АППРОКСИМАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ КИНЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ КАРЛЕМАНА

С.А. Духновский

Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26

АННОТАЦИЯ. В статье рассматриваются свойства аппроксимационного решения уравнения Карлемана. Решение задачи Коши с периодическими начальными данными найдено для малых возмущений состояния равновесия. Приведены теорема существования глобального решения уравнения Карлемана, а также теорема существования нелинейного уравнения, которое получается из исходного кинетического уравнения. Доказано, что аппроксимационное решение слабо сходится к исходному решению уравнения Карлемана. Предположено, что решение задачи Коши распадается на суперпозицию слабо взаимодействующих солитонов и убывающую дисперсионную волну.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: уравнение Карлемана, нелинейное гиперболическое уравнение, Гильбертово пространство, задача Коши, слабое решение

ДЛЯ ЦИТИРОВАНИЯ: Духновский С.А. Аппроксимационное решение кинетической системы Карлемана // Строительство: наука и образование. 2017. Т. 7. Вып. 3 (24). Ст. 1. Режим доступа: <http://nso-journal.ru>.

AN APPROXIMATION SOLUTION OF THE KINETIC CARLEMAN SYSTEM

S.A. Dukhnovskiy

Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU), 26 Yaroslavskoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation

ABSTRACT. The properties of approximation solutions of the Carleman equation are discussed in this paper. A solution of the Cauchy problem with periodic initial data is obtained for small perturbations of the equilibrium state. The theorem of existence of a global solution of the Carleman equation as well as the theorem of nonlinear equation existence obtained by the kinetic Carleman equation has been brought over. It has been proved that the approximation solution converges weakly to the original solution of the Carleman equation. It is assumed that the solutions of the Cauchy problem split into the superposition of weakly interacting solitons and decreasing dispersion wave.

KEY WORDS: Carleman equation, nonlinear hyperbolic equation, Hilbert space, Cauchy problem, weak solution

FOR CITATION: Dukhnovskiy S.A. Approksimatsionnoe reshenie kineticheskoy sistemy Karlemana [An Approximation Solution of the Kinetic Carleman System]. Stroitel'stvo: nauka i obrazovanie [Construction: Science and Education]. 2017, vol. 7, issue 3 (24), paper 1. Available at: <http://nso-journal.ru>. (In Russian)

Исследуем дискретное уравнение Карлемана [1–10], которое является частным случаем уравнения Больцмана:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= \frac{1}{\varepsilon} (w^2 - u^2), \quad t > 0, \quad x \in R^1, \\ \partial_t w - \partial_x w &= -\frac{1}{\varepsilon} (w^2 - u^2), \end{aligned} \quad (1)$$

с периодическими начальными условиями

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= u^0(x), \quad w|_{t=0} = w^0(x), \\ u^0(x) &= u^0(x + 2\pi), \quad w^0(x) = w^0(x + 2\pi). \end{aligned} \quad (2)$$

где $u(x, t)$, $w(x, t)$ — плотности частиц, одна из которых движется с единичной скоростью вдоль оси Ox в положительном направлении, другая — в противоположном, а параметр ε является аналогом свободного пробега частицы.

Уравнение Карлемана (1) описывает смесь процессов: релаксацию и свободное движение. Суть релаксации заключается в распространении частиц в разных направлениях. Уравнение Карлемана является частным случаем дискретного уравнения Больцмана. В течение десятков лет исследований уравнения Больцмана было найдено лишь несколько точных решений этого уравнения. Изучение свойств системы Карлемана и поиск ее решений позволяет исследовать более сложные модели, такие как система Годунова—Султангазина [5–6] и Бродуэлла [11–13] для трех и четырех частиц соответственно. Многие авторы провели численное исследование уравнения Карлемана и численно исследовали математическое ожидание, дисперсию и другие характеристики системных решений Карлемана.

Будем решать нашу задачу в весовых пространствах $W_{2,\gamma}^1(R_+; H_\sigma)$, $L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma)$, H_σ , с соответствующими нормами

$$\begin{aligned}\|\hat{u}\|_{W_{2,\gamma}^1(R_+; H_\sigma)} &= \left\| \frac{d}{dt} \hat{u} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+; H_{\sigma-1})} + \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; H_\sigma)}, \\ \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; H_\sigma)}^2 &= \int_0^{+\infty} e^{2\gamma t} |u_0(t)|^2 dt + \\ &+ \int_0^{+\infty} e^{2\gamma t} \sum_{k \in Z_0} |k|^{2\sigma} |u_k(t)|^2 dt, \\ \|\hat{u}\|_{H_\sigma}^2 &= |u_0|^2 + \sum_{k \in Z_0} |k|^{2\sigma} |u_k|^2.\end{aligned}$$

Ищем решение системы (1)–(2) в виде

$$u = u_e + \varepsilon^2 (w_e)^{1/2} \hat{u}, \quad w = w_e + \varepsilon^2 (w_e)^{1/2} \hat{w}, \quad (3)$$

где $u_e = w_e$ — состояние равновесия; $\hat{u}(x, t)$, $\hat{w}(x, t)$ — ряды Фурье.

Подставляя выражение (3) в (1) и (2), получим систему уравнений для возмущений

$$\begin{aligned}\partial_t \hat{u} + \partial_x \hat{u} - \frac{2}{\varepsilon} w_e (\hat{w} - \hat{u}) &= \varepsilon w_e^{1/2} (\hat{w}^2 - \hat{u}^2), \\ \partial_t \hat{w} - \partial_x \hat{w} + \frac{2}{\varepsilon} w_e (\hat{w} - \hat{u}) &= -\varepsilon w_e^{1/2} (\hat{w}^2 - \hat{u}^2),\end{aligned} \quad (4)$$

с периодическими начальными условиями

$$u|_{t=0} = \hat{u}^0(x), \quad w|_{t=0} = \hat{w}^0(x).$$

Теорема 1. Существуют постоянные $\gamma = \varepsilon \mu_0$, $\mu_0 \in (0, 1)$, $q \in (0, 1)$, такие, что для периодических начальных условий $(\hat{u}^0, \hat{w}^0)$ с нулевыми средними и ограниченной нормой

$$(\|\hat{u}^0\|_{H_\sigma} + \|\hat{w}^0\|_{H_\sigma}) \leq \varepsilon^2 q, \quad (5)$$

для $\sigma > 3/2$ существует глобальное решение $\hat{u}(x, t)$, $\hat{w}(x, t) \in W_{2,\gamma}^1(R_+; H_\sigma)$ задачи Коши (4).

В работах [5, 10, 11] система уравнений Карлемана сводится к нелинейному уравнению в Гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m)})$:

$$\begin{aligned}z_k^{(m)} &= e^{-4w_e \frac{1}{\varepsilon} t} F_k^{(m)}(t) + \varepsilon w_e^{1/2} G_k^{(m)}(t) + \\ &+ \varepsilon w_e^{1/2} \left(4L_k^B \left(T_k^{-1} \left(z_k^{(m)} \right) \right) + \right. \\ &+ 2L_k^{(m)} \left(T_k^{-1} \left(z_k^{(m)} \right) \right) + \\ &+ 4B_k^{(m)} \left(T_k^{-1} \left(z_k^{(m)} \right), T_k^{-1} \left(z_k^{(m)} \right) \right) - \\ &\left. - \varepsilon w_e^{1/2} T_k^{add} \left(Q_k^{(m)} T_k^{-1} \left(e^{-ikt} \right) + T_k^{-1} \left(z_k^{(m)} \right) \right) \right).\end{aligned} \quad (6)$$

Теорема 2. Пусть $\sigma > 3/2$. Тогда существует единственное решение $Z^{(m)} \in L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m)})$ нелинейного уравнения (6), если

$$(\|\hat{u}^0\|_{H_\sigma^{(m)}} + \|\hat{w}^0\|_{H_\sigma^{(m)}}) \leq \varepsilon^2 q, \quad q \in (0, 1), \quad (7)$$

для которого выполняется неравенство

$$\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m)})}^2 \leq \frac{c_{1,\sigma}}{\varepsilon^{1/2}} \left(\|\hat{u}^0\|_{H_\sigma^{(m)}} + \|\hat{w}^0\|_{H_\sigma^{(m)}} \right). \quad (8)$$

Теорема 3. Последовательность аппроксимационных решений

$$\begin{aligned}\hat{u}^{(m)}(x, t) &= u_0^{(m)}(t) + \sum_{k \in Z_0, |k| \leq m} u_k^{(m)}(t) e^{ikx}, \\ \hat{w}^{(m)}(x, t) &= w_0^{(m)}(t) + \sum_{k \in Z_0, |k| \leq m} w_k^{(m)}(t) e^{ikx},\end{aligned} \quad (9)$$

фундаментальна по норме Гильбертова пространства $W_{2,\gamma}^1(R_+; H_\sigma)$. Более того, она стремится к слабому решению $\hat{u}(x, t)$, $\hat{w}(x, t)$ задачи Коши (4):

$$\begin{aligned}&\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{u} (\partial_t + \partial_x) \varphi(t, x) + 2w_e \frac{1}{\varepsilon} (\hat{w} - \hat{u}) \varphi(t, x) - \right. \\ &\left. - \frac{1}{\varepsilon} (\hat{u}^2 - \hat{w}^2) \varphi(t, x) \right) dt dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}^0 \varphi(t, x) \Big|_{t=0} dx = 0, \\ &\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{w} (\partial_t - \partial_x) \psi(t, x) - 2w_e \frac{1}{\varepsilon} (\hat{w} - \hat{u}) \psi(t, x) + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\varepsilon} (\hat{u}^2 - \hat{w}^2) \psi(t, x) \right) dt dx + \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{w}^0 \psi(t, x) \Big|_{t=0} dx = 0\end{aligned}$$

для любых пробных функций $\varphi, \psi \in C_0^\infty(R_+ \times R^1)$.

Теорема 4. Последовательность

$$Z^{(m)} = \{z_k^{(m)}, |k| \leq m, k \neq 0\}$$

является фундаментальной в пространстве $L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m)})$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} Z^{(m)} = Z$.

Рассмотрим разность нелинейных уравнений (6) с разными индексами $m_2 > m_1$ при $|k| \leq m_1$ в $L_{2,\gamma}(R_+)$:

$$\begin{aligned}&\|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 \leq \\ &\leq \left\| e^{-4w_e \frac{1}{\varepsilon} t} \left(F_k^{(m_2)}(t) - F_k^{(m_1)}(t) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \\ &+ \varepsilon^2 w_e \|G_k^{(m_2)}(t) - G_k^{(m_1)}(t)\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \\ &+ \varepsilon^2 w_e \left\{ 4 \left\| L_k^B \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right) - T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \right. \\ &+ 4 \left\| L_k^{(m_2)} \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right) \right) - L_k^{(m_1)} \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \\ &+ 16 \left\| B_k^{(m_2)} \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right), T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right) \right) - \right. \\ &\left. - B_k^{(m_1)} \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right), T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \\ &+ \left\| T_k^{add} \left(Q_k^{(m_2)} T_k^{-1} \left(e^{-ikt} \right) + T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right) \right) - \right. \\ &\left. - T_k^{add} \left(Q_k^{(m_1)} T_k^{-1} \left(e^{-ikt} \right) + T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2.\end{aligned} \quad (10)$$

Умножим вышеуказанное неравенство на $|j|^{2\sigma}$ и возьмем супремум. Оценим, например, разность билинейных форм. Остальные выражения оцениваются аналогично. Имеем

$$\begin{aligned}
J &= \varepsilon^2 w_e \sup_{k \in Z_0, |k| \leq m_1} |k|^{2\sigma} \left\| B_k^{(m_2)} \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right), T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right) \right) - \right. \\
&\quad \left. - B_k^{(m_1)} \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right), T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 = \\
&= \varepsilon^2 w_e \sup_{k \in Z_0, |k| \leq m_1} |k|^{2\sigma} \left\| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_2}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_2)} \right) ds \times \right. \\
&\quad \times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right) - \\
&\quad - \sum_{\substack{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_1}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_1)} \right) ds \times \\
&\quad \times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_1)} \right) ds - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_1)} \right) \right) \left. \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2. \quad (11)
\end{aligned}$$

Заметим, что сумму при m_2 можно расписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_2}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_2)} \right) ds \times \\
&\times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right) = \\
&= \sum_{\substack{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_2, \\ \max(|k_1|, |k_2|) > m_1}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_2)} \right) ds \times \\
&\times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right) + \\
&+ \sum_{\substack{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_1}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_2)} \right) ds \times \\
&\times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right).
\end{aligned}$$

Применяем данное выражение к выражению (11), а также добавим и вычтем обратный оператор $T_k^{-1} \left(z_k^{(m)} \right)$ в подынтегральных выражениях для того, чтобы оценка выражалась через разность:

$$\begin{aligned}
J &= \varepsilon^2 w_e \sup_{k \in Z_0, |k| \leq m_1} |k|^{2\sigma} \left\| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_2, \\ \max(|k_1|, |k_2|) > m_1}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_2)} \right) ds \times \right. \\
&\times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right) + \\
&+ \sum_{\substack{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_1}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_2)} - z_{k_2}^{(m_1)} \right) ds \times \\
&\times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right) - \\
&- \sum_{\substack{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_1}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_1)} \right) ds \times \\
&\times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_1)} - z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - \right. \\
&\quad \left. - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_1)} - z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right) \left. \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2.
\end{aligned}$$

Расписывая норму и внося супремум под знак интеграла, получаем одно из выражений типа

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left\| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_1}} \frac{1}{|k_2|^\sigma} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} |k_2|^\sigma T_{k_2}^{-1} \times \right. \\
&\times \left(z_{k_2}^{(m_2)} - z_{k_2}^{(m_1)} \right) ds \times \\
&\times \left. \sup_{k_1 \in Z_0, |k_1| \leq m_1} |k_1|^\sigma \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \times \right. \right. \\
&\times \left. \left. \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right) \right\|^2 dt.
\end{aligned}$$

Другие оцениваются аналогично. Здесь мы умножили и разделили на $|k_2|^\sigma$ для получения нормы. Далее выносим из-под суммы супремум выражения, зависящего от параметра k_2 тогда имеем

$$\begin{aligned}
J_1 &= \sup_t \sup_{k_1 \in Z_0, |k_1| \leq m_1} \left| i \int_0^t e^{ik_2(s-t)} |k_2|^\sigma T_{k_2}^{-1} \times \right. \\
&\times \left. \left(z_{k_2}^{(m_2)} - z_{k_2}^{(m_1)} \right) ds \right|^2 \times \\
&\times \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sup_{k_1 \in Z_0, |k_1| \leq m_1} |k_1|^\sigma \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - \right. \right. \\
&\times \left. \left. T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right) \right|^2 dt \times \\
&\times \sum_{\substack{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_1}} \frac{k_2^2}{|k_2|^{2\sigma}}.
\end{aligned}$$

Вычисляем супремум

$$I = \sup_t \sup_{k_2 \in Z_0, |k_2| \leq m_1} \left| i \int_0^t e^{ik_2(s-t)} |k_2|^\sigma e^{-\gamma t} e^{\gamma t} T_{k_2}^{-1} \times \right. \\
\times \left. \left(z_{k_2}^{(m_2)} - z_{k_2}^{(m_1)} \right) ds \right|^2.$$

Воспользуемся неравенством Гельдера, получаем

$$\begin{aligned}
I &\leq \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t} dt \right) \times \\
&\times \left(\int_0^\infty e^{2\gamma t} \sup_{k_2 \in Z_0, |k_2| \leq m_1} |k_2|^\sigma \left| T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_2)} - z_{k_2}^{(m_1)} \right) \right|^2 dt \right) \leq \\
&\leq \frac{C_1}{\gamma} \left\| T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_2)} - z_{k_2}^{(m_1)} \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2.
\end{aligned}$$

Пользуемся тем, что $\gamma = \varepsilon \mu_0$ и оценкой линейризованного оператора [3]. Отсюда

$$I \leq \frac{1}{\varepsilon^3} c_2 \left\| Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2.$$

Остается второе слагаемое, которое является самой нормой. Опять пользуемся оценкой:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{2\gamma t} \left| \sup_{k_1 \in Z_0, |k_1| \leq m_1} |k_1|^\sigma \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - \right. \right. \\
&\times \left. \left. T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right) \right|^2 dt = \\
&= \left\| ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - \right. \\
&\quad \left. T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2 \leq \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} c_3 \left\| Z^{(m_2)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2.
\end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$J_1 \leq \frac{1}{\varepsilon^5} c_4 \left\| Z^{(m_2)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2 \left\| Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2.$$

Для параметра J неравенство примет вид

$$J \leq \sum_{\substack{k_1+k_2=k, k \in Z_0, |k_1| \leq m_2, \\ |k_1| > m_1}} \frac{c_0}{|k_1|^{2\sigma}} \|Z^{(m_2)}\|^4_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_2)})} + c_{4,\sigma} \|Z^{(m_2)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_2)})} \|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})} + c_{5,\sigma} \|Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})} \|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}. \quad (12)$$

Заметим, что

$$\sum_{k_1+k_2=k, k \in Z_0, m_1 < |k_1| \leq m_2} \frac{1}{|k_1|^{2\sigma}} < \sum_{k_1+k_2=k, k \in Z_0, |k_1| > m_1} \frac{1}{|k_1|^{2\sigma}} \leq \frac{1}{2\sigma-1} \frac{1}{m_1^{2\sigma-1}}. \quad (13)$$

С учетом (13) и теоремы 2, неравенство (12) примет следующий вид:

$$J \leq \frac{c_4}{m_1^{2\sigma-1}} q^4 + c_{5,\sigma} q^2 \|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}.$$

Применяем к уравнению (10) неравенство для величины J :

$$\|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})} \leq \frac{c_6}{m_1^{2\sigma-1}} q^4 + c_{8,\sigma} q^2 \|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}.$$

Переносим норму, стоящую справа:

$$\|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})} (1 - c_{8,\sigma} q^2) \leq \frac{c_6}{m_1^{2\sigma-1}} q^4.$$

Потребуем, чтобы выполнялось $1 - c_{8,\sigma} q^2 > 0$, тогда

$$\|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})} \leq \frac{c_6 q^4}{m_1^{2\sigma-1} (1 - c_{8,\sigma} q^2)}.$$

Заметим, что

$$H_\sigma^{(m)} \subset H_\sigma,$$

если элементы пространства $H_\sigma^{(m)}$ продолжить нулями при условии $|j| > m$. В этом случае можно записать

$$\|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|^2_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma)} \leq \frac{c_6 q^4}{m_1^{2\sigma-1} (1 - c_{8,\sigma} q^2)},$$

Это выражение дает, что $Z^{(m)}$ является фундаментальной последовательностью.

Отсюда следует, что $\hat{u}^{(m)}(x, t), \hat{w}^{(m)}(x, t)$ слабо сходятся к решению задачи Коши $\hat{u}(x, t), \hat{w}(x, t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Больцман Л. Избранные труды : пер. с нем. ; в 3 ч. М. : Наука, 1984. 590 с. (Классики науки)
2. Васильева О.А., Духновский С.А. Условие секулярности кинетической системы Карлемана // Вестник МГСУ. 2015. № 7. С. 33–40.
3. Духновский С.А. О скорости стабилизации решений задачи Коши для уравнения Карлемана с периодическими начальными данными // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2017. Т. 21. № 1. С. 7–41.
4. Духновский С.А. Об оценках линеаризованного оператора кинетической системы Карлемана // Вестник МГСУ. 2016. № 9. С. 7–14.
5. Годунов С.К., Султангазин У.М. О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи математических наук. 1974. Т. XXVI. Вып. 3 (159). С. 351.
6. Васильева О.А., Духновский С.А., Радкевич Е.В. О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова—Султангазина // Труды Седьмой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 22–29 августа, 2014) : в 3 ч.; Ч. 3. М. : РУДН, 2016. С. 23–81.
7. Карлеман Т. Математические задачи кинетической теории газов : пер. с франц. М. : ИЛ, 1960, 118 с.
8. Васильева О.А., Духновский С.А., Радкевич Е.В. О локальном равновесии уравнения Карлемана // Проблемы математического анализа. 2015. Т. 78. С. 165–190.
9. Radkevich E.V., Vasileva O.A., Dukhnovskii S.A. Local equilibrium of the Carleman equation // Journal of Mathematical Sciences. 2015. Vol. 207. No. 32. Pp. 296–323.
10. Васильева О.А. Численное исследование системы уравнений Карлемана // Вестник МГСУ. 2015. № 6. С. 7–15.
11. Радкевич Е.В. О дискретных кинетических уравнениях // Доклады Академии наук. 2012. Т. 447. № 4. С. 369–373.
12. Radkevich E.V. The existence of global solutions to the Cauchy problem for discrete kinetic equations // Journal of Mathematical Sciences. 2012. Vol. 181. No. 2. Pp. 232–280.
13. Радкевич Е.В. О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного дискретного кинетического уравнения // Труды Шестой Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (Москва, 14–21 августа, 2011) : в 3 ч.; ч. 3. М. : РУДН, 2013. С. 108–139.
14. Vasil'eva O. Some results of numerical investigation of the Carleman system // Procedia Engineering. 2015. Vol. 111: XXIV R-S-P seminar, Theoretical Foundation of Civil Engineering (24RSP) (TFoCE 2015). Pp. 834–838.
15. Broadwell T.E. Study of rarified shear flow by the discrete velocity method // Journal of Fluid Mechanics. 1964. Vol. 19. No. 3. Pp. 401–414.
16. Ильин О.В. Стационарные решения кинетической модели Бродуэлла // Теоретическая и математическая физика. 2012. Т. 170. № 3. С. 481–488.
17. Аджиев С.З., Амосов С.А., Веденяпин В.В. Одномерные дискретные модели кинетических уравнений для смесей // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2004. Т. 44. № 3. С. 553–558.

18. Ильин О.В. Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2007. Т. 47. № 12. С. 2076–2087.

19. Бельский В.З., Васильева О.А., Кукаркин А.Б., Программный модуль «Алгебра дифференцирования TAYLOR»: результаты численных экспериментов, сообщение о версии 2.1. // Кибернетика и системный анализ. 1997. № 3. С. 171–184.

20. Aristov V., Ilyin O. Kinetic model of the spatio-temporal turbulence // Physical Letters A. 2010. Vol. 374. Issue 43. Pp. 4381–4384.

21. Aristov V.V. Direct methods for solving the Boltzmann equation and study of nonequilibrium flows. Kluwer Academic Publishing, 2001. 312 p.

22. Радкевич Е.В. Математические вопросы неравновесных процессов. Новосибирск : Изд-во Т. Рожковской, 2007. 300 с.

23. Духновский С.А. Система уравнений Карлемана. Условие секулярности // Математика. Компьютер. Образование: тез. XXIII междунар. конф. (г. Дубна, 25–30 января 2016). М. ; Ижевск : Регулярная и хаотическая динамика, 2016. С. 197.

Поступила в редакцию в феврале 2017 г.

Принята в доработанном виде в марте 2017 г.

Одобрена для публикации в августе 2017 г.

Об авторе: Духновский Сергей Анатольевич — аспирант кафедры прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет (НИУ МГСУ), 129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26, sergeidukhnvskij@rambler.ru.

Let's take a detailed look at the discrete Carleman equation [1–10], which is a special case of the Boltzmann equation:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \partial_x u &= \frac{1}{\varepsilon} (w^2 - u^2), \quad t > 0, x \in R^1, \\ \partial_t w - \partial_x w &= -\frac{1}{\varepsilon} (w^2 - u^2), \end{aligned} \quad (1)$$

with periodic initial data

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= u^0(x), \quad w|_{t=0} = w^0(x), \\ u^0(x) &= u^0(x + 2\pi), \quad w^0(x) = w^0(x + 2\pi). \end{aligned} \quad (2)$$

where $u(x, t)$, $w(x, t)$ — density of particles, one of which is moving with unitary particle velocity along the positive axis Ox , and the other one — along the negative, while as parameter ε is similar to free path of a particle.

Carleman equation (1) describes the combination of processes such as relaxation and free path. Essentially, relaxation is the spread of particles in different directions. Carleman equation is a special case of the discrete Boltzmann equation. For a period of several decades, only a few accurate solutions of the Boltzmann equation have been found. Studying the properties of the Carleman system and finding its solutions allows exploring more complex models such as Godunov-Sultangazin system [5–6] and Broadwell [11–13] for tree and four particles, respectively. Many authors implemented numerical study of the Carleman equation and numerically researched mathematical expectation, dispersion and other characteristics of the Carleman system solutions.

Let's solve our problem in weight spaces $W_{2,\gamma}^1(R_+; H_\sigma)$, $L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma)$, H_σ , conforming standard specifications

$$\|\hat{u}\|_{W_{2,\gamma}^1(R_+; H_\sigma)} = \left\| \frac{d}{dt} \hat{u} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+; H_{\sigma-1})} + \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; H_\sigma)},$$

$$\begin{aligned} \|\hat{u}\|_{L_{2,\gamma}(R_+; H_\sigma)}^2 &= \int_0^{+\infty} e^{2\gamma t} |u_0(t)|^2 dt + \\ &+ \int_0^{+\infty} e^{2\gamma t} \sum_{k \in Z_0} |k|^{2\sigma} |u_k(t)|^2 dt, \\ \|\hat{u}\|_{H_\sigma}^2 &= |u_0|^2 + \sum_{k \in Z_0} |k|^{2\sigma} |u_k|^2. \end{aligned}$$

We are searching for the solution of the system (1)–(2) in the form of:

$$u = u_e + \varepsilon^2 (w_e)^{1/2} \hat{u}, \quad w = w_e + \varepsilon^2 (w_e)^{1/2} \hat{w}, \quad (3)$$

where $u_e = w_e$ — equilibrium state; $\hat{u}(x, t)$, $\hat{w}(x, t)$ — Fourier series.

Inserting the expression (3) into (1) and (2), the system of equations for perturbations is obtained

$$\begin{aligned} \partial_t \hat{u} + \partial_x \hat{u} - \frac{2}{\varepsilon} w_e (\hat{w} - \hat{u}) &= \varepsilon w_e^{1/2} (\hat{w}^2 - \hat{u}^2), \\ \partial_t \hat{w} - \partial_x \hat{w} + \frac{2}{\varepsilon} w_e (\hat{w} - \hat{u}) &= -\varepsilon w_e^{1/2} (\hat{w}^2 - \hat{u}^2), \end{aligned} \quad (4)$$

with periodic initial data

$$u|_{t=0} = \hat{u}^0(x), \quad w|_{t=0} = \hat{w}^0(x).$$

Theorem 1. There exist such constants $\gamma = \varepsilon \mu_0$, $\mu_0 \in (0, 1)$, $q \in (0, 1)$ that for periodic initial data $(\hat{u}^0, \hat{w}^0)$ with zero average and bounded norm

$$\left(\|\hat{u}^0\|_{H_\sigma} + \|\hat{w}^0\|_{H_\sigma} \right) \leq \varepsilon^2 q, \quad (5)$$

where $\sigma > 3/2$, there exists a global solution $\hat{u}(x, t)$, $\hat{w}(x, t) \in W_{2,\gamma}^1(R_+; H_\sigma)$ of the Cauchy problem.

In the papers [5, 10, 11], the system of Carleman equations comes down to the non-linear equation in Hilbert space $L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m)})$:

$$\begin{aligned}
 z_k^{(m)} = & e^{-4w_e \frac{1}{\varepsilon} t} F_k^{(m)}(t) + \varepsilon w_e^{1/2} G_k^{(m)}(t) + \\
 & + \varepsilon w_e^{1/2} \left(4L_k^B \left(T_k^{-1} \left(z_k^{(m)} \right) \right) + \right. \\
 & + 2L_k^{(m)} \left(T_k^{-1} \left(z_k^{(m)} \right) \right) + \\
 & + 4B_k^{(m)} \left(T_k^{-1} \left(z_k^{(m)} \right), T_k^{-1} \left(z_k^{(m)} \right) \right) - \\
 & \left. - \varepsilon w_e^{1/2} T_k^{add} \left(Q_k^{(m)} T_k^{-1} \left(e^{-ikt} \right) + T_k^{-1} \left(z_k^{(m)} \right) \right) \right). \quad (6)
 \end{aligned}$$

Theorem 2. Suppose $\sigma > 3/2$. There exists the only solution $Z^{(m)} \in L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m)})$ of the non-linear equation (6), if

$$\left(\|\hat{u}^0\|_{H_\sigma^{(m)}} + \|\hat{w}^0\|_{H_\sigma^{(m)}} \right) \leq \varepsilon^2 q, q \in (0, 1), \quad (7)$$

for which inequality is applied

$$\|Z^{(m)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m)})}^2 \leq \frac{c_{1,\sigma}}{\varepsilon^{1/2}} \left(\|\hat{u}^0\|_{H_\sigma^{(m)}} + \|\hat{w}^0\|_{H_\sigma^{(m)}} \right). \quad (8)$$

Theorem 3. Sequence of approximation solutions

$$\begin{aligned}
 \hat{u}^{(m)}(x, t) &= u_0^{(m)}(t) + \sum_{k \in Z_0, |k| \leq m} u_k^{(m)}(t) e^{ikx}, \\
 \hat{w}^{(m)}(x, t) &= w_0^{(m)}(t) + \sum_{k \in Z_0, |k| \leq m} w_k^{(m)}(t) e^{ikx}, \quad (9)
 \end{aligned}$$

is fundamental according to the Hilbert space norm $W_{2,\gamma}^1(R_+, H_\sigma)$. Moreover, it tends to a weak solution $\hat{u}(x, t)$, $\hat{w}(x, t)$ of the Cauchy problem (4):

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{u}(\partial_t + \partial_x) \varphi(t, x) + 2w_e \frac{1}{\varepsilon} (\hat{w} - \hat{u}) \varphi(t, x) - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{\varepsilon} (\hat{u}^2 - \hat{w}^2) \varphi(t, x) \right) dt dx + \\
 & + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}^0 \varphi(t, x) \Big|_{t=0} dx = 0, \\
 & \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\hat{w}(\partial_t - \partial_x) \psi(t, x) - 2w_e \frac{1}{\varepsilon} (\hat{w} - \hat{u}) \psi(t, x) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{\varepsilon} (\hat{u}^2 - \hat{w}^2) \psi(t, x) \right) dt dx + \\
 & + \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{w}^0 \psi(t, x) \Big|_{t=0} dx = 0
 \end{aligned}$$

for any testing functions $\varphi, \psi \in C_0^\infty(R_+ \times R^1)$.

Theorem 4. Sequence

$$Z^{(m)} = \{z_k^{(m)}, |k| \leq m, k \neq 0\}$$

is fundamental in the space $L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m)})$ and $\lim_{m \rightarrow \infty} Z^{(m)} = Z$.

Let's consider difference of non-linear equations (6) with different index numbers $m_2 > m_1$ where $|k| \leq m_1$ in $L_{2,\gamma}(R_+)$:

$$\begin{aligned}
 & \|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 \leq \\
 & \leq \left\| e^{-4w_e \frac{1}{\varepsilon} t} \left(F_k^{(m_2)}(t) - F_k^{(m_1)}(t) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \\
 & + \varepsilon^2 w_e \|G_k^{(m_2)}(t) - G_k^{(m_1)}(t)\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \\
 & + \varepsilon^2 w_e \left\{ 4 \left\| L_k^B \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right) - T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \right. \\
 & + 4 \left\| L_k^{(m_2)} \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right) \right) - L_k^{(m_1)} \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \\
 & + 16 \left\| \left[B_k^{(m_2)} \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right), T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right) \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - B_k^{(m_1)} \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right), T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right) \right) \right] \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 + \\
 & + \left\| T_k^{add} \left(Q_k^{(m_2)} T_k^{-1} \left(e^{-ikt} \right) + T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right) \right) - \right. \\
 & \left. - T_k^{add} \left(Q_k^{(m_1)} T_k^{-1} \left(e^{-ikt} \right) + T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Let's multiply the above-mentioned inequality by $|j|^{2\sigma}$ and take supremum. Let's estimate, for example, the difference of the bilinear forms. Other expressions can be assessed analogously. If we have

$$\begin{aligned}
 J &= \varepsilon^2 w_e \sup_{k \in Z_0, |k| \leq m_1} |k|^{2\sigma} \left\| B_k^{(m_2)} \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right), T_k^{-1} \left(Z^{(m_2)} \right) \right) - \right. \\
 & \left. - B_k^{(m_1)} \left(T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right), T_k^{-1} \left(Z^{(m_1)} \right) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 = \\
 & = \varepsilon^2 w_e \sup_{k \in Z_0, |k| \leq m_1} |k|^{2\sigma} \left\| \sum_{|k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_2} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_2)} \right) ds \times \right. \\
 & \times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right) - \\
 & - \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_1} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_1)} \right) ds \times \\
 & \times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_1)} \right) ds - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_1)} \right) \right) \Big\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2.
 \end{aligned}$$

Let us remark here that the sum with m_2 could be expressed in such a manner:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_2} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_2)} \right) ds \times \\
 & \times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right) = \\
 & = \sum_{\substack{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_2, \\ \max(|k_1|, |k_2|) > m_1}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_2)} \right) ds \times \\
 & \times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right) + \\
 & + \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_1} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1} \left(z_{k_2}^{(m_2)} \right) ds \times \\
 & \times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) ds - T_{k_1}^{-1} \left(z_{k_1}^{(m_2)} \right) \right).
 \end{aligned}$$

We apply the given formula to the equation (11) and also add and subtract the inverse operator $T_k^{-1}(z_k^{(m)})$ in the expressions under integral sign in order to express estimate via difference:

$$J = \varepsilon^2 w_e \sup_{k \in Z_0, |k| \leq m_1} |k|^{2\sigma} \left\| \sum_{\substack{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_2, \\ \max(|k_1|, |k_2|) > m_1}} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m_2)}) ds \times \right. \\ \left. \times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m_1)}) ds - T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m_1)}) \right) + \right. \\ \left. + \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_1} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m_2)} - z_{k_2}^{(m_1)}) ds \times \right. \\ \left. \times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m_2)}) ds - T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m_2)}) \right) - \right. \\ \left. - \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_1} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m_1)}) ds \times \right. \\ \left. \times \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m_1)} - z_{k_1}^{(m_2)}) ds - \right. \right. \\ \left. \left. \times \left(ik_1 \int_0^t -T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m_1)} - z_{k_1}^{(m_2)}) \right) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2.$$

By describing the norm and inserting supremum under the integral sign, we obtain one of the expressions of this type

$$J_1 = \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left\| \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_1} \frac{1}{|k_2|^\sigma} ik_2 \int_0^t e^{ik_2(s-t)} |k_2|^\sigma T_{k_2}^{-1} \times \right. \\ \left. \times (z_{k_2}^{(m_2)} - z_{k_2}^{(m_1)}) ds \times \right. \\ \left. \times \sup_{k_1 \in Z_0, |k_1| \leq m_1} |k_1|^\sigma \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (z_{k_1}^{(m_2)} - z_{k_1}^{(m_1)}) ds - T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m_2)}) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 dt.$$

The others are assessed in a similar way. To obtain the norm, herein we multiplied and divided by $|k_2|^\sigma$. Then we take supremum of the expression depending on the parameter k_2 out of the sum and obtain the following:

$$J_1 = \sup_t \sup_{k_1 \in Z_0, |k_1| \leq m_1} \left\| \int_0^t e^{ik_2(s-t)} |k_2|^\sigma T_{k_2}^{-1} \times \right. \\ \left. \times (z_{k_2}^{(m_2)} - z_{k_2}^{(m_1)}) ds \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 \times \\ \times \int_0^\infty e^{2\gamma t} \left\| \sup_{k_1 \in Z_0, |k_1| \leq m_1} |k_1|^\sigma \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m_2)}) ds - \right. \right. \\ \left. \left. T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m_2)}) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2 dt \times \\ \times \sum_{k_1+k_2=k, |k_1|, |k_2| \leq m_1} \frac{k_2^{2\sigma}}{|k_2|^{2\sigma}}.$$

Supremum is enumerated by

$$I = \sup_t \sup_{k_2 \in Z_0, |k_2| \leq m_1} \left\| \int_0^t e^{ik_2(s-t)} |k_2|^\sigma e^{-\gamma t} e^{\gamma t} T_{k_2}^{-1} \times \right. \\ \left. \times (z_{k_2}^{(m_2)} - z_{k_2}^{(m_1)}) ds \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+)}^2.$$

By applying Holder inequality, we obtain the following:

$$I \leq \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t} dt \right) \times \\ \times \left(\int_0^\infty e^{2\gamma t} \sup_{k_2 \in Z_0, |k_2| \leq m_1} |k_2|^\sigma \left\| T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m_2)} - z_{k_2}^{(m_1)}) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2 dt \right) \leq \\ \leq \frac{c_1}{\gamma} \left\| T_{k_2}^{-1}(z_{k_2}^{(m_2)} - z_{k_2}^{(m_1)}) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2.$$

We assume that $\gamma = \varepsilon \mu_0$ and apply the estimate of a linearized operator [3].

From here

$$I \leq \frac{1}{\varepsilon^3} c_2 \left\| Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2.$$

It only remains addend which is the norm itself. Once again we apply the estimate:

$$\int_0^\infty e^{2\gamma t} \left\| \sup_{k_1 \in Z_0, |k_1| \leq m_1} |k_1|^\sigma \left(ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m_2)}) ds - \right. \right. \\ \left. \left. T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m_2)}) \right) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2 dt = \\ = \left\| ik_1 \int_0^t e^{ik_1(s-t)} T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m_2)}) ds - \right. \\ \left. T_{k_1}^{-1}(z_{k_1}^{(m_2)}) \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2 \leq \\ \leq \frac{1}{\varepsilon^2} c_3 \left\| Z^{(m_2)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2.$$

Thus, we have

$$I \leq \frac{1}{\varepsilon^3} c_2 \left\| Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2.$$

For the parameter J inequality takes the form of

$$J \leq \sum_{\substack{k_1+k_2=k, k \in Z_0, |k_1| \leq m_2, \\ |k_1| > m_1}} \frac{c_0}{|k_1|^{2\sigma}} \left\| Z^{(m_2)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_2)})}^4 \\ + c_{4,\sigma} \left\| Z^{(m_2)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_2)})}^2 \left\| Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2 + \\ + c_{5,\sigma} \left\| Z^{(m_1)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2 \left\| Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2. \quad (12)$$

Let us remark here that

$$\sum_{k_1+k_2=k, k \in Z_0, m_1 < |k_1| \leq m_2} \frac{1}{|k_1|^{2\sigma}} < \\ < \sum_{k_1+k_2=k, k \in Z_0, |k_1| > m_1} \frac{1}{|k_1|^{2\sigma}} \leq \frac{1}{2\sigma-1} \frac{1}{m_1^{2\sigma-1}}. \quad (13)$$

With provision for (13) and theorem 2, inequality (12) would take the following form:

$$J \leq \frac{c_4}{m_1^{2\sigma-1}} q^4 + c_{5,\sigma} q^2 \left\| Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2.$$

Inequality for the value J is applied to the equation (10):

$$\left\| Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2 \leq \\ \leq \frac{c_6}{m_1^{2\sigma-1}} q^4 + c_{8,\sigma} q^2 \left\| Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)} \right\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_\sigma^{(m_1)})}^2.$$

The norm from the right-hand side is transposed:

$$\|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_{\sigma}^{(m_1)})}^2 (1 - c_{8,\sigma} q^2) \leq \frac{c_6}{m_1^{2\sigma-1}} q^4.$$

We required that condition is met $1 - c_{8,\sigma} q^2 > 0$, then

$$\|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_{\sigma}^{(m_1)})}^2 \leq \frac{c_6 q^4}{m_1^{2\sigma-1} (1 - c_{8,\sigma} q^2)}.$$

Let us remark that

$$H_{\sigma}^{(m)} \subset H_{\sigma},$$

if the space elements $H_{\sigma}^{(m)}$ are continued with zero elements under condition that $|j| > m$. In this case it can be written as

$$\|Z^{(m_2)} - Z^{(m_1)}\|_{L_{2,\gamma}(R_+, H_{\sigma})}^2 \leq \frac{c_6 q^4}{m_1^{2\sigma-1} (1 - c_{8,\sigma} q^2)},$$

This expression proves that $Z^{(m)}$ is a fundamental sequence.

This implies that $\hat{u}^{(m)}(x, t), \hat{w}^{(m)}(x, t)$ weakly comes down to the Cauchy problem solution $\hat{u}(x, t), \hat{w}(x, t)$.

REFERENCES

1. Boltzmann L. *Izbrannye trudy* [Selected Works]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 590 p. (In Russian)
2. Vasil'eva O.A., Duhnovskii S.A. Uslovie sekulyarnosti kineticheskoy sistemy Karlemana [Secularity Condition of the Kinetic Carleman Equation]. *Vestnik MGSU*. [Proceeding of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015, no. 7, pp. 33–40. (In Russian)
3. Duhnovskii S.A. O skorosti stabilizatsii resheniy zadachi Koshi dlya uravneniya Karlemana [On a Speed of Solutions Stabilization of the Cauchy Problem for the Carleman Equation]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* [Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 7–41. doi: 10.14498/vsgtu1529. (In Russian)
4. Dukhnovskiy S.A. Ob otsenkakh linearizovannogo operatora kineticheskoy sistemy Karlemana [On Estimates of the Linearized Operator of the Kinetic Carleman System]. *Vestnik MGSU* [Proceedings of Moscow State University of Civil Engineering]. 2016, no. 9, pp. 7–14. doi: 10.22227/1997-0935.2016.9.7-14. (In Russian)
5. Godunov S.K., Sultangazin U.M. O diskretnykh modelyakh kineticheskogo uravneniya Bol'tsmana [On Discrete Models of the Kinetic Boltzmann Equation]. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* [The Success of Mathematical Sciences]. 1974, no. 1, pp. 3–51. (In Russian)
6. Vasil'eva O.A., Duhnovskii S.A., Radkevich E.V. O prirode lokal'nogo ravновесiya uravnenij Karlemana i Godunova—Sultangazina [On the Nature of Local Equilibrium in the Carleman and Godunov—Sultangazin Equations]. *Trudy Sed'moy Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym i funktsional'no-differentsial'nym uravneniyam* [Proceedings of the Seventh International Conference on Differential and Functional-Differential Equations] (Moskva, 22–29 avgusta, 2014). Chast' 3, *SMFN* [Contemporary Mathematics. Fundamental Directions]. Moscow, RUDN Publ., 2016, pp. 23–81. (In Russian)
7. Karleman T. *Matematicheskie zadachi kineticheskoy teorii gazov* [Mathematical Problems of the Kinetic Gases Theory]. Moscow, 1960, 118 p. (In Russian)
8. Vasil'eva O.A., Duhnovskii S.A., Radkevich E.V. O lokal'nom ravновесии uravneniya Karlemana [Local Equilibrium of the Carleman Equation]. *Problemy matematicheskogo analiza*. [The Problems of Mathematical Analysis]. 2015, vol. 78, pp. 165–190. (In Russian)
9. Radkevich E.V., Vasil'eva O.A., Dukhnovskii S.A. Local Equilibrium of the Carleman Equation. *Journal of Mathematical Sciences*. 2015, vol. 207, no. 2, pp. 296–323. doi: 10.1007/s10958-015-2373-x.
10. Vasil'eva O.A. Chislennoe issledovanie sistemy uravnenii Karlemana [Numerical Investigation of the Carleman System]. *Vestnik MGSU*. [Proceeding of Moscow State University of Civil Engineering]. 2015, no. 6, pp. 7–15. (In Russian)
11. Radkevich E.V. O diskretnykh kineticheskikh uravneniyakh [On Discrete Kinetic Equations]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences]. 2012, vol. 447, no. 4, p. 369 (In Russian).
12. Radkevich E.V. The Existence of Global Solutions to the Cauchy Problem for Discrete Kinetic Equations. *Journal of Mathematical Sciences*. 2012, vol. 181, no. 2, pp. 232–280. doi: 10.1007/s10958-012-0683-9.
13. Radkevich E.V. O povedenii na bol'shikh vremenkakh resheniy zadachi Koshi dlya dvumernogo kineticheskogo uravneniya [The Behavior at Large Time of Solutions of the Cauchy Problem for Two-Dimensional Kinetic Equation]. *Sovremennaya matematika. Fundamental'nye napravleniya* [Contemporary Mathematics. Fundamental Directions]. 2013, vol. 47, pp.108–137. (In Russian)
14. Vasil'eva O. Some Results of Numerical Investigation of the Carleman System. *Procedia Engineering*. 2015. Vol. 111: XXIV R-S-P seminar, Theoretical Foundation of Civil Engineering (24RSP) (TFoCE 2015), pp. 834–838
15. Broadwell T.E. Study of Rarified Shear Flow by the Discrete Velocity Method. *Journal of Fluid Mechanics*. 1964, vol. 19, no. 3, pp. 401–414.
16. Il'in O.V. *Statsionarnye resheniya kineticheskoy modeli Broduella* [Stationary Solutions of the Kinetic Broadwell Model]. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika* [Theoretical and Mathematical Physics]. 2012, vol. 170, no. 3, pp. 481–488. (In Russian)

17. Adjiev S.Z., Amosov C.A., Vedenyapin V.V. Odnomernye diskretnye modeli kineticheskikh uravnenii dlya smesey [One Dimensional Diskrete Models of Kinetic Equations for Mixture]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2004, vol. 44, no. 3, pp. 553–558. (In Russian)
18. Il'in O.V. Izuchenie suchestvovaniya resheniy i ustoyчивости kineticheskoy sistemy Karlemana [The Study of the Existence of Solutions and Stability of Carleman Kinetic System]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Computational Mathematics and Mathematical Physics]. 2007, vol. 47, no. 12, pp. 2076–2087. (In Russian)
19. Belen'kij V.Z., Vasil'eva O.A., Kukarkin A.B. Programmnyy modul' «Algebra differentsirovaniya TAYLOR»: rezul'taty chislennykh eksperimentov, soobshchenie o versii 2.1. [The Program Unit “Derivation Algebra TAYLOR”: Results of Numerical Investigations, Message on the Version 2.1]. *Kibernetika i sistemnyy analiz* [Cybernetics and Systems Analysis]. 1997, no. 3, pp. 171–184. (In Russian)
20. Aristov V., Ilyin O. Kinetic Model of the Spatio-Temporal Turbulence. *Physical Letters A*. 2010, vol. 374, issue 43, pp. 4381–4384.
21. Aristov V.V. *Direct Methods for Solving the Boltzmann Equation and Study of Nonequilibrium Flows*. Kluwer Academic Publishing, 2001, 312 p.
22. Radkevich E.V. *Matematicheskie voprosy neravnovesnykh protsessov* [Mathematical Problems of Nonequilibrium Processes]. Novosibirsk, T. Rozhkovskaya Publ., 2007, 387 p. (In Russian)
23. Dukhnovskiy S.A. Sistema uravneniy Karlemana. Uslovie sekulyarnosti [System of the Carleman Equations. Secularity Condition]. *Matematika. Komp'yuter. Obrazovanie : trudy XXIII Mezhdunarodnoy konferentsii (g. Dubna, 25–30 yanvarya 2016 g.)* [Mathematics. Computer. Education : Works of the 23rd International Conference (Dubna, January 25–30, 2016)]. Izhevsk, 2016, issue 23, p. 197. (In Russian)

Received in February 2017.

Adopted in revised form in March 2017.

Approved for publication in August 2017.

About the author: **Dukhnovskiy Sergey Anatol'evich** — postgraduate student, Department of Applied Mathematics, **Moscow State University of Civil Engineering (National Research University) (MGSU)**, 26 Yaroslavl'skoe shosse, Moscow, 129337, Russian Federation, sergeidukhnvskijj@rambler.ru.