СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ. ОСНОВАНИЯ И ФУНДАМЕНТЫ. ТЕХНОЛОГИЯ И ОРГАНИЗАЦИЯ СТРОИТЕЛЬСТВА

УДК 624.042.7

DOI: 10.22227/2305-5502.2018.3.1

О граничных условиях при расчетах на сейсмостойкость при дифференцированном движении грунта

Е.В. Позняк

*Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»),
111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14*

АННОТАЦИЯ: Предмет исследования: представлен анализ динамической реакции плоской модели двухэтажного здания при распространении поверхностных волн Рэлея. При расчетах применялась дифференцированная модель сейсмического движения грунта, когда сейсмическое воздействие передается на конструкцию в виде кинематического возбуждения грунта в опорных точках. Были рассмотрены шесть вариантов грунтовых условий с различными длинами доминирующих сейсмических волн и три способа задания граничных условий.

Цели: получение уравнений движения плоской сдвигово-поворотной модели здания для дифференцированного сейсмического воздействия; проведение оценки влияния различных компонент сейсмического воздействия на динамическую реакцию конструкции; предложение способов упрощений кинематических граничных условий, в общем случае включающих поступательные и ротационные перемещения грунтового основания в точках опирания.

Материалы и методы: численное моделирование динамической реакции модели здания во временной области при различных вариантах воздействий и граничных условий.

Результаты: получено решение во временной области для трех моделей, различие между которыми заключается в задании движения основания в каждой опорной точке: 1) два поступательных и одно угловое перемещение (точные граничные условия); 2) два поступательных перемещения; 3) два поступательных перемещения и одно угловое, рассчитанное по взаимным поступательным перемещениям.

Выводы: сравнение результатов, полученных при упрощении граничных условий 2) и 3), с точным решением 1), показало, что для обычных грунтовых условий локальными ротационными компонентами дифференцированного сейсмического движения можно пренебречь, рассматривая только пространственное поступательное движение опор.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: динамическая реакция, строительная конструкция, модель здания, дифференцированное сейсмическое движение грунта, волновое сейсмическое воздействие, поверхностные волны Рэлея, сейсмические ротации

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Позняк Е.В. О граничных условиях при расчетах на сейсмостойкость при дифференцированном движении грунта // Строительство: наука и образование. 2018. Т. 8. Вып. 3 (29). Ст. 1. DOI: 10.22227/2305-5502.2018.3.1

About boundary conditions in earthquake engineering analyses for differential seismic ground motion

Elena V. Poznyak

*National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (MPEI),
14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation*

ABSTRACT: Subject: this article presents a dynamic analysis of a plane two-story building model to the dynamic loads that appear during the propagation of Rayleigh surface waves. It is used a differential model of seismic ground motion, that is, the seismic loads are transferred to the structure as kinematic excitation of the ground at the support points. There are considered six variants of ground conditions with different dominant lengths of seismic waves and three ways of definition of boundary conditions.

Materials and methods: numerical simulation of the dynamic response in the time domain was applied.

Results: for a plane shear-rotary model of a building, the equations of motion for the differential seismic ground motion are obtained; an influence of different components of seismic action on the structural dynamic response is estimated; a conclusion about possible simplification of kinematic boundary conditions is drawn. Kinematic boundary conditions include translational and rotational motions of the ground at the support points. A solution is obtained for three models with different boundary conditions at each support point: 1) two translational and one rotational displacements (exact boundary conditions), 2) two translational displacements; 3) two translational displacements and one rotational, calculated by mutual translational displacements.

Conclusions: the results obtained by simplifying boundary conditions 2) and 3) are compared with the exact solution 1) shown that, for normal ground conditions, the local rotational components of differential seismic motion can be neglected, considering only translational motions of supports.

KEY WORDS: dynamic response, building construction, building model, differential seismic ground motion, wave seismic effects, Rayleigh surface waves, seismic rotations

FOR CITATION: Poznyak E.V. O granichnykh usloviyakh pri raschetakh na seysmostoykost' pri differentsirovannom dvizhenii grunta [About boundary conditions in earthquake engineering analyses for differential seismic ground motion]. 2018, vol. 8, issue 3, paper 1. (In Russian). DOI: 10.22227/2305-5502.2018.3.1

ВВЕДЕНИЕ

Дифференцированная модель сейсмического движения грунта применяется при расчетах конструкций на точечных опорах, на податливых фундаментах, когда в спектре воздействия доминируют короткие волны, сравнимые с размерами фундамента. В настоящей статье представлена плоская модель двухэтажного здания под дифференцированным сейсмическим воздействием. Особенность модели состоит в том, что она является сдвигово-поворотной, то есть допускает поступательные (вертикальные и горизонтальные) и угловые перемещения перекрытий, что важно при анализе угловых движений грунта. Общее число степеней свободы модели с двумя жесткими перекрытиями равно шести; воспользовавшись принципом Даламбера, можно относительно легко получить уравнения динамики. Сейсмическое воздействие передается на конструкцию в виде кинематического возбуждения жестко заделанных в грунтовое основание опор, причем грунт в зонах опирания также может совершать поступательные и угловые перемещения. Угловые перемещения грунта могут быть: 1) расчетными, полученными, например, по методике, изложенной в работах [1–4]; 2) оценены по взаимным поступательным перемещениям грунта в опорных точках (в зарубежных источниках такие ротации называют «хордовыми»). При анализе был также рассмотрен случай нулевых ротаций грунта в зонах опирания. Вследствие эффекта продвижения сейсмической волны по основанию кинематическое возбуждение каждой опоры происходит по индивидуальному закону. Было рассмотрено сейсмическое воздействие в виде поверхностных волн Рэлея для шести вариантов грунтовых условий с различными длинами доминирующих сейсмических волн.

Оценку длин доминирующих сейсмических волн проводят по нормированной функции интенсивности $\chi(\bar{\lambda})$ [1–4]. Акселерограмму $\ddot{X}(t)$ представляют в виде суммы p простых гармонических волн с частотой ω_i и длиной $\lambda_i = 2\pi c/\omega_i$, здесь c — фазовая скорость волны ($i = 1, 2, \dots, p$). Пусть $\sigma_{\ddot{X}} = I$ — интенсивность сейсмического воздействия, равная стандарту $\ddot{X}$; $\sigma_{\ddot{X}}(\bar{\lambda})$ — стандарт акселерограммы $\ddot{X}$, из которой отфильтрованы все волны с длинами, меньшими $\bar{\lambda}$. Тогда нормированная интенсивность поступательного движения равна $\chi(\bar{\lambda}) = \sigma_{\ddot{X}}(\bar{\lambda})/I$.

Величина $\chi(\bar{\lambda})$ показывает, какова доля волн с длинами, превышающими $\bar{\lambda}$, в интенсивности воздействия. Значение $\chi(B)$, где B — минимальный размер фундамента конструкции, называют χ -коэффициентом; он применяется для оценки длин доминирующих волн в спектре сейсмического воздействия.

ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

Для иллюстрации волновых эффектов сейсмических воздействий часто рассматривают малоразмерные модели конструкций (здания, опоры и пролеты мостов, вышки связи и т.д.), для которых легко получить уравнения движения и параметры динамической реакции [5–15]. Расчеты на сейсмостойкость обычно проводят, принимая интегральную дилатационную модель сейсмического движения грунта, когда грунтовое основание совершает поступательное пространственное движение без угловых перемещений; примеры расчетов для небольших моделей с выводом уравнений движения и их решением можно найти в работах [5–12, 14]. Вопросам анализа динамической реакции конструкций с учетом ротаций грунта посвящены работы [1–4, 6, 17–19]. Однако примеров иллюстративных расчетов на небольших моделях с выводом динамических уравнений для интегрального ротационного и дифференцированного сейсмических воздействий не так много, в основном это решения для консольной модели при угловых перемещениях основания [5, 11]. Пример протяженной конструкции в виде рамы с тремя сосредоточенными массами под дифференцированным воздействием приведен в исследовании [10], воздействие представлено одномерным поступательным движением опорных точек. В работе [16] была рассмотрена пространственная модель двухэтажного здания при интегральном дилатационно-ротационном воздействии при прохождении поверхностной волны Рэлея. В настоящей работе представлена та же модель для дифференцированного воздействия.

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Расчетная динамическая модель здания и уравнения движения

Модель каркасного здания с двумя перекрытиями под дифференцированным сейсмическим

воздействием, заданным горизонтальными и вертикальными перемещениями основания в опорах u_A, v_A и u_B, v_B , а также ротациями α_A, α_B , показана на рис. 1. Расчетная динамическая модель (РДМ) включает шесть обобщенных координат: абсолютные линейные перемещения X_1, Y_1, X_2, Y_2 и угловые φ_1, φ_2 . Пусть m_1, θ_1 и m_2, θ_2 — массы и моменты инерции перекрытий в главных центральных осях; EI, EF — изгибная жесткость и жесткость на растяжение – сжатие каждой стойки; h — высота этажа; B — ширина перекрытия.

Уравнения движения получим по принципу Даламбера, рассматривая условия равновесия перекрытий. Введем узловые перемещения конечных элементов — стоек $U_i, V_i, \alpha_i, (i=1, \dots, 6)$ (рис. 2). Из условия абсолютной жесткости перекрытий и малости углов поворотов следует связь между узловыми перемещениями и обобщенными координатами:

$$\begin{aligned} U_2 &= U_5 = X_1, \quad U_3 = U_4 = X_2, \\ \alpha_2 &= \alpha_5 = \varphi_1, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \varphi_2, \\ V_2 &= Y_1 - \varphi_1 \frac{B}{2}, \quad V_3 = Y_2 - \varphi_2 \frac{B}{2}, \\ V_5 &= Y_1 + \varphi_1 \frac{B}{2}, \quad V_4 = Y_2 + \varphi_2 \frac{B}{2}; \end{aligned} \quad (1)$$

граничные условия:

$$U_1 = u_A, \quad V_1 = v_A, \quad \alpha_1 = \alpha_A, \quad U_6 = u_B, \quad V_6 = v_B, \quad \alpha_6 = \alpha_B. \quad (2)$$

Матрица жесткости плоского стержневого элемента, работающего на растяжение – сжатие и изгиб

$$\mathbf{K}_{el} = \begin{pmatrix} EF/h & 0 & 0 & -EF/h & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/h^3 & 6EI/h^2 & 0 & -12EI/h^3 & 6EI/h^2 \\ 0 & 6EI/h^2 & 4EI/h & 0 & -6EI/h^2 & 2EI/h \\ -EF/h & 0 & 0 & EF/h & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/h^3 & -6EI/h^2 & 0 & 12EI/h^3 & -6EI/h^2 \\ 0 & 6EI/h^2 & 2EI/h & 0 & -6EI/h^2 & 4EI/h \end{pmatrix}, \quad (3)$$

Рис. 1. Кинематическое воздействие

связывает внутренние усилия $N_i, Q_i, L_i (i=2, 3, 4, 5)$ с узловыми перемещениями. Пусть $\mathbf{k}_j$ — j -тая строка матрицы $\mathbf{K}_{el} (j=1, \dots, 6)$, тогда с учетом (1)–(3) продольные силы равны:

$$\begin{aligned} N_2 &= \mathbf{k}_4 (V_1 \quad U_1 \quad \alpha_1 \quad V_2 \quad U_2 \quad \alpha_2)^T = \\ &= (EF/h)(V_2 - V_1) = (EF/h)(Y_1 - B\varphi_1/2 - v_A), \\ N_3 &= \mathbf{k}_4 (V_2 \quad U_2 \quad \alpha_2 \quad V_3 \quad U_3 \quad \alpha_3)^T = \\ &= (EF/h)(V_3 - V_2) = \\ &= (EF/h)(Y_2 - Y_1 - B(\varphi_2 - \varphi_1)/2), \\ N_4 &= \mathbf{k}_4 (V_5 \quad U_5 \quad \alpha_5 \quad V_4 \quad U_4 \quad \alpha_4)^T = \\ &= (EF/h)(V_4 - V_5) = \\ &= (EF/h)(Y_2 - Y_1 + B(\varphi_2 - \varphi_1)/2), \\ N_5 &= \mathbf{k}_4 (V_6 \quad U_6 \quad \alpha_6 \quad V_5 \quad U_5 \quad \alpha_5)^T = \\ &= (EF/h)(V_5 - V_6) = \\ &= (EF/h)(Y_1 + B\varphi_1/2 - v_B); \end{aligned}$$

поперечные силы:

$$\begin{aligned} Q_2 &= \mathbf{k}_5 (V_1 \quad U_1 \quad \alpha_1 \quad V_2 \quad U_2 \quad \alpha_2)^T = \\ &= (12EI/h^3)(U_2 - U_1) - (6EI/h^2)(\alpha_1 + \alpha_2) = \\ &= (12EI/h^3)(X_1 - u_A) - (6EI/h^2)(\alpha_A + \varphi_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3 &= \mathbf{k}_5 (V_2 \quad U_2 \quad \alpha_2 \quad V_3 \quad U_3 \quad \alpha_3)^T = \\ &= (12EI/h^3)(U_3 - U_2) - (6EI/h^2)(\alpha_2 + \alpha_3) = \\ &= (12EI/h^3)(X_2 - X_1) - (6EI/h^2)(\varphi_1 + \varphi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_4 &= \mathbf{k}_5 (V_5 \quad U_5 \quad \alpha_5 \quad V_4 \quad U_4 \quad \alpha_4)^T = \\ &= (12EI/h^3)(U_4 - U_5) - (6EI/h^2)(\alpha_4 + \alpha_5) = \\ &= (12EI/h^3)(X_2 - X_1) - (6EI/h^2)(\varphi_1 + \varphi_2), \end{aligned}$$

Рис. 2. Координаты конечных элементов и обобщенные координаты

$$\begin{aligned} Q_5 &= \mathbf{k}_5 (V_6 \ U_6 \ \alpha_6 \ V_5 \ U_5 \ \alpha_5)^T = \\ &= (12EI/h^3)(U_5 - U_6) - (6EI/h^2)(\alpha_5 + \alpha_6) = \\ &= (12EI/h^3)(X_1 - u_B) - (6EI/h^2)(\varphi_1 + \alpha_B); \end{aligned}$$

изгибающие моменты:

$$\begin{aligned} L_2 &= \mathbf{k}_6 (V_1 \ U_1 \ \alpha_1 \ V_2 \ U_2 \ \alpha_2)^T = \\ &= (6EI/h^2)(U_1 - U_2) + (2EI/h)(\alpha_1 + 2\alpha_2) = \\ &= (6EI/h^2)(u_A - X_1) + (2EI/h)(\alpha_A + 2\varphi_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3 &= \mathbf{k}_6 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = \\ &= (6EI/h^2)(U_2 - U_3) + (2EI/h)(\alpha_2 + 2\alpha_3) = \\ &= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(\varphi_1 + 2\varphi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'_3 &= \mathbf{k}_3 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = \\ &= (6EI/h^2)(U_2 - U_3) + (2EI/h)(2\alpha_2 + \alpha_3) = \\ &= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(2\varphi_1 + \varphi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4 &= \mathbf{k}_6 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = \\ &= (6EI/h^2)(U_5 - U_4) + (2EI/h)(\alpha_5 + 2\alpha_4) = \\ &= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(\varphi_1 + 2\varphi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'_4 &= \mathbf{k}_3 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = \\ &= (6EI/h^2)(U_5 - U_4) + (2EI/h)(2\alpha_5 + \alpha_4) = \\ &= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(2\varphi_1 + \varphi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_5 &= \mathbf{k}_6 (V_6 \ U_6 \ \alpha_6 \ V_5 \ U_5 \ \alpha_5)^T = \\ &= (6EI/h^2)(U_6 - U_5) + (2EI/h)(\alpha_B + 2\alpha_5) = \\ &= (6EI/h^2)(u_B - X_1) + (2EI/h)(2\varphi_1 + \alpha_B). \end{aligned}$$

Рис. 3. К условию равновесия перекрытий

Отметим, что внутренние усилия направлены против соответствующих им перемещений, кроме того, внутренние поперечная и продольная силы равны и противоположно направлены на концах элемента (рис. 3), а изгибающие моменты на концах элемента имеют разные значения (например, L_3 и L'_3).

Условия равновесия первого перекрытия дают три уравнения движения (рис. 3, часть сил инерции, относящихся к связанным перемещениям, не показана, но учтена в уравнениях равновесия). Сумма сил по горизонтали, по вертикали и сумма моментов всех сил относительно центра перекрытия равны нулю:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 + m_1 h \ddot{\varphi}_1 + Q_2 + Q_5 - Q_3 - Q_4 &= 0, \\ m_1 \ddot{Y}_1 + N_2 + N_5 - N_3 - N_4 &= 0, \\ \theta_{10} \ddot{\varphi}_1 + m_1 h \ddot{X}_1 + L_2 + L_5 + L'_3 + L'_4 + \\ + (B/2)(N_5 - N_2 + N_3 - N_4) &= 0. \end{aligned}$$

Те же условия для второго перекрытия:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{X}_2 + 2m_2 h \ddot{\varphi}_2 + Q_3 + Q_4 &= 0, \\ m_2 \ddot{Y}_2 + N_3 + N_4 &= 0, \\ \theta_{20} \ddot{\varphi}_2 + 2m_2 h \ddot{X}_2 + L_3 + L_4 + (B/2)(N_4 - N_3) &= 0. \end{aligned}$$

Подставляя выражения для внутренних усилий через обобщенные координаты, получим уравнения абсолютного движения системы:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{Y}_1 + 4Y_1 (EF/h) - 2Y_2 (EF/h) &= (EF/h)(v_A + v_B), \\ m_1 \ddot{X}_1 + m_1 h \ddot{\varphi}_1 + 4(12EI/h^3)X_1 - \\ - 2(12EI/h^3)X_2 + 2(6EI/h^2)\varphi_2 &= \\ = (12EI/h^3)(u_A + u_B) + (6EI/h^2)(\alpha_A + \alpha_B), \\ \theta_{10} \ddot{\varphi}_1 + m_1 h \ddot{X}_1 - 2(6EI/h^2)X_2 + \\ + [B^2 (EF/h) + 4(4EI/h)]\varphi_1 - \\ - [(4EI/h) - (B^2/2)(EF/h)]\varphi_2 &= \\ = (BEF/2h)(v_A - v_B) - \\ - (6EI/h^2)(u_A + u_B) - (2EI/h)(\alpha_A + \alpha_B), \quad (4) \\ m_2 \ddot{Y}_2 + 2(EF/h)Y_2 - 2(EF/h)Y_1 &= 0, \\ m_2 \ddot{X}_2 + 2m_2 h \ddot{\varphi}_2 - 2(12EI/h^3)X_1 + \\ + 2(12EI/h^3)X_2 - 2(6EI/h^2)\varphi_1 - \\ - 2(6EI/h^2)\varphi_2 &= 0, \\ \theta_{20} \ddot{\varphi}_2 + 2m_2 h \ddot{X}_2 + 2(6EI/h^2)X_1 - 2(6EI/h^2)X_2 + \\ + [(4EI/h) - (B^2/2)(EF/h)]\varphi_1 + \\ + [(B^2/2)(EF/h) + 2(4EI/h)]\varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

В матричном виде:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{K}\mathbf{q}_{abs} = -\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0, \quad (5)$$

где $\mathbf{q}_{abs} = (Y_1 \ X_1 \ \varphi_1 \ Y_2 \ X_2 \ \varphi_2)^T$ — вектор абсолютных обобщенных координат; $\mathbf{M}$ — матрица инерции

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & m_1 h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 h & \theta_{1O} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 2m_2 h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_2 h & \theta_{2O} \end{pmatrix},$$

$$\theta_{1O} = \theta_1 + m_1 h^2, \quad \theta_{2O} = \theta_2 + 4m_2 h^2;$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{4EF}{h} & 0 & 0 & -\frac{2EF}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{48EI}{h^3} & 0 & 0 & -\frac{24EI}{h^3} & \frac{12EI}{h^2} \\ 0 & 0 & \frac{(16EI + B^2 EF)}{h} & 0 & -\frac{12EI}{h^2} & \frac{(8EI - B^2 EF)}{2h} \\ -\frac{2EF}{h} & 0 & 0 & \frac{2EF}{h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{24EI}{h^3} & -\frac{12EI}{h^2} & 0 & \frac{24EI}{h^3} & -\frac{12EI}{h^2} \\ 0 & \frac{12EI}{h^2} & \frac{(8EI - B^2 EF)}{2h} & 0 & -\frac{12EI}{h^2} & \frac{(16EI + B^2 EF)}{2h} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

— матрица жесткости; $\mathbf{K}_s\mathbf{q}^0$ — вектор сейсмических сил; $\mathbf{q}^0 = (v_A \ u_A \ \alpha_A \ v_B \ u_B \ \alpha_B)^T$ — вектор перемещений опорных точек;

$$\mathbf{K}_s = - \begin{pmatrix} \frac{EF}{h} & 0 & 0 & \frac{EF}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & 0 & \frac{12EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} \\ -\frac{BEF}{2h} & -\frac{6EI}{h^2} & -\frac{2EI}{h} & \frac{BEF}{2h} & -\frac{6EI}{h^2} & -\frac{2EI}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

— матрица жесткости системы опор, формирующая кинематическое воздействие на конструкцию. Матрица $\mathbf{K}_s$ преобразует вектор сейсмических перемещений в сейсмические силы.

Варианты граничных условий

Каждая опорная точка совершает движение совместно с примыкающей к ней малой областью основания (рис. 4, а), это отражено в граничных условиях (2). Рассмотрим два возможных варианта упрощения граничных условий:

1) основание в окрестности опорных точек двигается только поступательно без каких-либо угловых движений (рис. 4, б), граничные условия имеют вид

$$U_1 = u_A, \quad V_1 = v_A, \quad U_6 = u_B, \quad V_6 = v_B, \quad \alpha_A = \alpha_B = 0; \quad (8)$$

2) повороты основания появляются из-за взаимных поступательных перемещений опорных точек (рис. 4, в, модель хордовой ротации), при этом граничные условия:

Рис. 4. Варианты граничных условий

$$U_1 = u_1, V_1 = v_1, U_6 = u_2, V_6 = v_2, \\ \alpha_A = \alpha_B = \alpha_1 = \alpha_6 = (v_2 - v_1)/B. \quad (9)$$

Вектор кинематического воздействия для обоих случаев становится четырехкомпонентным:

$$\mathbf{q}^0 = (v_A \quad u_A \quad v_B \quad u_B)^T.$$

Граничные условия влияют только на правую часть первых трех уравнений (5), (6), поэтому изменится только матрица $\mathbf{K}_s$.

Для варианта 1):

$$\mathbf{K}_s = - \begin{pmatrix} EF/h & 0 & EF/h & 0 \\ 0 & 12EI/h^3 & 0 & 12EI/h^3 \\ -BEF/(2h) & -6EI/h^2 & BEF/(2h) & -6EI/h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Для варианта 2), с учетом, что $\alpha_A + \alpha_B = 2(v_B - v_A)/B$:

$$\mathbf{K}_s = - \begin{pmatrix} \frac{EF}{h} & 0 & \frac{EF}{h} & 0 \\ -\frac{12EI}{Bh^2} & \frac{12EI}{h^3} & \frac{12EI}{Bh^2} & \frac{12EI}{h^3} \\ \frac{4EI}{Bh} - \frac{BEF}{2h} & -\frac{6EI}{h^2} & -\frac{4EI}{Bh} + \frac{BEF}{2h} & -\frac{6EI}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Изучим влияние упрощений угловых условий (8) и (9) на решение, проведя численный эксперимент. Рассмотрим три идентичные РДМ при дифференцированном задании сейсмического воздействия в виде волн Рэлея с параметрами, указанными в табл. 1. Отличие будет только в постановке угловых граничных условий.

Описание РДМ

Модель «Истинные ротации» — граничные условия (2) с учетом рассчитанных истинных ротаций, своих в каждой опоре (рис. 4, а).

Модель «Поступательное движение опор» — граничные условия (8), учитывается только поступательное движение опор (рис. 4, б).

Модель «Хордовые ротации» — граничные условия (9), хордовые ротации вычисляются по взаимному поступательному движению опор (рис. 4, в).

Параметры РДМ: внешний и внутренний диаметры колонн $D = 0,3$ м, $d = 0,28$ м, высота колонны $H = 5$ м, $E = 200$ ГПа, $EI = 1,917 \text{ E} + 07 \text{ Нм}^2$, $EF = 1,822 \text{ E} + 09 \text{ Н}$, ширина плиты перекрытия $B = 10$ м, масса первого перекрытия $m_1 = 45$ т, масса второго перекрытия $m_2 = 45$ т, моменты инерции первого

и второго перекрытий относительно центра приведения $\theta_1 = 1,500 \text{ E} + 06 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$, $\theta_2 = 4,875 \text{ E} + 06 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$. РДМ имеет шесть степеней свободы: горизонтальные и вертикальные поступательные перемещения этажей: X_1, X_2 и Y_1, Y_2 , угловые φ_1, φ_2 . Собственные частоты и периоды рассматриваемых моделей приведены в табл. 1.

Табл. 1. Собственные частоты и периоды РДМ

Ω , рад/с	f , 1/с	T , с
5,49, 14,45, 78,65, 139,85, 205,92, 358,18	0,87, 2,30, 12,52, 22,25, 32,77, 57,00	1,14, 0,45, 0,08, 0,04, 0,03, 0,02

Описание дифференцированного сейсмического воздействия

Для плоской модели в качестве сейсмического воздействия удобно принять плоские волны Рэлея, при распространении которых возникают вертикальные, горизонтальные и ротационные перемещения грунтового основания.

В работе [16] представлены алгоритм и расчетные формулы для моделирования пространственно-временного процесса распространения поверхностных сейсмических волн Рэлея. Исходная информация для моделирования задается в виде акселерограммы, заданной в одной из точек однородного упругого грунтового основания с известными свойствами. В качестве исходной принята запись вертикального движения землетрясения в Газли 1976 г. Упругие свойства грунтового основания варьировались так, чтобы исследовать реакцию конструкции на возможно широкий спектр длин сейсмических волн — от очень коротких до бесконечно длинных. Были заданы шесть вариантов воздействий, отличающихся модулями упругости основания E и, следовательно, фазовыми скоростями c_R , уровнем ротаций $\ddot{\alpha}_{20}$, χ -коэффициентами для расстояния между опорами $B = 10$ м (рис. 1, табл. 1). Воздействие 0 соответствует сверхмягкому грунту, его можно рассматривать как предельный случай для очень коротких волн. Нормированная функция интенсивности $\chi(10)$ воздействия 0 равна 0,094, это говорит о том, что примерно 91 % спектрального состава воздействия составляют волны с длинами, не превышающими 10 м. Воздействие 5 соответствует другому предельному случаю — только поступательному движению грунта, коэффициент $\chi(10)$ равен 1. Дифференцированное воздействие задается в каждой опорной точке путем моделирования пространственно-временного поля распространения волн Рэлея [16], включающего две поступательные и одну угловую компоненты сейсмического движения (рис. 5 показывает акселерограммы поступательного и ротационного воздействия для входного воздействия 1). Числовые характеристики воздействий 0–5 для грунтов различной степени жесткости приведены в табл. 2.

Рис. 5. Вход 1. Акселерограммы вертикального $\ddot{X}_3^0$, горизонтального $\ddot{X}_1^0$ и ротационного движения $\ddot{\alpha}_0$ в опорах A и B

Табл. 2. Параметры входных воздействий

Input	E , МПа	c_R , М/с	$\chi(10)$	Точка A		Точка B	
				$\ddot{X}_3^0$ max, М/с² $\ddot{X}_1^0$ max, М/с² $\ddot{\alpha}_0^0$ max, рад/с²	$\ddot{X}_3^0$ min, М/с² $\ddot{X}_1^0$ min, М/с² $\ddot{\alpha}_0^0$ min, рад/с²	$\ddot{X}_3^0$ max, М/с² $\ddot{X}_1^0$ max, М/с² $\ddot{\alpha}_0^0$ max, рад/с²	$\ddot{X}_3^0$ min, М/с² $\ddot{X}_1^0$ min, М/с² $\ddot{\alpha}_0^0$ min, рад/с²
0	0,1	5	0,094	12,766 8,662 2,496	-10,556 -7,979 -1,61p0	12,919 8,656 2,477	-10,640 -7,998 -1,645
1	5	32	0,237	12,766 8,662 0,353	-10,556 -7,979 -0,228	13,144 8,829 0,360	-10,726 -7,958 -0,225
2	50	103	0,500	12,766 8,662 0,112	-10,556 -7,979 -0,072	12,757 8,672 0,112	-10,537 -8,000 -0,0736
3	160	183	0,750	12,766 8,662 0,062	-10,556 -7,979 -0,040	12,664 8,672 0,063	-10,516 -7,994 -0,041
4	300	251	0,840	12,766 8,662 0,046	-10,556 -7,979 -0,029	12,634 8,671 0,046	-10,527 -7,991 -0,030
5	—	—	1	12,766 8,662 0	-10,556 -7,979 0	12,766 8,662 0	-10,556 -7,979 0

Рис. 6. Модель «Истинные ротации». Горизонтальная реакция для входов 0 и 5

Рис. 7. Модель «Истинные ротации». Угловая реакция для входов 0 и 5

Табл. 3. Максимальные перемещения моделей*

Модель*	Вход 0		Вход 1		Вход 2		Вход 3		Вход 4	
	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад	X_2 , м	φ_2 , рад
1	0,07235	0,00024	0,08509	0,00025	0,08705	0,00025	0,08750	0,00025	0,08760	0,00025
2	0,07003	0,00023	0,08454	0,00025	0,08687	0,00025	0,08741	0,00025	0,08753	0,00025
3	0,07476	0,00025	0,08556	0,00025	0,08719	0,00025	0,08758	0,00025	0,08766	0,00025
%	6,3	8	1,2	0	0,3	0	0,2	0	0,1	0

*Примечание: 1 — модель «Поступательное движение опор»; 2 — модель «Хордовые ротации»; 3 — модель «Истинные ротации».

РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Моделирование осуществлялось в среде Simulink математического пакета MATLAB. Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений во временной области применялся решатель ode14x с фиксированным шагом. Максимальные перемещения моделей для входов 0–4 приведены в табл. 2. Максимальные перемещения для входа 5 (абсолютно жесткий грунт, полное отсутствие ротаций) составили $X_2 = 0,08797$ м, $\varphi_2 = 0,00025$ рад.

На рис. 6, 7 показаны графики изменения параметров динамической реакции во времени для модели с истинными ротациями для входов 0 и 5.

ВЫВОДЫ

При анализе трех расчетных схем, отличающихся только способом задания угловых граничных условий, было установлено, что максимальная разница между параметрами динамической реакции при одинаковых входных воздействиях не пре-

вышает 8 % (табл. 3). Исследование показало, что при обычных грунтовых условиях (мягкие, средние и жесткие грунты) наличие угловых граничных условий при кинематическом воздействии в опорных точках не играет существенной роли (изменение динамической реакции порядка 1 %). Оказалось, что только для сверхмягкого грунта (вход 0) влияние угловых граничных условий может изменить динамическую реакцию в пределах 6–8 %. Таким образом, для расчетных схем со стандартными грунтовыми условиями, по-видимому, достаточно ограничиться только поступательными опорными перемещениями, как на рис. 4, б. В этом случае углы поворотов грунтового основания вводятся опосредованно, в виде взаимных поступательных перемещений опор. Это оправдано при небольших ротациях для мягких, средних и жестких грунтов. Однако для очень мягких грунтов с малыми фазовыми скоростями или при специфических, резко неоднородных, грунтовых условиях ротации могут быть значительными. В этом случае роль ротационных граничных условий возрастает.

ЛИТЕРАТУРА

1. Назаров Ю.П. Аналитические основы расчета сооружений на сейсмические воздействия. М. : Наука, 2010. 468 с.
2. Назаров Ю.П. Расчетные параметры волновых полей сейсмических движений грунта. М. : Наука, 2015. 374 с.
3. Nazarov Yu.P., Poznyak E., Filimonov A.V. A brief theory and computing of seismic ground rotations for structural analyses // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2015. Vol. 71. Pp. 31–41. DOI: 10.1016/j.soildyn.2015.01.013.
4. Назаров Ю.П., Позняк Е.В. Оценка ротационных компонент сейсмического движения грунта // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2015. № 6. С. 22–26.
5. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. М. : Стройиздат, 1979. 320 с.
6. Trifunac M.D. Selected notes on rotations in structural response // Report CE 07–04 Department of Civil Engineering University of Southern California. Los Angeles, California, 2007.
7. Болотин В.В., Радин В.П., Чирков В.П. Динамика конструкций при многокомпонентных сейсмических воздействиях // Механика твердого тела. Известия Российской академии наук. 2000. № 3. С. 149–157.
8. Радин В.П., Трифонов О.В., Чирков В.П. Модель многоэтажного каркасного здания для расчетов на интенсивные сейсмические воздействия // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2001. № 1. С. 23–26.
9. Nazarov Yu.P., Poznyak E. Response spectrum method for integrated and differential spatial seismic ground motions // Soil Dynamics and Earthquake En-

gineering. 2018. Vol. 108. Pp. 69–78. DOI: 10.1016/j.soildyn.2018.02.014.

10. Lee W.H.K., Kanamori H., Jennings P.C., Kisslinger C. International handbook of earthquake and engineering seismology. Part B. New York, London, Academic Press, 2003. Vol. 81b, 1031 pp. (International Geophysics Series)

11. Bońkowski P.A., Zembaty Z., Minch M.Y. Time history response analysis of a slender tower under translational-rocking seismic excitations // Engineering Structures. 2018. Vol. 155. Pp. 387–393. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.11.042.

12. Mylona E.-K.V., Sextos A.G., Mylonakis G.E. Rotational seismic excitation effects on CIDH pile-supported bridge piers // Engineering Structures. 2017. Vol. 138. Pp. 181–194. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.01.071.

13. Karayannis C.G., Naoum M.C. Torsional behavior of multistory RC frame structures due to asymmetric seismic interaction // Engineering Structures. 2018. Vol. 163. Pp. 93–111. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.02.038.

14. Di Laora R., Grossi Y., De Sanctis L., Viggiani G.M.B. An analytical solution for the rotational component of the Foundation Input Motion induced by a pile group // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2017. Vol. 97. Pp. 424–438. DOI: 10.1016/j.soildyn.2017.03.027.

15. Srisangeerthan S., Hashemi M.J., Rajeev P., Gad E., Fernando S. Numerical study on the effects of diaphragm stiffness and strength on the seismic response of multi-story modular buildings // Engineering Structures. 2018. Vol. 163. Pp. 25–37. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.02.048.

16. Позняк Е.В. Об оценке влияния сейсмических ротаций на динамику строительных конструкций // Справочник. Инженерный журнал. 2017. № 9. С. 14–23. DOI: 10.14489/hb.2017.09.pp.014-023.

17. Nazarov Yu.P., Poznyak E.V., Filimonov A.V. Seismic data analysis in Odyssey Software // International Journal of Emerging Technologies in Computational and Applied Sciences (IJETCAS). December 2013 – February 2014. Vol. 1. Issue 7. Pp. 75–77.

18. Falamarz-Sheikhabadi M.R., Ghafory-Ashtiani M. Rotational components in structural loading // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2015. Vol. 75. Pp. 220–233. DOI: 10.1016/j.soildyn.2015.04.012.

19. Trifunac M.D. The role of strong motion rotations in the response of structures near earthquake faults // Soil Dynamics and Earthquake Engineering. 2009. Vol. 29. Issue 2. Pp. 382–393. DOI: 10.1016/j.soildyn.2008.04.001.

20. Назаров Ю.П., Позняк Е.В. Моделирование процесса распространения волн Рэлея в пространстве по заданной акселерограмме // Строительство и реконструкция. 2015. № 2 (58). С. 20–26.

Поступила в редакцию

Принята в доработанном виде

Одобрена для публикации

ОБ АВТОРЕ: Позняк Елена Викторовна — кандидат технических наук, доцент, Национальный исследовательский университет «Московский энергетический институт» (НИУ «МЭИ»), 111250, г. Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, PozniakYV@mpei.ru. Scopus Author ID 56422077100.

INTRODUCTION

Differential model of seismic ground motion is used for the structures on discrete supports or on a compliant foundation when short wavelengths comparable to the size of the building foundation dominate in the spectrum of seismic wavelengths. In this article the plane model of two-story building under the differential seismic action is presented. A distinguishing feature of this model is that it allows translational (vertical and horizontal) and rotational displacements of slabs; it is important for the analysis taking into account the ground rotations. The number of DOFs of this model with two rigid slabs is six; it is easy to obtain the equations of motion using the D'Alembert's principle. A seismic action is transferred to the structure as kinematic excitation of the supports rigidly connected to the

ground base; the support elements can also have translational and rotational components of motions.

The ground rotational displacements can be: 1) obtained, for example, by using the technique described in [1–4]; 2) evaluated by the mutual translational displacements of the support points (“chord” rotations). The case of zero ground rotations in the support points was also considered. The kinematic excitation of each support point has own law of motion due to the seismic wave propagation effect. A seismic action was caused by Rayleigh surface waves simulated for six variants of ground conditions with different lengths of dominant seismic waves.

An estimation of dominant seismic wave lengths is performed by using normalized intensity function $\chi(\lambda)$ [1–4]. An accelerogram $\ddot{X}(t)$ of the translational seismic ground motion is represented as composition

of p simple harmonic waves with frequencies ω_i and lengths $\lambda_i = 2\pi c/\omega_i$, where c is the wave phase velocity ($i = 1, 2, \dots, p$). Denote by $\sigma_{\ddot{X}} = I$ the seismic intensity $\ddot{X}$, $\sigma_{\ddot{X}}(\bar{\lambda})$ is equal to standard of random process $\ddot{X}$, $\sigma_{\ddot{X}}(\bar{\lambda})$ is the intensity of filtered process $\ddot{X}$ from which all waves with lengths smaller than $\bar{\lambda}$ are removed. Thus, the wavelength $\bar{\lambda}$ is the shortest in the filtered process $\ddot{X}$. The normalized intensity of the translational motion is defined as $\chi(\bar{\lambda}) = \sigma_{\ddot{X}}(\bar{\lambda})/I$. The $\chi(\bar{\lambda})$ shows, what part of total intensity of translational motion relates to wavelengths, which are higher $\bar{\lambda}$. The value $\chi(B)$ where B is the minimum size of the foundation of the structure, it is called χ -coefficient. This coefficient is used to estimate the dominant seismic wave lengths in the spectrum of seismic waves.

REVIEW

To illustrate the seismic wave effects, small models of structures (buildings, supports and spans of bridges, communication towers, etc.) are often considered; for these models, it is easy to obtain equations of motion and dynamic response parameters; see, for example, works [5–15].

Earthquake engineering analysis is usually performed for an integrated dilatation model of seismic ground motion, when the motion of the base of the building is described by only translational components without rotations; examples for small-sized models with deriving equations of motion and their solutions can be found in the works [5–12, 14]. The works [1–4, 6, 17–19] are devoted to the problems of the dynamic analysis of building structures taking into account the ground rotations; however, there are not many illustrative examples for small models with deriving of dynamic equations, and these are mainly solutions for the console model with rotations of the ground base, see, for example [5, 11]. A three-degree-of-freedom frame structure extended in plan is considered in [10]; the differential seismic action is given by one-dimensional

translational ground motions. For the analysis of wave seismic effects, it is necessary to have a collection of simple spatial small-size models with different approaches for describing of the seismic ground motions. The spatial model of a two-story building for the integrated dilatational and rotational motions generated by Rayleigh waves is considered in [16]; in the present paper the same model is presented for the differential seismic motion.

RESEARCH TECHNIQUE

The building's model and equations of motion

The model of a frame building with two rigid slabs under differential seismic action, given by horizontal and vertical motions u_A, v_A and u_B, v_B and rotations α_A, α_B at the support points, is shown in Fig. 1. The building's model includes six generalized coordinates: absolute linear displacements X_1, Y_1, X_2, Y_2 and rotational ϕ_1, ϕ_2 . Denote by: m_1, θ_1 and m_2, θ_2 — the masses and centroidal moments of inertia of the slabs; EI, EF — the bending and longitudinal stiffnesses of the columns; h — the height of the story; B — the width of the slab.

The equations of motion can be obtained according to the principle of D'Alembert, considering the conditions of equilibrium of the slabs. The nodal displacements of columns as finite elements are U_i, V_i, α_i , ($i = 1, \dots, 6$) (Fig. 2). For absolute rigid slabs and for small rotations, the relationships between the nodal displacements and generalized coordinates are:

$$\begin{aligned} U_2 &= U_5 = X_1, \quad U_3 = U_4 = X_2, \\ \alpha_2 &= \alpha_5 = \phi_1, \quad \alpha_3 = \alpha_4 = \phi_2, \\ V_2 &= Y_1 - \phi_1 \frac{B}{2}, \quad V_3 = Y_2 - \phi_2 \frac{B}{2}, \\ V_5 &= Y_1 + \phi_1 \frac{B}{2}, \quad V_4 = Y_2 + \phi_2 \frac{B}{2}; \end{aligned} \quad (1)$$

the boundary conditions:

Fig. 1. Kinematic excitation

Fig. 2. The finite elements and generalized coordinates

$$U_1 = u_A, V_1 = v_A, \alpha_1 = \alpha_A, U_6 = u_B, V_6 = v_B, \alpha_6 = \alpha_B. \quad (2)$$

The stiffness matrix of plane finite element under bending and tension or compression loads is:

$$\mathbf{K}_{el} = \begin{pmatrix} EF/h & 0 & 0 & -EF/h & 0 & 0 \\ 0 & 12EI/h^3 & 6EI/h^2 & 0 & -12EI/h^3 & 6EI/h^2 \\ 0 & 6EI/h^2 & 4EI/h & 0 & -6EI/h^2 & 2EI/h \\ -EF/h & 0 & 0 & EF/h & 0 & 0 \\ 0 & -12EI/h^3 & -6EI/h^2 & 0 & 12EI/h^3 & -6EI/h^2 \\ 0 & 6EI/h^2 & 2EI/h & 0 & -6EI/h^2 & 4EI/h \end{pmatrix}, \quad (3)$$

and connects the internal forces N_i, Q_i, L_i ($i = 2, 3, 4, 5$) with the nodal displacements. Denote by $\mathbf{k}_j$ — j -th row of matrix $\mathbf{K}_{el}$ ($j = 1, \dots, 6$). Taking into account (1)–(3) the longitudinal forces are equal:

$$\begin{aligned} N_2 &= \mathbf{k}_4 (V_1 \ U_1 \ \alpha_1 \ V_2 \ U_2 \ \alpha_2)^T = \\ &= (EF/h)(V_2 - V_1) = (EF/h)(Y_1 - B\varphi_1/2 - v_A), \\ N_3 &= \mathbf{k}_4 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = \\ &= (EF/h)(V_3 - V_2) = \\ &= (EF/h)(Y_2 - Y_1 - B(\varphi_2 - \varphi_1)/2), \\ N_4 &= \mathbf{k}_4 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = \\ &= (EF/h)(V_4 - V_5) = \\ &= (EF/h)(Y_2 - Y_1 + B(\varphi_2 - \varphi_1)/2), \\ N_5 &= \mathbf{k}_4 (V_6 \ U_6 \ \alpha_6 \ V_5 \ U_5 \ \alpha_5)^T = \\ &= (EF/h)(V_5 - V_6) = \\ &= (EF/h)(Y_1 + B\varphi_1/2 - v_B); \end{aligned}$$

the shear forces:

$$\begin{aligned} Q_2 &= \mathbf{k}_5 (V_1 \ U_1 \ \alpha_1 \ V_2 \ U_2 \ \alpha_2)^T = \\ &= (12EI/h^3)(U_2 - U_1) - (6EI/h^2)(\alpha_1 + \alpha_2) = \\ &= (12EI/h^3)(X_1 - u_A) - (6EI/h^2)(\alpha_A + \varphi_1), \\ Q_3 &= \mathbf{k}_5 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = \\ &= (12EI/h^3)(U_3 - U_2) - (6EI/h^2)(\alpha_2 + \alpha_3) = \\ &= (12EI/h^3)(X_2 - X_1) - (6EI/h^2)(\varphi_1 + \varphi_2), \\ Q_4 &= \mathbf{k}_5 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = \\ &= (12EI/h^3)(U_4 - U_5) - (6EI/h^2)(\alpha_4 + \alpha_5) = \\ &= (12EI/h^3)(X_2 - X_1) - (6EI/h^2)(\varphi_1 + \varphi_2), \\ Q_5 &= \mathbf{k}_5 (V_6 \ U_6 \ \alpha_6 \ V_5 \ U_5 \ \alpha_5)^T = \\ &= (12EI/h^3)(U_5 - U_6) - (6EI/h^2)(\alpha_5 + \alpha_6) = \\ &= (12EI/h^3)(X_1 - u_B) - (6EI/h^2)(\varphi_1 + \alpha_B); \end{aligned}$$

the bending moments:

$$\begin{aligned} L_2 &= \mathbf{k}_6 (V_1 \ U_1 \ \alpha_1 \ V_2 \ U_2 \ \alpha_2)^T = \\ &= (6EI/h^2)(U_1 - U_2) + (2EI/h)(\alpha_1 + 2\alpha_2) = \\ &= (6EI/h^2)(u_A - X_1) + (2EI/h)(\alpha_A + 2\varphi_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3 &= \mathbf{k}_6 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = \\ &= (6EI/h^2)(U_2 - U_3) + (2EI/h)(\alpha_2 + 2\alpha_3) = \\ &= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(\varphi_1 + 2\varphi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'_3 &= \mathbf{k}_3 (V_2 \ U_2 \ \alpha_2 \ V_3 \ U_3 \ \alpha_3)^T = \\ &= (6EI/h^2)(U_2 - U_3) + (2EI/h)(2\alpha_2 + \alpha_3) = \\ &= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(2\varphi_1 + \varphi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4 &= \mathbf{k}_6 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = \\ &= (6EI/h^2)(U_5 - U_4) + (2EI/h)(\alpha_5 + 2\alpha_4) = \\ &= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(\varphi_1 + 2\varphi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L'_4 &= \mathbf{k}_3 (V_5 \ U_5 \ \alpha_5 \ V_4 \ U_4 \ \alpha_4)^T = \\ &= (6EI/h^2)(U_5 - U_4) + (2EI/h)(2\alpha_5 + \alpha_4) = \\ &= (6EI/h^2)(X_1 - X_2) + (2EI/h)(2\varphi_1 + \varphi_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_5 &= \mathbf{k}_6 (V_6 \ U_6 \ \alpha_6 \ V_5 \ U_5 \ \alpha_5)^T = \\ &= (6EI/h^2)(U_6 - U_5) + (2EI/h)(\alpha_6 + 2\alpha_5) = \\ &= (6EI/h^2)(u_B - X_1) + (2EI/h)(2\varphi_1 + \alpha_B). \end{aligned}$$

Note that the internal forces and moments are directed against their displacements, in addition, the internal shear and longitudinal forces are equal and opposite directed at the ends of the element (Fig. 3), and

Fig. 3. The equilibrium of slabs

the bending moments at the ends of the elements have different values (for example, L_3 and L'_3).

The equilibrium of the first slab gives three equations of motion (Fig. 3, a part of inertial forces is not shown but is included in the equilibrium equations). The sum of forces in horizontal, vertical directions and the sum of the moments equal to zero:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{X}_1 + m_1 h \ddot{\phi}_1 + Q_2 + Q_3 - Q_3 - Q_4 &= 0, \\ m_1 \ddot{Y}_1 + N_2 + N_3 - N_3 - N_4 &= 0, \\ \theta_{10} \ddot{\phi}_1 + m_1 h \ddot{X}_1 + L_2 + L_3 + L'_3 + L'_4 + \\ + (B/2)(N_3 - N_2 + N_3 - N_4) &= 0. \end{aligned}$$

The same conditions for the second slab are:

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{X}_2 + 2m_2 h \ddot{\phi}_2 + Q_3 + Q_4 &= 0, \\ m_2 \ddot{Y}_2 + N_3 + N_4 &= 0, \\ \theta_{20} \ddot{\phi}_2 + 2m_2 h \ddot{X}_2 + L_3 + L_4 + (B/2)(N_4 - N_3) &= 0. \end{aligned}$$

Substituting expressions for internal forces expressed through generalized coordinates, we obtain equations for absolute motion of the system:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{Y}_1 + 4Y_1 (EF/h) - 2Y_2 (EF/h) &= (EF/h)(v_A + v_B), \\ m_1 \ddot{X}_1 + m_1 h \ddot{\phi}_1 + 4(12EI/h^3)X_1 - \\ - 2(12EI/h^3)X_2 + 2(6EI/h^2)\phi_2 &= \\ = (12EI/h^3)(u_A + u_B) + (6EI/h^2)(\alpha_A + \alpha_B), \\ \theta_{10} \ddot{\phi}_1 + m_1 h \ddot{X}_1 - 2(6EI/h^2)X_2 + \\ + [B^2 (EF/h) + 4(4EI/h)]\phi_1 - \\ - [(4EI/h) - (B^2/2)(EF/h)]\phi_2 &= \\ = (BEF/2h)(v_A - v_B) - \\ - (6EI/h^2)(u_A + u_B) - (2EI/h)(\alpha_A + \alpha_B), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} m_2 \ddot{Y}_2 + 2(EF/h)Y_2 - 2(EF/h)Y_1 &= 0, \\ m_2 \ddot{X}_2 + 2m_2 h \ddot{\phi}_2 - 2(12EI/h^3)X_1 + \\ + 2(12EI/h^3)X_2 - 2(6EI/h^2)\phi_1 - \\ - 2(6EI/h^2)\phi_2 &= 0, \\ \theta_{20} \ddot{\phi}_2 + 2m_2 h \ddot{X}_2 + 2(6EI/h^2)X_1 - 2(6EI/h^2)X_2 + \\ + [(4EI/h) - (B^2/2)(EF/h)]\phi_1 + \\ + [(B^2/2)(EF/h) + 2(4EI/h)]\phi_2 &= 0. \end{aligned}$$

In matrix form:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}_{abs} + \mathbf{K} \mathbf{q}_{abs} = -\mathbf{K}_s \mathbf{q}^0, \quad (5)$$

where $\mathbf{q}_{abs} = (Y_1 \ X_1 \ \phi_1 \ Y_2 \ X_2 \ \phi_2)^T$ — is the vector of absolute generalized coordinates, $\mathbf{M}$ is the inertia matrix

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & m_1 h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1 h & \theta_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 2m_2 h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m_2 h & \theta_{20} \end{pmatrix},$$

$$\theta_{10} = \theta_1 + m_1 h^2, \theta_{20} = \theta_2 + 4m_2 h^2;$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \frac{4EF}{h} & 0 & 0 & -\frac{2EF}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{48EI}{h^3} & 0 & 0 & -\frac{24EI}{h^3} & \frac{12EI}{h^2} \\ 0 & 0 & \frac{(16EI + B^2 EF)}{h} & 0 & -\frac{12EI}{h^2} & \frac{(8EI - B^2 EF)}{2h} \\ -\frac{2EF}{h} & 0 & 0 & \frac{2EF}{h} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{24EI}{h^3} & -\frac{12EI}{h^2} & 0 & \frac{24EI}{h^3} & -\frac{12EI}{h^2} \\ 0 & \frac{12EI}{h^2} & \frac{(8EI - B^2 EF)}{2h} & 0 & -\frac{12EI}{h^2} & \frac{(16EI + B^2 EF)}{2h} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

is the stiffness matrix, $\mathbf{K}_s \mathbf{q}^0$ is the vector of seismic forces, $\mathbf{q}^0 = (v_A \ u_A \ \alpha_A \ v_B \ u_B \ \alpha_B)^T$ is the vector of displacements of the support points,

$$\mathbf{K}_s = - \begin{pmatrix} \frac{EF}{h} & 0 & 0 & \frac{EF}{h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} & 0 & \frac{12EI}{h^3} & \frac{6EI}{h^2} \\ -\frac{BEF}{2h} & -\frac{6EI}{h^2} & -\frac{2EI}{h} & \frac{BEF}{2h} & -\frac{6EI}{h^2} & -\frac{2EI}{h} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

is the stiffness matrix of the support elements forming a kinematic excitation on the structure. The matrix $\mathbf{K}_s$ transforms seismic displacements to the seismic forces.

The variants of boundary conditions

Each support point moves together with the abutting small area of the base (Fig. 4, a it can be seen in boundary conditions (2). We consider two possible variants of the simplification of boundary conditions:

1) the motion of the base at the support points only translational without any rotations (Fig. 4, b); the boundary conditions are written as

$$U_1 = u_A, \ V_1 = v_A, \ U_6 = u_B, \ V_6 = v_B, \ \alpha_A = \alpha_B = 0; \quad (8)$$

2) rotations of the base are due to the mutual translational motions of the support points (Fig. 4, c “chord” model of the rotations) with the boundary conditions:

$$\begin{aligned} U_1 = u_1, \ V_1 = v_1, \ U_6 = u_2, \ V_6 = v_2, \\ \alpha_A = \alpha_B = \alpha_1 = \alpha_6 = (v_2 - v_1)/B. \end{aligned} \quad (9)$$

Fig. 4. The boundary conditions

The vector of kinematic excitation for both cases have four components:

$$\mathbf{q}^0 = (v_A \quad u_A \quad v_B \quad u_B)^T.$$

The boundary conditions concern only the right side of the first three equations (5), (6), so only the matrix $\mathbf{K}_s$ is changed.

For the variant 1):

$$\mathbf{K}_s = - \begin{pmatrix} EF/h & 0 & EF/h & 0 \\ 0 & 12EI/h^3 & 0 & 12EI/h^3 \\ -BEF/(2h) & -6EI/h^2 & BEF/(2h) & -6EI/h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

For the variant 2) accounting $\alpha_A + \alpha_B = 2(v_B - v_A)/B$:

$$\mathbf{K}_s = - \begin{pmatrix} \frac{EF}{h} & 0 & \frac{EF}{h} & 0 \\ -\frac{12EI}{Bh^2} & \frac{12EI}{h^3} & \frac{12EI}{Bh^2} & \frac{12EI}{h^3} \\ \frac{4EI}{Bh} - \frac{BEF}{2h} & \frac{6EI}{h^2} & -\frac{4EI}{Bh} + \frac{BEF}{2h} & -\frac{6EI}{h^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Performing a numerical experiment, we'll study the effect of the simplified rotational boundary

conditions (8) and (9) on the solution. Consider three identical building's models under differential seismic action in the form of Rayleigh waves with the parameters specified in the Table. 1. The difference is only in the formulations of the rotational boundary conditions.

The building's models

Model "Translational motions at the support points". The boundary conditions (8) take into account only the translational motion at the support points (Fig. 4, b).

Model "Chord rotations". The boundary conditions are written in the form (9); the "chord" rotations are calculated using the mutual translational motion of the supports (Fig. 4, c).

Model "Real rotations". The boundary conditions (2) take into account the calculated real rotations in each support point (Fig. 4, a).

Parameters: external and internal diameters of the columns $D = 0.3$ m, $d = 0.28$ m; column height $H = 5$ m, $E = 200$ GPa, $EI = 1.917 \text{ E} + 07 \text{ Nm}^2$, $EF = 1.822 \text{ E} + 09 \text{ N}$; slab's width $B = 10$ m; the mass of the first slab $m_1 = 45$ tons, the mass of the second slab $m_2 = 45$ tons; the centroidal moments of inertia of first and second slabs $\theta_1 = 1.500 \text{ E} + 06 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$, $\theta_2 = 4.875 \text{ E} + 06 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. The building's model has 6 degrees of freedom: horizontal and vertical translational displacements of slabs X_1 , X_2 and Y_1 , Y_2 , rotational ϕ_1 , ϕ_2 . The natural

Table. 1. Natural frequencies and periods of the building's model

Ω , rad/s	f , 1/s	T , s
5.49, 14.45, 78.65, 139.85, 205.92, 358.18	0.87, 2.30, 12.52, 22.25, 32.77, 57.00	1.14, 0.45, 0.08, 0.04, 0.03, 0.02

frequencies and periods of the models are given in Table. 1.

The differential seismic action

For a plane model, it is convenient to accept seismic action in the form of Rayleigh plane waves; these waves cause vertical, horizontal and rotational motions of the ground base.

The paper [16] presents an algorithm and formulas for simulating of the space-time propagation of surface Rayleigh waves. The input information for simulating is an accelerogram at one point of a homogeneous elastic base with given ground properties. The record of vertical motions of the earthquake in Gazli (May 14, 1976, 2048 points, duration 13.48 s) is the input accelerogram in this analysis. The ground properties vary to investigate the structural response for the widest possible range of seismic wavelengths — from very short to infinitely long.

Six variants of seismic actions in accordance with modules E of the soil base and, consequently, the phase velocities c_R , the values of the rotations $\ddot{\alpha}_{20}$, the χ -coefficients for the distance between the supports $B = 10$ m (Fig. 1, Table. 1) are considered. The input 0 corresponds to ultra-soft soil; it can be considered as a limiting case for very short waves. The normalized intensity function $\chi(10)$ of the input 0 is 0.094; it indicates that approximately 91 % of the spectrum is seismic waves with lengths not exceeding 10 m. The input 5

corresponds to the other limiting case — translational ground motion; the coefficient $\chi(10)$ is equal to 1. The differential action is computed at each support point by simulating the space-time field of Rayleigh waves [16]; it includes two translational and one rotational components of seismic motion (Fig. 5 shows translational and rotational accelerograms for the input 1). For soils of various rigidity, numerical parameters of the inputs 0–5 are shown in the Table. 2.

RESULTS

The simulation was performed using Simulink MATLAB mathematical package. To solve the ODE system in the time-domain, the ode14x solver with fixed step was used. Maximum displacements for the inputs 0–4 are shown in the Table. 2; maximum displacements for the input 5 (very hard soil, without any rotations) are equal to $X_2 = 0.08797$ m, $\varphi_2 = 0.00025$ rad.

CONCLUSIONS

For three models, which differ only by rotational boundary conditions, it found that the maximum difference between the parameters of the dynamic response for the same inputs does not exceed 8 % (Table 3). This study showed that for normal soil conditions (soft, medium and hard soils), the rotational boundary conditions

Fig. 5. Input 1. Accelerograms of vertical $\ddot{X}_3^0$, horizontal $\ddot{X}_1^0$ and rotational $\ddot{\alpha}_0$ motions at support points A and B

Table. 2. Input parameters

Input	E , MPa	c_R , m/s	$\chi(10)$	Point A		Point B	
				$\ddot{X}_3^0$, m/s ² $\ddot{X}_1^0$, m/s ² $\ddot{\alpha}_{\max}^0$, rad/s ²	$\ddot{X}_3^0$, m/s ² $\ddot{X}_1^0$, m/s ² $\ddot{\alpha}_{\min}^0$, rad/s ²	$\ddot{X}_3^0$, m/s ² $\ddot{X}_1^0$, m/s ² $\ddot{\alpha}_{\max}^0$, rad/s ²	$\ddot{X}_3^0$, m/s ² $\ddot{X}_1^0$, m/s ² $\ddot{\alpha}_{\min}^0$, rad/s ²
0	0.1	5	0.094	12.766 8.662 2.496	−10.556 −7.979 −1.610	12.919 8.656 2.477	−10.640 −7.998 −1.645
1	5	32	0.237	12.766 8.662 0.353	−10.556 −7.979 −0.228	13.144 8.829 0.360	−10.726 −7.958 −0.225
2	50	103	0.500	12.766 8.662 0.112	−10.556 −7.979 −0.072	12.757 8.672 0.112	−10.537 −8.000 −0.0736
3	160	183	0.750	12.766 8.662 0.062	−10.556 −7.979 −0.040	12.664 8.672 0.063	−10.516 −7.994 −0.041
4	300	251	0.840	12.766 8.662 0.046	−10.556 −7.979 −0.029	12.634 8.671 0.046	−10.527 −7.991 −0.030
5	—	—	1	12.766 8.662 0	−10.556 −7.979 0	12.766 8.662 0	−10.556 −7.979 0

Fig. 6. Model “Real rotations”. Horizontal responses for the inputs 0 and 5

Fig. 7. Model “Real rotations”. Rotational responses for the inputs 0 and 5

Table. 3. Maximum displacements*

Model*	Input 0		Input 1		Input 2		Input 3		Input 4	
	X_{2z} , m	φ_{2z} , rad	X_{2z} , m	φ_{2z} , rad	X_{2z} , m	φ_{2z} , rad	X_{2z} , m	φ_{2z} , rad	X_{2z} , m	φ_{2z} , rad
1	0.07235	0.00024	0.08509	0.00025	0.08705	0.00025	0.08750	0.00025	0.08760	0.00025
2	0.07003	0.00023	0.08454	0.00025	0.08687	0.00025	0.08741	0.00025	0.08753	0.00025
3	0.07476	0.00025	0.08556	0.00025	0.08719	0.00025	0.08758	0.00025	0.08766	0.00025
%	6.3	8	1.2	0	0.3	0	0.2	0	0.1	0

*: 1 — Model “Translational motions at the support points”; 2 — Model “Chord rotations”; 3 — Model “Real rotations”.

in the case of kinematic excitation of the support points does not play a significant role (the dynamic response changed by not more than 1 %). It appeared that only for ultra-soft soil (input 0) the influence of rotational boundary conditions can change the dynamic response within 6–8 %. Thus, for the normal ground conditions, it is sufficient to consider only the translational displacements at the support points (Fig. 4, b). In this case,

the ground rotations are taken into account indirectly in the form of a mutual translational displacements of the supports. For small rotations of soft, medium and hard soils it is reasonable. However, for very soft soils with low phase velocities, or for specific, dramatically inhomogeneous ground conditions the rotations can be significant. In this case the role of the rotational boundary conditions increases.

REFERENCES

1. Nazarov Yu.P. *Analiticheskie osnovy rascheta sooruzheniy na seysmicheskie vozdeystviya* [The analytical calculation fundamentals of constructions on seismic loads]. Moscow, Nauka Publ., 2010. 468 p. (In Russian)
2. Nazarov Yu.P. *Raschetnye parametry volnovykh poley seysmicheskikh dvizheniy grunta* [Calculation of wave seismic ground motion parameters]. Moscow, Nauka Publ., 2015. 374 p. (In Russian)

3. Nazarov Yu.P., Poznyak E., Filimonov A.V. A brief theory and computing of seismic ground rotations for structural analyses. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2015, vol. 71, pp. 31–41. DOI: 10.1016/j.soildyn.2015.01.013.
4. Nazarov Yu.P., Poznyak E.V. Nazarov Yu.P., Poznyak E.V. Otsenka rotatsionnykh komponent seysmicheskogo dvizheniya grunta [Evaluation of rotational components of seismic soil motion]. *Osnovaniya, fundamente i mekhanika gruntov* [The bases, foundations and soil mechanics]. 2015, no. 6, pp. 22–26. (In Russian)
5. Klaf R., Penzien Dzh. *Dinamika sooruzheniy* [Dynamics of Structures]. Moscow, Stroyizdat publ., 1979. 320 p. (In Russian)
6. Trifunac M.D. *Selected notes on rotations in structural response*. Report CE 07-04 Department of Civil Engineering University of Southern California, Los Angeles, California, 2007.
7. Bolotin V.V., Radin V.P., Chirkov V.P. Dinamika konstruktsey pri mnogokomponentnykh seysmicheskikh vozdeystviyakh [Dynamics of structures under multi-component seismic action]. *Mekhanika tverdogo tela. Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk* [Solid mechanics. Bulletin of the Russian Academy of Sciences]. 2000, no. 3, pp. 149–157. (In Russian)
8. Radin V.P., Trifonov O.V., Chirkov V.P. Model' mnogoetazhnogo karkasnogo zdaniya dlya raschetov na intensivnye seysmicheskie vozdeystviya [Model of multi-story frame building for intensive seismic analysis]. *Seysmostoykoe stroitel'stvo. Bezopasnost' sooruzheniy* [Earthquake engineering. Safety of facilities]. 2001, no. 1, pp. 23–26. (In Russian)
9. Nazarov Yu.P., Poznyak E. Response spectrum method for integrated and differential spatial seismic ground motions. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2018, vol. 108, pp. 69–78. DOI: 10.1016/j.soildyn.2018.02.014.
10. Lee W.H.K., Kanamori H., Jennings P., Kisslinger C. *International handbook of earthquake and engineering seismology, Part B*. New York – London, Academic Press, 2003, vol. 81B, 1031 p. (International Geophysics Series)
11. Bońkowski P.A., Zembaty Z., Minch M.Y. Time history response analysis of a slender tower under translational-rocking seismic excitations. *Engineering Structures*. 2018, vol. 155, pp. 387–393. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.11.042.
12. Mylona E.-K.V., Sextos A.G., Mylonakis G.E. Rotational seismic excitation effects on CIDH pile-supported bridge piers. *Engineering Structures*. 2017, vol. 138, pp. 181–194. DOI: 10.1016/j.engstruct.2017.01.071.
13. Karayannis C.G., Naoum M.C. Torsional behavior of multistory RC frame structures due to asymmetric seismic interaction. *Engineering Structures*. 2018, vol. 163, pp. 93–111. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.02.038.
14. Di Laora R., Grossi Y., De Sanctis L., Viggiani G.M.B. An analytical solution for the rotational component of the Foundation Input Motion induced by a pile group. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2017, vol. 97, pp. 424–438. DOI: 10.1016/j.soildyn.2017.03.027.
15. Srisangeerthan S., Hashemi M.J., Rajeev P., Gad E., Fernando S. Numerical study on the effects of diaphragm stiffness and strength on the seismic response of multi-story modular buildings. *Engineering Structures*. 2018, vol. 163, pp. 25–37. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.02.048.
16. Poznyak E.V. Ob otsenke vliyaniya seysmicheskikh rotatsiy na dinamiku stroitel'nykh konstruktsey [Estimation of seismic rotations influence on dynamic response of building structures]. *Spravochnik. Inzhenernyy zhurnal* [Handbook. An Engineering Journal]. 2017, vol. 9, pp. 14–23. DOI: 10.14489/hb.2017.09.pp.014-023. (In Russian)
17. Nazarov Yu.P., Poznyak E.V., Filimonov A.V. Seismic data analysis in Odyssey Software. *International Journal of Emerging Technologies in Computational and Applied Sciences (IJETCAS)*. December 2013 – February 2014, vol. 1, no. 7, pp. 75–77.
18. Falamarz-Sheikhabadi M.R., Ghafory-Ashtiani M. Rotational components in structural loading. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2015, vol. 75, pp. 220–233. DOI: 10.1016/j.soildyn.2015.04.012.
19. Trifunac M.D. The role of strong motion rotations in the response of structures near earthquake faults. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 2009, vol. 29, no. 2, pp. 382–393. DOI: 10.1016/j.soildyn.2008.04.001.
20. Nazarov Yu.P., Poznyak E.V. Modelirovanie protsessa rasprostraneniya voln Releya v prostranstve po zadannoy akselerogramme [Simulation of spatial propagation of Rayleigh waves in accordance with a given accelerogram]. *Stroitel'stvo i rekonstruktsiya* [Building and Reconstruction]. 2015, no. 2 (58), pp. 20–26. (In Russian)

Received

Adopted in final form on

Approved for publication

ABOUT THE AUTHOR: **Elena V. Poznyak** — Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, **National Research University "Moscow Power Engineering Institute" (MPEI)**, 14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russian Federation, PozniakYV@mpei.ru, Scopus Author ID 56422077100.