observations. This discrepancy is due to neglected initial imperfections of rods. The regulatory methodology used to calculate the stability of axially-compressed rods is based on the analysis of eccentrically compressed rods, taking into account the random eccentricity of the external axial force and the initial deflection of the rod axis². Numerical results demonstrated high accuracy ($\Delta = +2\%$) when the values of the buckling force, applied to ideally elastic rods using the Euler method, were compared.

The choice of the type of a diagram describing the behavior of the material when studying the convergence of numerical results using a nonlinear deformation model is an important task. In this research, the following types of diagrams are used to analyze the behaviour and the state of the material to describe the relation between deformations and stresses.

1. A standardized diagram (Fig. 3) has three constituent parts:

- the domain of elastic behavior with linearly varying stresses;
- the hyperbolic domain describing the nonlinear behavior of steel [24];
- the horizontal domain that characterizes yield strength.

² SP 294.1325800.2017. Steel structures. Design rules (including modification 1).

It is noteworthy that the diagrams describing the behaviour of the material, depending on the steel grade, differ significantly from each other. If we apply the values of the diagram parameters to relative coordinates, discrepancies will be quite small.

2. The Prandtl diagram (Fig. 4). In the case of the physically nonlinear analysis of structures, the diagram, describing the steel behaviour, can be replaced by the idealized diagram for simplification purposes³. This type of diagram has shown that initially the material is in a perfectly elastic state until it reaches the limit of elasticity, after which it converts into a perfectly plastic state.

3. A regulations-based diagram (Fig. 5). Pursuant to the requirements set by the construction regulations that describe the actual behavior of a material, it is recommended to use a diagram demonstrating a piecewise linear stress-strain distribution pattern in the analysis of structures.

Table 7 shows the results of calculations in geometrically and physically nonlinear settings depending on the preset type of diagram.

Calculation results suggest that maximal convergence is shown in case of application of standardized steel behaviour diagram 1 with a hyperbolic dependence between the sections demonstrating the pro-

³ Kudishin Yu.I. *Metal structures: textbook for students. Institutions of higher education*. Moscow, IC Academy, 2011; 688.

Fig. 3. A standardized diagram describing steel behaviour

Fig. 4. An idealized diagram of steel behaviour (the Prandtl diagram)

Fig. 5. The diagram, describing steel behaviour pursuant to Construction regulations

 Table 7. The numerical value of buckling force N_{cr} with regard for the physical nonlinearity

Type of diagram			N_{cr} depending on rod flexibility λ				
			60	80	100	120	130
1	$\Delta = 100 \times (1 - \text{Const. regulations/Femap}), \%$	$\Delta_{\max} = 17.7 \%$	201.52	188.67	157.22	131	112.36
2		$\Delta_{\max} = 18.21 \%$	193.9	188.94	168	131.77	116.06
3		$\Delta_{\max} = 17.45 \%$	194.26	181.25	153.38	130.63	112.08
Normative value N_{cr} according to Const. regulations 16.13330			199.37	170.42	137.41	107.83	95.51

portionality limit and the yield point of the material. If idealized diagram 2 is used, convergence between the results of the numerical analysis and the methodology specified in Construction regulations goes down, although calculations take a little less time. The use of piecewise linear diagram 3 according to the recommendations provided in the regulatory documentation for the design of steel structures SP 16.13330 generates the best convergence of results when compared with the Regulations for the stability analysis of axially compressed rods. The application of this diagram reduces the amount of time spent for calculations by 10 % compared with diagram 1, but it takes 18.5 % more time than the calculation pattern described in diagram 2. It is noteworthy that the numerical calculation involving an idealized diagram and the minimal amount of time did not generate any anticipated results. This type of diagram and the nonlinear problem statement cannot reproduce the buckling of flexible rods. For flexible rods, buckling must occur at stresses below the elastic limit. This phenomenon is demonstrated in diagrams 1 and 3.

Let's analyze the stability of an i-beam under warping with regard for the recommendations concerning the choice of a diagram and a mesh for the model.

When the rod (Fig. 6) is twisted by bimoment B , additional stresses arise in the cross section; they exceed the stress arising under axial compression. The sum of these stresses can transfer the rod to a post-buckling condition; hence, it will lose stability. A pair of concentrated forces was applied to create the bimoment in the rod under study.

Fig. 6. An axially-compressed twisting cantilever i-beam

The nonlinear static module of Femap with NX Nastran PC was used to analyze the bearing capacity and the post-buckling behavior of the structure, or to perform the so-called deformative stability analysis. The numerical calculation was performed with regard for geometrical and physical nonlinearities. The numerical buckling force under the action of the bi-moment corresponds to the ultimate bearing capacity

of the rod, at which the calculation is interrupted [25]. It is noteworthy that the numerical method developed for axially compressed rods is applicable to the stability analysis of axially-compressed twisted structures under the action of the bi-moment, provided that the results of the planned experiment are comparable with the results of the numerical calculation.

CONCLUSIONS AND DISCUSSION

We can make the following conclusions based on the results of the study:

1. The following finite element mesh is recommended to analyze the stability of an axially-compressed i-beam rod:

- web — 8 pieces;

- wall — 10 pieces;
- along the rod length — 40 pieces.

2. It is recommended to use a simplified diagram describing steel behaviour pursuant to the design standards for steel structures SP 16.13330T to take account of the elastoplastic behavior of steel.

3. The numerical calculation method developed for axially-compressed rods is to be applied to axially-compressed thin-walled rods having an open profile.

4. Moscow State University of Civil Engineering (MGSU) plans to conduct a series of experiments to test the behavior of axially compressed i-beams under the action of a bi-moment and the axial force to verify the reliability of the numerical results. Cantilever i-beams 10B1 will be used in the experiments.

REFERENCES

1. Vlasov V.Z. *Thin-Walled elastic rods*. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1959; 568. (rus.).
2. Vlasov V.Z. Torsion and stability of thin-walled open profiles. *Construction industry*. 1938; 6:49-53; 7:55-60. (rus.).
3. Vlasov V.Z. *Thin-Walled elastic rods (strength, stability, vibrations)*. Moscow; Leningrad, Gosstroyizdat Publ., 1940; 276. (rus.).
4. Timoshenko S.P. On the stability of the flat shape of the I-beam bend. *Bulletin of the St. Petersburg Polytechnic Institute*. 1905; 151-219. (rus.).
5. Wagner H. Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. *NACA Tech. Memo*. 1937; 807:329-343.
6. Panovko Ya.G., Gubanova I.I. *Stability and vibrations of elastic systems*. Moscow, Nauka, 1987; 352. (rus.).
7. Gorbunov B.N. Calculation of spatial frames from thin-walled rods. *Applied Mathematics and Mechanics*. 1943; 1:188. (rus.).
8. Tusnin A.R. *Calculation and design of structures from thin-walled rods of open profile : diss. Dr. tech. sciences*. Moscow, 2004; 37. (rus.).
9. Belyy A.G. *Deformation calculation and stability of thin walled prismatic rods of arbitrary profile compressed with biaxial eccentricity: diss. of candidate of technical Sciences*. St. Petersburg, 2000; 114. (rus.).
10. Vatin N.I., Rybakov V.A. Steel structure calculation — seventh degree of freedom. *StroyPROFIL*. 2007; 2:60-63. (rus.).
11. Kuznetsov I.L., Bogdanovich A.U. Stability of a thin-walled rod of variable section under longitudinal compression and taking into account nonlinear deformations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavod. Construction*. 2003; (2):123-128. (rus.).
12. Back S.Y., Will K.M. A shear-flexible element with warping for thin-walled open beams. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 1998; 43(7):1173-1191. DOI: 10.1002/(sici)1097-0207(19981215)43:7<1173::aid-nme340>3.0.co;2-4
13. Pavazza R., Matoković A., Vukasović M. A theory of torsion of thin-walled beams of arbitrary open sections with influence of shear. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2020; 1-36. DOI: 10.1080/15397734.2020.1714449
14. Pavazza R., Matoković A. Bending of thin-walled beams of open section with influence of shear, part I: Theory. *Thin-Walled Structures*. 2017; 116:357-368. DOI: 10.1016/j.tws.2016.08.027
15. Pavazza R., Matoković A., Vukasović M. Bending of thin-walled beams of open section with influence of shear — Part II: Application. *Thin-Walled Structures*. 2017; 116:369-386. DOI: 10.1016/j.tws.2016.08.026
16. Rizzi N.L., Varano V. The effects of warping on the postbuckling behaviour of thin-walled structures. *Thin-Walled Structures*. 2011; 49(9):1091-1097. DOI: 10.1016/j.tws.2011.04.001
17. Jang G.W., Kim Y.Y. Theoretical analysis of coupled torsional, warping and distortional waves in a straight thin-walled box beam by higher-order beam theory. *Journal of Sound and Vibration*. 2011; 330(13):3024-3039. DOI: 10.1016/j.jsv.2011.01.014
18. Vieira R.F., Virtuoso F.B.E., Pereira E.B.R. A higher order thin-walled beam model including warping and shear modes. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013; 66:67-82. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2012.10.009
19. Brunetti M., Lofrano E., Paolone A., Ruta G. Warping and Ljapounov stability of non-trivial equilibria of non-symmetric open thin-walled beams. *Thin-Walled Structures*. 2015; 86:73-82. DOI: 10.1016/j.tws.2014.10.004

20. Dey P., Talukdar S. Influence of warping on modal parameters of thin-walled channel section steel beam. *Procedia Engineering*. 2016; 144:52-59. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.05.006
21. Argyridi A.K., Sapountzakis E.J. Advanced analysis of arbitrarily shaped axially loaded beams including axial warping and distortion. *Thin-Walled Structures*. 2019; 134:127-147. DOI: 10.1016/j.tws.2018.08.019
22. Rychkov S.P. *Modeling of structures in the environment Femap with NX Nastran*. Moscow, DMK Press, 2013; 783. (rus.).
23. Shimkovich D.G. *Femap & Nastran. Engineering analysis by the finite element method*. Moscow, DMK Press, 2012; 700. (rus.).
24. Prokich M. *Bearing capacity of steel I-beams in bending and torsion taking into account the plastic work of the material: dis. of cand. of technical sciences*. Moscow, 2015; 22. (rus.).
25. Tusnin A.R., Abdurakhmonov A.Kh. Bearing capacity of an axially-compressed i-beam rod under restrained torsion. *Industrial and Civil Engineering*. 2020; 9:21-27. DOI: 10.33622/0869-7019.2020.09.21-27 (rus.).

Received November 2, 2020.

Adopted in revised form on December 6, 2020.

Approved for publication on December 9, 2020.

B I O N O T E S: **Amirshokh Kh. Abdurakhmonov** — leading design engineer; **Project-2018**; build. 1, 27 Ermolaevsky lane, Moscow, 123001, Russian Federation; postgraduate student of the Department of Metal and Wooden Structures; **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**; 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation; 3andya@gmail.com.