Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple

М.Н. Кирсанов, Д.В. Тиньков

Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»),
111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 14

АННОТАЦИЯ

Введение. Исследуются колебания массивного груза на плоской статически определимой симметричной ферме регулярного типа с параллельными поясами. Масса фермы не учитывается. Рассматриваются свободные вертикальные колебания. Жесткость стержней фермы принята одинаковой, деформации упругие. Решетка фермы двойная с нисходящими раскосами и стойками. Новым в постановке и решении задачи является аналитическая форма решения, позволяющая на практике легко оценивать частотные характеристики сооружения в зависимости от произвольного числа панелей фермы и места расположения груза.

Материалы и методы. Используются операторы и методы системы компьютерной математики Maple. Для определения усилий в стержнях применяется метод вырезания узлов. Общие члены последовательностей коэффициентов решения для различных чисел панелей получаются из решения линейных однородных рекуррентных уравнений различного порядка, полученных специальными операторами системы Maple. Зависимость от двух произвольных натуральных параметров выявляется в два этапа. Сначала находятся решения для фиксированных положений груза, затем эти решения обобщаются в одну конечную формулу для частоты.

Результаты. По серии отдельных решений задачи о колебании груза методом двойной индукции удалось найти общие члены всех последовательностей. Решение имеет полиномиальную по обоим натуральным параметрам форму. Графики, построенные для частных случаев, показали адекватность подхода. Отмечен скачкообразный немонотонный характер изменения частоты в зависимости от числа панелей фермы и некоторые другие особенности решения.

Выводы. Показано, что метод индукции, ранее применимый в основном к задачам статики с одним параметром (числом панелей фермы), вполне работоспособен и в задачах колебаний с двумя натуральными параметрами. Следует отметить возникающие значительные трудозатраты и существенный рост времени символьных преобразований в таких задачах.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: ферма, колебания, двойная индукция, Maple, частота колебаний, точное решение, место груза, число панелей фермы

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Кирсанов М.Н., Тиньков Д.В. Аналитическое решение задачи о частоте колебания груза в произвольном узле балочной фермы в системе Maple // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. Вып. 4. Ст. 3. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3

Analytical solution of the frequency of the load oscillation at an arbitrary girder node in the system Maple

Mikhail N. Kirsanov, Dmitriy V. Tinkov

National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (MPEI),
14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation

ABSTRACT

Introduction. We study the oscillations of a massive load on a planar statically definable symmetric truss of a regular type with parallel belts. Truss weight is not included. Free vertical oscillations are considered. The stiffness of the truss rods is assumed to be the same, the deformations are elastic. Lattice of the truss is double with descending braces and racks. New in the formulation and solution of the problem is the analytical form of the solution, which makes it possible in practice to easily evaluate the frequency characteristics of the structure depending on an arbitrary number of truss panels and the location of the load.

Materials and methods. The operators and methods of the system of computer mathematics Maple are used. To determine the forces in the rods, the knotting method is used. The common terms of the sequence of coefficients of solutions for different numbers of panels are obtained from solving linear homogeneous recurrent equations of various order, obtained by special operators of the Maple system. Dependence on two arbitrary natural parameters is revealed in two stages. First, solutions for fixed load positions are found, then these solutions are summarized into one final formula for frequency.

Results. By a series of individual solutions to the problem of load oscillation using the double induction method, it was possible to find common members of all sequences. The solution is polynomial in both natural parameters. Graphs constructed for particular cases, showed the adequacy of the approach. The discontinuous non-monotonic nature of the intermittent change depending on the number of truss panels and some other features of the solution are noted.

Conclusions. It is shown that the induction method, previously applicable mainly to statics problems with one parameter (number of truss panels), is fully operational to the problems of the oscillations of system with two natural parameters. It should be noted that significant labor costs and a significant increase in the time symbolic transformations in such tasks.

KEYWORDS: truss, vibrations, double induction, Maple, oscillation frequency, exact solution, load location, number of truss panels

FOR CITATION: Kirsanov M.N., Tinkov D.V. Analytical solution of the frequency of the load oscillation at an arbitrary girder node in the system Maple. *Construction: Science and Education*. 2018; 8(4):3. URL: <http://nso-journal.ru>. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.4.3. (rus.)

ВВЕДЕНИЕ

С увеличением пролета конструкции повышается значимость ее динамических характеристик. Простейшей и достаточно важной динамической характеристикой является частота колебаний тяжелого груза без учета массы самой конструкции. Такое упрощение постановки имеет смысл в тех случаях, когда масса груза велика по сравнению с массой сооружения, а решение требуется получить в аналитической форме. В качестве груза можно рассматривать, например, подвижный кран в цехе промышленного здания, закрепленный на ферме перекрытия, или движущийся по мосту транспорт. Здесь наиболее интересна зависимость частоты колебаний от места расположения сосредоточенной массы. В такой постановке задача может быть решена аналитически для плоской статически определимой фермы с произвольным числом панелей. Надежду на получение аналитической зависимости частоты от двух параметров дает успешный опыт решения задач статики подобных ферм методом двойной индукции. В работе [1] с применением системы символьной математики решена задача о зависимости прогиба плоской шпренгельной фермы от числа панелей. Формула для прогиба с применением системы Maple выведена для распорной фермы в труде [2]. Решетчатые фермы различной конфигурации исследованы методом индукции [3–5]. Получены простые аналитические решения для арочных ферм [6–8]. В статьях [9, 10] приведены формулы для прогиба внешне статически неопределимых ферм, т.е. для ферм, реакции опор которых можно найти либо с помощью принципа возможных перемещений, либо общей системы уравнений для всех стержней. Методом индукции [11–13] выведены общие формулы для прогиба и напряжений в пространственных фермах. Строительный подъем методом малого параметра учтен в аналитическом решении [14], также полученным методом индукции. Значительно меньше решений о колебаниях фермы или груза на ферме рассмотрено в работах [11–13].

В общем случае для поиска собственных частот симметричной конструкции периодической структуры с большим числом элементов обычно с успехом применяются численные методы на основе, как правило, метода конечных элементов [15, 16]. Традиционные численные методы [17–19], хотя и позволяют получить решения достаточно сложных задач, имеют ограничения, например, по числу панелей. Это связано с накоплением погрешности вычислений, растущей с увеличением количества элементов [20]. В статье [21] предлагается алгоритм преодоления некоторых численных проблем такого типа. Символьные методы системы Maple используются в анализе математических особенностей расчетов ферм [22].

Аналитические решения, одно из которых получается ниже, можно использовать в качестве тестовых для численных расчетов конструкций с большим числом элементов.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ.

Ферма

Рассмотрим плоскую балочную ферму с параллельными поясами (рис. 1). Особенностью конструкции являются нисходящие раскосы, охватывающие две панели («двойная решетка») и боковые укороченные раскосы. Структура фермы регулярная, к ее расчету применим метод индукции. Обозначено: n — число панелей в половине пролета; k — местоположение груза; h — высота фермы; a — длина панели.

Пренебрегая горизонтальными движениями, рассмотрим вертикальные колебания k узла с массой m .

В ферме $n_s = 8n + 5$ стержней, из которых $4n$ длиной a находятся в верхнем и нижнем поясах, $2n + 1$ стержней длиной h , четыре стержня длиной $h/2$, и четыре стержня длиной $\sqrt{a^2 + (h/2)^2}$ и $2(n - 1)$ длиной $\sqrt{4a^2 + h^2}$ составляют решетку.

Формула для искомой частоты следует из уравнения колебания груза $m\ddot{y} + Cy = 0$, где y — вертикальное смещение груза массой m . Величина

Рис. 1. Ферма при $n = 6$

жесткости обратна податливости $C = 1/\delta_{n,k}$. Следовательно, частота колебаний равна

$$\omega_{n,k} = \sqrt{1/(\delta_{n,k}m)}. \quad (1)$$

Податливость $\delta_{n,k}$ вычисляется по формуле Максвелла—Мора

$$\delta_{n,k} = \sum_{i=1}^{n_s-3} R_i^2 l_i / (EF),$$

где R_i — усилие в i -м стержне фермы от единичной вертикальной силы в узле, где расположен груз; l_i — длина стержня; EF — жесткость стержня. Для упрощения расчетов примем жесткость стержней одинаковой. Усилия в стержнях от единичной нагрузки определяются методом вырезания узлов. Для этого составляется система уравнений равновесия всех узлов фермы, кроме трех, закрепленных на земле. Матрица этой системы размером $n_s \times n_s$ состоит из направляющих косинусов усилий, которые вычисляются по координатам концов стержней. В нечетные строки вводятся проекции усилий на горизонтальную ось x , в четные — на вертикальную y . Вектор правой части состоит из проекций внешней нагрузки, приложенной к узлам фермы. Для ускорения символьных преобразований при решении системы линейных уравнений применяется метод обратной матрицы, который в системе Maple реализуется весьма просто, без подключения пакета линейной алгебры LinearAlgebra. Выражения для усилий в отдельных стержнях, полученные из решения, выписывать не требуется. По этим усилиям для фермы с некоторым заданным числом панелей сразу получается выражение для податливости при фиксированном положении груза.

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

При расчете усилий и коэффициента жесткости для ферм с разным числом панелей и при различном положении груза было замечено, что форма решения имеет один и тот же вид (свойство регулярности конструкции):

$$\delta_{n,k} = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (2h^2 n^2), \quad (2)$$

$$c = \sqrt{4a^2 + h^2},$$

где коэффициенты C_1, C_2, C_3 находятся методом индукции в два приема. Сначала при фиксированном положении груза $k = 1$ (первый узел от опоры) находятся решения для ряда панелей, которые мето-

дом индукции обобщаются на произвольное число панелей:

$$C_1 = (8n^3 - 12n^2 + (3(-1)^n + 13)n - 3 + 3(-1)^n) / 3,$$

$$C_2 = (4n^2 + (2 + 2(-1)^n)n + (-1)^n - 1) / 8,$$

$$C_3 = (12n^2 - (2 + 2(-1)^n)n - 3 + 3(-1)^n) / 8.$$

Для этого по ряду коэффициентов при a^3, c^3 и h^3 с помощью оператора *rgf_findrecur* выписываются рекуррентные уравнения, которым удовлетворяют эти последовательности, затем из решения полученных уравнений находятся общие члены последовательностей. Так для получения коэффициента C_1 было получено линейное однородное уравнение шестого порядка

$$C_{1,n} = 2C_{1,n-1} + C_{1,n-2} - 4C_{1,n-3} + C_{1,n-4} + 2C_{1,n-5} - C_{1,n-6}.$$

Для решения уравнения привлекается оператор *rsolve*. Аналогично находятся и другие коэффициенты.

Эти же коэффициенты находятся и при других положениях груза:

$$k = 2: C_1 = (32n^3 - 48n^2 + (24(-1)^{n+1} + 40)n - 12 + 12(-1)^n) / 3,$$

$$k = 3: C_1 = (72n^3 - 204n^2 + (27(-1)^n + 189)n - 27 + 27(-1)^n) / 3,$$

$$k = 4: C_1 = (128n^3 - 480n^2 + (72(-1)^{n+1} + 520)n - 48 + 48(-1)^n) / 3,$$

...

Коэффициенты в этих решениях также образуют последовательности, у которых можно найти упомянутым способом общие члены. Например, последовательность вторых слагаемых в коэффициенте при n имеет вид: 13, 40, 189, 520, 1285, 2592, 4837, 8176, 13 149, 19 960, 29 293, 41 400, 57 109, 76 720. Рекуррентное уравнение для этой последовательности длиной 14 имеет седьмой порядок

$$W_k = 3W_{k-1} - W_{k-2} - 5W_{k-3} + 5W_{k-4} + W_{k-5} - 3W_{k-6} + W_{k-7}.$$

Решение уравнения имеет вид

$$W_k = 2k^4 - k^2 + 3(3 - (-1)^k)k.$$

Выбор длины последовательности определяется наличием решения соответствующего рекуррентного уравнения. Если в результате анализа решений некоторого числа ферм (или нескольких положений груза) уравнение не имеет решения, то это означает, что необходимо рассчитать еще несколько ферм. К тому же оператор *rgf_findrecur* имеет только четное число аргументов.

Опуская промежуточные результаты, выпишем все окончательные выражения в формуле для жесткости

$$C_1 = (8k^2n^3 - 2(4k^3 - 4k + 3 - 3(-1)^k)n^2 + \\ + (3(-1)^k k^2 - ((-1)^k + 1)k)(-1)^n + \\ + 2k^4 - k^2 + 3(3 - (-1)^k)kn + 3k^2((-1)^n - 1))/3;$$

$$C_2 = \left((8k - 2 - 2(-1)^k n^2 n(1 - (-1)^k)k) + \right. \\ \left. + (-1)^n (4(-1)^{k+1} k^2 + k(-1 + (-1)^k)) - k^2(1 - (-1)^n) \right) / 8, \\ C_3 = \left((8k + 6(-1)^k - 6)n^2 + n(1 - k(3(-1)^k)) + k(7(-1)^k + \right. \\ \left. + 4(-1)^{k+1} k - 3)(-1)^n + 3k^2((-1)^n - 1) \right) / 8.$$

Хорошей проверкой полученного решения являются выражения для коэффициентов, полученные для положения груза в середине пролета, т.е. при $k = n$. Решение этой задачи не требует утомительной двойной индукции и получается просто.

Мигающие коэффициенты $(-1)^n$ характерны для конструкций с панелями, у которых однотипные панели чередуются в конструкции (панель с нисходящим раскосом, далее панель с восходящим раско-

Рис. 2. Зависимость частоты колебаний груза от местоположения, $n = 10$: 1 — $h = 1,4$ м; 2 — $h = 1,2$ м; 3 — $h = 1,0$ м

Рис. 3. Зависимость частоты колебаний груза от места, числа панелей, $h = 4$ м; $L = 50$ м

сом) или стержни соединяют узлы не сопряженных панелей.

Частота колебаний груза зависит от положения груза и числа панелей. По аналитическому решению, это легко проиллюстрировать на графике (рис. 2, 3). Введем безразмерную частоту

$$\omega' = \omega_{n,k} \sqrt{ma / (EF)}. \quad (3)$$

Кривые на рис. 2 построены при различных высотах фермы с десятью панелями в половине пролета. На второй половине пролета кривая симметрична построенной. От высоты h фермы зависимость частоты почти линейная. В середине пролета можно наблюдать слабо выраженные локальные минимумы. На рис. 3 построены зависимости (3) для трех положений груза в начале пролета и высоте фермы $h = 4$ м. Так же, как и на рис. 2, кривые получаются ломаными. Частота колебаний уменьшается с увеличением числа панелей и приближением груза к середине пролета. Следует отметить точки самопересечения кривых и существенные скачки кривых в начале графика.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из общей проблемы динамики и колебаний ферм вычленена и отдельно решена в аналитической форме задача о зависимости частоты колебания груза от его места расположения при произвольном числе панелей фермы. Рассмотрена одна из моделей симметричной раскосной фермы со стойками и параллельными поясами. Для вывода потребовался метод двойной индукции. Успех достигнут за счет регулярности объекта, применения операторов системы Maple и большого числа подобных решений для отдельных ферм. Применение

системы компьютерной математики Maple позволило обобщить решение для двухпараметрической задачи. Решение проверено численными методами при различных сочетаниях числа панелей и места расположения груза.

ОБСУЖДЕНИЕ

Аналитические методы занимают особое место в ряду различных подходов к проблеме расчета, оптимизации и конструирования строительных конструкций. Задача о колебаниях, даже если идет речь только о частотах колебаний, в таких подходах всегда упирается в решение уравнения частот. Реально получить простое аналитическое решение уравнения частот возможно только для колебаний с одной или двумя степенями свободы. В настоящем исследовании с учетом только вертикальных колебаний тяжелого груза на достаточно легкой ферме получено простое решение, целью которого было в основном исследование влияния *места* положения груза на ферме. При этом удалось также обобщить эту задачу на произвольное число панелей. Следует отдавать отчет, что предельное упрощение проблемы не всегда применимо в практических расчетах, но как некоторая надежная граница, свободная от накопления ошибок округления, для возможных отклонений более сложных численных решений, оно может быть полезно.

Построенные графики решения обнаруживают некоторые особенности, которые следует учитывать при проектировании конструкций ферм.

Обзоры применения аналитических методов решения задач статики плоских ферм с применением метода индукции и системы Maple даны в работах [8, 23].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахмедова Е.Р. Аналитический расчет прогиба плоской фермы со шпренгельной решеткой // Trends in Applied Mechanics and Mechatronics : сб. науч. тр. М. : Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 62–65.
2. Кирсанов М.Н. Анализ прогиба решетчатой балочной фермы распорного типа // Инженерно-строительный журнал. 2015. № 5 (57). С. 58–65. DOI: 10.5862/MCE.57.5
3. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder // Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture. 2016. No. 1 (29). Pp. 84–105.
4. Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Плясова А.А. Индуктивный анализ деформативности решетчатой фермы при несимметричном загрузе-

- нии // Строительная механика и конструкции. 2018. № 3 (18). С. 33–41.
5. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type // Architecture and Engineering. 2016. Vol. 1. Issue 3. Pp. 14–17. DOI: 10.23968/2500-0055-2016-1-3-14-17
6. Savinyh A. Analysis of deflection of the arch truss loaded at the upper belt // Construction and Architecture. 2017. Vol. 5. No. 3. Pp. 150–153. DOI: 10.12737/article_59cd03d2d376e2.79712636
7. Рахматулина А.Р., Смирнова А.А. О зависимости прогиба арочной фермы, нагруженной по верхнему поясу, от числа панелей // Научный альманах. 2017. № 2–3 (28). С. 268–271. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.268
8. Осадченко Н.В. Аналитические решения задач о прогибе плоских ферм арочного типа // Стро-

ительная механика и конструкции. 2018. Т. 1. № 16. С. 12–33.

9. *Astakhov S.* The derivation of formula for deflection of statically indeterminate externally flat truss under load at midspan // *Construction and Architecture*. 2017. Vol. 5. Issue 2. Pp. 50–54. DOI: 10.12737/article_596f6d7da0eb38.03494133

10. *Белянкин Н.А., Бойко А.Ю., Плясова А.А.* Формулы для определения деформаций внешне статически неопределимой фермы от действия сосредоточенной и распределенной нагрузки // *Строительство и архитектура*. 2017. Т. 5. № 4. С. 197–200. DOI: 10.29039/article_5a40b0089ddb3.96268787

11. *Кирсанов М.Н.* Статический расчет и анализ пространственной стержневой системы // *Инженерно-строительный журнал*. 2011. № 6. С. 28–34. DOI: 10.5862/MCE.24.1

12. *Доманов Е.В.* Аналитическая зависимость прогиба пространственной консоли треугольного профиля от числа панелей // *Научный альманах*. 2016. № 6–2 (19). С. 214–217. DOI: 10.17117/na.2016.06.02.214

13. *Кирсанов М.Н.* Аналитический расчет пространственной стержневой регулярной структуры с плоской гранью // *Строительная механика и расчет сооружений*. 2015. № 2 (259). С. 2–6.

14. *Ларичев С.А.* Индуктивный анализ влияния строительного подъема на жесткость пространственной балочной фермы // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics* : сб. науч. тр. М. : Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 4–8.

15. *Канатова М.И.* Частотное уравнение и анализ колебаний плоской балочной фермы // *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics* : сб. науч. тр. М. : Инфра-М, 2015. Т. 1. С. 31–34.

16. *Ахмедова Е.Р., Канатова М.И.* Собственные частоты колебаний плоской балочной фермы

регулярной структуры // *Наука и образование в XXI веке* : сб. науч. тр. по мат. Междунар. науч.-практ. конф. 31.10.2014 в 17 частях. Ч. 11. Тамбов : Консалтинговая компания «Юком», 2014. С. 17–19.

17. *Уфимцев Е.М.* Определение усилий в стержнях фермы в процессе колебаний // *Вестник ЮУрГУ. Сер. : Строительство и архитектура*. 2011. Вып. 13. № 35. С. 11–15. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/opredelenie-usiliy-v-strezhnyah-fermy-v-protsesse-kolebaniy>

18. *Ufimtsev E., Voronina M.* Research of total mechanical energy of steel roof truss during structurally nonlinear oscillations // *Procedia Engineering*. 2016. Vol. 150. Pp. 1891–1897. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.188

19. *Ufimtsev E.* Dynamic calculation of nonlinear oscillations of flat trusses Part 2: Examples of calculations // *Procedia Engineering*. 2017. Vol. 206. Pp. 850–856. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.562

20. *Branco J.M., Sousa H.S., Tsakanika E.* Non-destructive assessment, full-scale load-carrying tests and local interventions on two historic timber collar roof trusses // *Engineering Structures*. 2017. Vol. 140. Pp. 209–224. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.02.053

21. *Zhang L., Gao Q., Zhang H.W.* An efficient algorithm for mechanical analysis of bimodular truss and tensegrity structures // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. Vol. 70. Pp. 57–68. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2013.02.002

22. *Ioakimidis N.I., Anastasselou E.G.* Gröbner bases in truss problems with Maple // *Computers & Structures*. 1994. Vol. 52. Issue 5. Pp. 1093–1096. DOI: 10.1016/0045-7949(94)90093-0

23. *Тиньков Д.В.* Сравнительный анализ аналитических решений задачи о прогибе ферменных конструкций // *Инженерно-строительный журнал*. 2015. № 5 (57). С. 66–73. DOI: 10.5862/MCE.57.6

Поступила в редакцию 14 октября 2018 г.

Принята в доработанном виде 10 ноября 2018 г.

Одобрена для публикации 30 ноября 2018 г.

О Б АВТОРАХ: **Кирсанов Михаил Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, **Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»)**, 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, c216@ya.ru;

Тиньков Дмитрий Владимирович — аспирант кафедры робототехники, мехатроники, динамики и прочности машин, **Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»)**, 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, dvinkov@yandex.ru.

INTRODUCTION

With the increase of the span of the structure there increases the importance of its dynamic characteristics. The simplest and rather important dynamic characteristic is the frequency of vibrations of a heavy load without taking into account the mass of the structure itself. This simplification of the statement is reasonable when the mass of the lead is large compared to the mass of the structure, and the solution is required to be obtained in an analytical form. As a lead a mobile crane in a workshop of an industrial building, mounted on a concrete slab truss, or transport moving along the bridge may be considered. Here the most interesting is the vibrational frequency's dependence on the location of a concentrated mass. In such a formulation, the problem may be solved analytically for a flat, statically definable truss with the unspecified number of panels. The hope of obtaining an analytical dependence of frequency on two parameters is given by a successful experience of solving issues of statics of similar trusses using the method of double induction. Using [1] the system of symbolic mathematics, the problem of the dependence of the deflection of a flat truss structure on the number of panels was solved. The formula for the deflection using the Maple system is derived for the girder truss in labor [2]. Lattice trusses of various configurations were studied by induction method [3–5]. The simple analytical solutions for arch trusses were obtained [6–8]. The articles [9, 10] provide formulas for the deflection of externally statically indeterminate trusses, i.e., trusses whose support reactions can be found either using the principle of possible displacements or by the general system of equations for all rods. With the help of the induction method [11–13], there were derived general formulas for deflection and tensions in spatial trusses. The construction rise with the small parameter method is taken into account in the analytical solution [14], which was also obtained by the induction method. Significantly fewer solutions about truss or load vibrations are considered in works [11–13].

In general, numerical methods based on, as a rule, the finite element method [15, 16] are usually successfully used to search natural frequencies for a symmetric structure of a periodic structure with a large number of elements. Traditional numerical methods [17–19], although they allow obtaining solutions to complex issues, have limitations, for example, in the number of panels. This is due to the accumulation of calculation

errors, which increases with an increase of the number of the elements [20]. The article [21] proposes an algorithm for overcoming some numerical problems of this type. Symbolic methods of the Maple system are used in the analysis of mathematical features of calculations of trusses [22].

Analytical solutions, one of which is obtained below, can be used as test one for numerical calculations of structures with a large number of elements.

MATERIALS AND METHODS

Truss

Let us consider a flat girder truss with parallel belts (Fig. 1). The design feature is downward bracing, covering the two panels ("double lattice") and the side-cropped braces. The structure of the truss is regular; we apply the induction method to its calculation. It is denoted: n — the number of panels in the half of span; k — the location of the lead; h — a truss height; a — the length of the panel.

Neglecting horizontal movements, let us consider vertical vibrations of a k knot with the mass m .

In a truss there are $n_s = 8n + 5$ rods, from which $4n$ of them of a height are on the upper and lower belts, $2n + 1$ rods of the height h , four rods of $h/2$ length, and four rods of $\sqrt{a^2 + (h/2)^2}$ and $2(n - 1)$ length $\sqrt{4a^2 + h^2}$ make up a lattice.

The formula for the desired frequency follows from the equation of oscillation of the lead $m\ddot{y} + Cy = 0$, where y — is the vertical displacement of the lead of the mass m . The stiffness value is inverse to the ductility $C = 1/\delta_{n,k}$. Therefore, the frequency of vibrations is equal to

$$\omega_{n,k} = \sqrt{1/(\delta_{n,k}m)}. \quad (1)$$

The ductility $\delta_{n,k}$ is calculated by the formula of Maxwell—Mohr

$$\delta_{n,k} = \sum_{i=1}^{n_s-3} R_i^2 l_i / (EF).$$

Here R_i is the force in the i rod of the truss from the unit vertical force in the node where the mass is located; l_i — the length of the rod; EF — the stiffness of the rod. To simplify the calculations, we take the same stiffness of the rods. The forces in the rods from the unit load are determined by the method of cutting the knots. For this

Fig. 1. Truss with $n = 6$

purpose, a system of equilibrium equations is drawn up for all knots of the truss, except for three, fixed on the ground. The matrix of this system of the size $n_s \times n_s$ consists of directing cosines of forces, which are calculated by the coordinates of the ends of the rods. The force projection onto the horizontal axis x is added to the odd-numbered lines, onto the vertical y — to the even-numbered ones. The vector of the right side consists of the projections of the external load applied to the truss knots. To speed up symbolic transformations when solving a system of linear equations, the inverse matrix method is used, which is implemented very simply in the Maple system without connecting the linear algebra package LinearAlgebra. Expressions for the forces in separate rods, obtained from the solution, are not required to write out. Taking into account forces for a truss with a certain given number of panels, an expression for ductility at a fixed load position is obtained immediately.

RESEARCH RESULTS

When calculating the force and stiffness coefficient for trusses with different numbers of panels and at different load positions, it was noted that the solution is of the same type (regularity property of the structure):

$$\delta_{n,k} = (C_1 a^3 + C_2 c^3 + C_3 h^3) / (2h^2 n^2),$$

$$c = \sqrt{4a^2 + h^2}, \quad (2)$$

where the coefficients C_1, C_2, C_3 are determined by the induction method in two steps. First at a fixed position of the load $k = 1$ (the first knot of the support) there are determined the solutions for a series of panels, which by the method of induction are generalized to the unspecified number of panels:

$$C_1 = (8n^3 - 12n^2 + (3(-1)^n + 13)n - 3 + 3(-1)^n) / 3,$$

$$C_2 = (4n^2 + (2 + 2(-1)^n)n + (-1)^n - 1) / 8,$$

$$C_3 = (12n^2 - (2 + 2(-1)^n)n - 3 + 3(-1)^n) / 8.$$

For this, according to a number of factors at a^3, c^3 and h^3 using the operator *rgf_findrecur* the recurrent equations that meet these sequences are written out, then the general terms of the sequences are found from the solution of the obtained equations. So to get the coefficient C_1 a linear homogeneous equation of the sixth order was obtained

$$C_{1,n} = 2C_{1,n-1} + C_{1,n-2} - 4C_{1,n-3} +$$

$$+ C_{1,n-4} + 2C_{1,n-5} - C_{1,n-6}.$$

To solve the equation the operator *rsolve* is involved. Similarly, there are other coefficients are found. The same coefficients are found for other load positions:

$$k = 2: C_1 = (32n^3 - 48n^2 + (24(-1)^{n+1} + 40)n -$$

$$- 12 + 12(-1)^n) / 3,$$

$$k = 3: C_1 = (72n^3 - 204n^2 + (27(-1)^n + 189)n -$$

$$- 27 + 27(-1)^n) / 3,$$

$$k = 4: C_1 = (128n^3 - 480n^2 + (72(-1)^{n+1} + 520)n -$$

$$- 48 + 48(-1)^n) / 3,$$

The coefficients in these solutions also form sequences in which one can find the mentioned special singular common terms. For example, the second summands' sequence in the coefficient at n is 13, 40, 189, 520, 1285, 2592, 4837, 8176, 13 149, 19 960, 29 293, 41 400, 57 109, 76 720. The recurrent equation for this sequence of 14 length has the seventh order

$$W_k = 3W_{k-1} - W_{k-2} - 5W_{k-3} +$$

$$+ 5W_{k-4} + W_{k-5} - 3W_{k-6} + W_{k-7}.$$

The solution of the equation is

$$W_k = 2k^4 - k^2 + 3(3 - (-1)^k)k.$$

The choice of the length of a sequence is determined by the presence of a solution of a corresponding recurrent equation. If, in the result of analyzing the solutions of a number of trusses (or several load positions), the equation does not have a solution, it means that several more trusses need to be calculated. In addition, the operator *rgf_findrecur* has only the even number of arguments. Omitting the intermediate outcomes, let us write out all the final expressions in the formula for stiffness.

$$C_1 = (8k^2 n^3 - 2(4k^3 - 4k + 3 - 3(-1)^k)n^2 +$$

$$+ (3(-1)^k k^2 - ((-1)^k + 1)k)(-1)^n +$$

$$+ 2k^4 - k^2 + 3(3 - (-1)^k)kn + 3k^2((-1)^n - 1)) / 3;$$

$$C_2 = ((8k - 2 - 2(-1)^k n^2(1 - (-1)^k)k) +$$

$$+ (-1)^n(4(-1)^{k+1} k^2 + k(-1 + (-1)^k)) - k^2(1 - (-1)^n)) / 8,$$

$$C_3 = ((8k + 6(-1)^k - 6)n^2 + n(1 - k(3(-1)^k)) + k(7(-1)^k +$$

$$+ 4(-1)^{k+1} k - 3)(-1)^n + 3k^2((-1)^n - 1)) / 8.$$

The best test of the solution obtained is the expressions for the coefficients obtained for the position of the load in the middle of the span, i.e. with $k = n$. The solution to this problem does not require tedious double induction and it turns out simply.

Flashing coefficients $(-1)^n$ are typical for constructions with panels, where equitope panels alternate in a construction (a panel with a downward diagonal, then

Fig. 2. The dependence of the frequency of vibrations of the load on its location, $n = 10$: 1 — $h = 1.4$ m; 2 — $h = 1.2$ m; 3 — $h = 1.0$ m

Fig. 3. Dependence of the frequency of vibrations of the load on the place of the number of panels, $h = 4$ m; $L = 50$ m

the panel with the ascending diagonal), or rods that connect knots of non-conjugate panels.

Frequency of the vibrations of the load depends on the position of the load and the number of panels. According to the analytical solution, it is easy to illustrate on the graph (Fig. 2, 3). Let us introduce the dimensionless frequency

$$\omega' = \omega_{n,k} \sqrt{ma / (EF)}. \quad (3)$$

The strains at fig. 2 are built up at different heights of the truss with ten panels in a half of a span. In the second half of the span, the strain is symmetric to the built one. From the truss height h the frequency dependence is almost linear. In the middle of the span there can be observed feebly marked local minima. At fig. 3 there are built up dependencies (3) for three load locations in the beginning of the span and at the height of the truss where $h = 4$ m. As at fig. 2, the strains are broken. The frequency of the vibrations decreases with

the increase of the number of panels and the approach of the load to the middle of the span. The points of self-intersection of the strains and significant jumps of the strains at the beginning of the graph should be noted.

CONCLUSION

From the general problem of the dynamics and vibrations of trusses, the problem of the dependence of the frequency of vibrations of the load on its location with the unspecified number of truss panels is singled out and separately solved in an analytical form. One of the models of a symmetric diagonal truss with vertical posts and parallel belts is considered. For the output, a double induction method was required. The success is achieved due to the regularity of the object, the use of Maple system operators and a large number of similar solutions for individual trusses. The use of the Maple computer mathematics system allowed us to generalize

the solution for a two-parameter problem. The solution is verified numerically at various combinations of the number of panels and the location of the load.

DISCUSSION

Analytical methods occupy a special place in a number of different approaches to the problem of calculating, optimizing and designing building structures. The problem of vibrations even if we are talking only about their frequencies, in such approaches always depends on solving the equation of frequencies. In reality, a simple analytical solution of the frequency equation is possible only for vibrations with one or two degrees of freedom. In the present study, taking into account only the vertical vibrations of a heavy load on a fairly light truss, a simple solution was obtained, the purpose

of which was mainly to study the influence of the location of the load on the truss. It was also possible to generalize this problem to an arbitrary number of panels. It should be noted that the limiting simplification of the problem is not always applicable in practical calculations, but as some reliable boundary, free from the accumulation of rounding errors, may be useful for possible deviations of more complex numerical solutions.

The constructed graphs of the solution reveal some features that should be considered when designing truss structures.

Reviews of the use of analytical methods for solving problems of statics of flat trusses using the induction method and the Maple system are given in the works [8, 23].

REFERENCES

1. Akhmedova E.R. [Analytical calculation of deflection of a flat truss with a spindle grating]. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. Moscow, Infra-M Publ., 2015; 1:62-65. (rus.).
2. Kirsanov M.N. Analysis of the deflection of a strut-type lattice girder truss. *Magazine of Civil Engineering*. 2015; 5(57):58-65. DOI: 10.5862/MCE.57.5 (rus.).
3. Kirsanov M.N. Analytical calculation, marginal and comparative analysis of a flat girder. *Scientific Herald of the Voronezh State University of Architecture and Civil Engineering. Construction and Architecture*. 2016; 1(29):84-105.
4. Belyankin N.A., Boyko A.Yu., Plyasova A.A. [Inductive analysis of the deformability of mnogoyazychnoi farm under asymmetric load case]. *Construction mechanics and structures*. 2018; 3(18):33-41. (rus.).
5. Kirsanov M. An inductive method of calculation of the deflection of the truss regular type. *Architecture and Engineering*. 2016; 1(3):14-17. DOI: 10.23968/2500-0055-2016-1-3-14-17
6. Savinyh A. Analysis of deflection of the arch truss loaded at the upper belt. *Construction and Architecture*. 2017; 5(3):150-153. DOI: 10.12737/article_59cd03d2d376e2.79712636
7. Rakhmatulina A.R., Smirnova A.A. The dependence of the deflection of the arched truss loaded on the upper belt, on the number of panels. *Science Almanac*. 2017; 2-3(28):268-271. DOI: 10.17117/na.2017.02.03.268 (rus.).
8. Osadchenko N.V. Analytical solutions of problems on the deflection of planar trusses of arch type. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2018; 1(16):12-33. (rus.).
9. Astakhov S. The derivation of formula for deflection of statically indeterminate externally flat truss under load at midspan. *Construction and Architecture*. 2017; 5(2):50-54. DOI: 10.12737/article_596f6d7da0eb38.03494133
10. Belyankin N.A., Boyko A.Yu., Plyasova A.A. Formulas for determining deformations of an externally statically indeterminate truss from the action of a concentrated and distributed load. *Construction and Architecture*. 2017; 5(4):197-200. DOI: 10.29039/article_5a40b0089ddb3.96268787 (rus.).
11. Kirsanov M.N. Static calculation and analysis of spatial rod system. *Magazine of Civil Engineering*. 2011; 6:28-34. DOI: 10.5862/MCE.24.1 (rus.).
12. Domanov E.V. The analytical dependence of the deflection spatial console triangular profile of the number of panels. *Science Almanac*. 2016; 6-2(19):214-217. DOI: 10.17117/na.2016.06.02.214 (rus.).
13. Kirsanov M.N. Analytical calculation of the spatial truss regular structures with a flat face. *Structural Mechanics and Analysis of Constructions*. 2015; 2(259):2-6. (rus.).
14. Larichev S.A. Inductive analysis of impact of camber on rigidity of spatial girder truss. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. Moscow, Infra-M Publ., 2015; 1:4-8. (rus.).
15. Kanatova M.I. [Frequency equation and vibration analysis of a flat beam truss]. *Trends in Applied Mechanics and Mechatronics*. Moscow, Infra-M Publ., 2015; 1:31-34. (rus.).
16. Akhmedova E.R., Kanatova M.I. [Natural frequencies of the flat girder, regular structure]. *Science and education in the XXI century: collection of scientific works on the materials of the International scientific-practical conference 31.10.2014 in 17 parts. Part. 11*. Tambov, Konsaltingovaya kompaniya "Yukom" Publ., 2014; 17-19. (rus.).

17. Ufimtsev E.M. Estimation of the efforts in trusses in the process of vibrations. *Bulletin of South Ural state University. Ser : Construction and architecture*. 2011; 13(35):11-15. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/opredelenie-usiliy-v-strezhnyah-fermy-v-protsesse-kolebaniy> (rus.).
18. Ufimtsev E., Voronina M. Research of total mechanical energy of steel roof truss during structurally nonlinear oscillations. *Procedia Engineering*. 2016; 150:1891-1897. DOI: 10.1016/j.proeng.2016.07.188
19. Ufimtsev E. Dynamic calculation of nonlinear oscillations of flat trusses Part 2: Examples of calculations. *Procedia Engineering*. 2017; 206:850-856. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.10.562
20. Branco J.M., Sousa H.S., Tsakanika E. Non-destructive assessment, full-scale load-carrying tests and local interventions on two historic timber collar roof trusses. *Engineering Structures*. 2017; 140:209-224. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.02.053
21. Zhang L., Gao Q., Zhang H.W. An efficient algorithm for mechanical analysis of bimodular truss and tensegrity structures. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013; 70:57-68. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2013.02.002
22. Ioakimidis N.I., Anastasselou E.G. Gröbner bases in truss problems with Maple. *Computers & Structures*. 1994; 52(5):1093-1096. DOI: 10.1016/0045-7949(94)90093-0
23. Tin'kov D.V. Comparative analysis of analytical solutions to the problem of truss structure. *Magazine of Civil Engineering*. 2015; 5(57):66-73. DOI: 10.5862/MCE.57.6 (rus.).

Received October 14, 2018

Adopted in a modified form on November 10, 2018

Approved for publication November 30, 2018

ABOUT THE AUTHORS: **Mikhail N. Kirsanov** — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Department of robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines, **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**, 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation, c216@ya.ru;

Dmitriy V. Tinkov — graduate student, Department of robotics, mechatronics, dynamics and strength of machines, **National Research University “Moscow Power Engineering Institute” (MPEI)**, 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation, dvtinkov@yandex.ru.