УДК 517.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-4-78–85

В.А. Водахова, М.С. Балкизова

Первая краевая задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка с оператором Аллера в области гиперболичности

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова; Россия, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173; V.a.vod@yandex.ru; Bmadina1980@yandex.ru

В работе исследована первая краевая задача для уравнения смешанного парабола-гиперболического типа третьего порядка с кратными характеристиками и с оператором Аллера в области гиперболичности. Доказана теорема о существовании и единственности регулярного решения исследуемой задачи. Для доказательства теоремы единственности решения применяется аналог метода Трикоми, а теорема существования доказана с помощью метода функции Грина. Функция Грина и соответствующее решение выписаны в явном виде.

Ключевые слова: *уравнение Аллера, уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, уравнение смешанного типа, метод Трикоми, метод функции Грина.*

Введение

В прямоугольной области $\Omega = \{(x, y): 0 < x < r, -\alpha < y < \beta\}$ евклидовой плоскости независимых переменных x и y рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_y - u_{xxx}, & y < 0, \\ u_y - a u_{xx} - b u_{xy}, & y > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $u = u(x, y)$ – искомая функция, a, b, r, α, β – заданные положительные числа.

Обозначим:

$$\Omega_1 = \{(x, y): 0 < x < r, -\alpha < y < 0\}, \quad \Omega_2 = \{(x, y): 0 < x < r, 0 < y < \beta\}, \\ I = \{(x, y): 0 < x < r, y = 0\}, \quad \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup I.$$

В области Ω_1 уравнение (1) совпадает с уравнением вида

$$u_y - u_{xxx} = 0, \quad (2)$$

а в области Ω_2 – с уравнением вида

$$u_y - a u_{xx} - b u_{xy} = 0. \quad (3)$$

По классификации, приведенной в монографии [1, с. 72], уравнение (2) относится к уравнениям третьего порядка параболического типа, которые в [2, с. 9] названы уравнениями третьего порядка с кратными характеристиками. Как показано в работах [3–4] линейное приближение распространения нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации описывается уравнением вида (2). В работах [5–7] изучены локальная, нелокальная и общие краевые задачи для общих уравнений с оператором вида (2) в главной части.

Уравнение (3) совпадает с уравнением Аллера [8], и по классификации, приведенной в монографии [1], оно является уравнением гиперболического типа. При $b = 0$

уравнение (3) совпадает с обычным уравнением теплопроводности, в связи с чем уравнение (3) еще называют модифицированным уравнением диффузии. В монографии [9, с. 254] отмечено, что при определенных допущениях уравнение (3) описывает фильтрацию жидкости в пористых средах и его решение $u = u(x, y)$ интерпретируется как влажность почвы с коэффициентом диффузивности a и коэффициентом влагопроводности b в точке x ($0 < x < r$) в момент времени $t = y$ ($0 < y < \beta$). В работах [10–12] исследованы первая и вторая краевые задачи для уравнения (3). Задача Гурса для общего уравнения вида

$$Lu = u_{xxy} + Au_{xx} + a(x)u_x + b(x, y)u_y + c(x)u = f(x, y), \quad (4)$$

когда заданы значения $u(x, 0)$, $u(0, y)$, $u_x(0, y)$, исследована в [13], а в [14] изучена краевая задача для уравнения (4), когда в начальный момент времени $y = 0$ задан глубинный ход влажности, а также заданы поток влаги на глубине $x = r$ и скорость расхода влаги $x_0 \leq x \leq r$, начиная с некоторой глубины $x_0 \geq 0$. Краевые задачи с нелокальными условиями А.М. Нахушева для уравнения (4) исследованы в работах [15–16]. В работах [17–18] исследованы краевые задачи для уравнений смешанного типа с оператором Аллера в главной части, а в работах [19–20] были найдены необходимые и достаточные условия разрешимости нелокальных краевых задач для смешанных типов уравнений с кратными характеристиками в области параболичности.

В данной работе в области Ω формулируется и исследуется первая краевая задача [9], [21] для уравнения (1). Доказана теорема о существовании единственного регулярного решения исследуемой задачи.

Постановка задачи

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x, y)$ из класса $u(x, y) \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C_x^3(\Omega)$, $u_{xxx}(x, y), u_y(x, y) \in C(\Omega_1)$, $u_{xx}(x, y), u_{xxy}(x, y) \in C(\Omega_2)$, $u_{xx}(x, 0), u_y(x, 0) \in L_2(I)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

Задача 1. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, y)$ уравнения (1) из класса $u_{xx}(x, y) \in C(\Omega_1 \cup \{y = 0\})$, удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u(r, y) = \varphi_2(y), \quad -\alpha \leq y \leq \beta, \quad (5)$$

$$u_{xx}(r, y) = \varphi_3(y), \quad -\alpha < y < 0, \quad (6)$$

где $\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^1[-\alpha, \beta]$, $\varphi_3(y) \in C^1[-\alpha, 0]$ – заданные функции.

Теорема существования и единственности

Справедлива

Теорема. *Существует единственное регулярное решение задачи 1.*

Доказательство. Сначала докажем единственность решения задачи (1), (5), (6). Рассмотрим однородную задачу, соответствующую задаче 1, т. е. будем считать, что $\varphi_i(y) \equiv 0$, $i = \overline{1, 3}$. Введем обозначения

$$u(x, 0) = \tau(x), \quad u_y(x, 0) = \nu(x), \quad 0 < x < r. \quad (7)$$

Путем предельного перехода при $y \rightarrow -0$ из уравнения (1) с учетом обозначений (7) получим фундаментальное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$ вида

$$v(x) - \tau'''(x) = 0, \quad 0 < x < r, \quad (8)$$

а при предельном переходе при $y \rightarrow +0$ из (1) придем ко второму фундаментальному соотношению вида

$$v(x) - a\tau''(x) - b v''(x) = 0, \quad 0 < x < r. \quad (9)$$

Рассмотрим далее интеграл:

$$J = \int_0^r \tau''(x) v(x) dx.$$

Умножая соотношение (8) на $\tau''(x)$ и интегрируя полученное равенство по x от 0 до r , легко убедиться в том, что

$$J = \int_0^r \tau''(x) v(x) dx = \int_0^r \tau''(x) \tau'''(x) dx = -\frac{1}{2} [\tau''(r)]^2 \leq 0. \quad (10)$$

Аналогично, умножая соотношение (9) на функцию $v(x)$ и интегрируя полученное равенство по x от 0 до r , находим

$$\begin{aligned} J &= \int_0^r \tau''(x) v(x) dx = \frac{1}{a} \int_0^r v^2(x) dx - \frac{b}{a} \int_0^r v(x) v''(x) dx = \\ &= \frac{1}{a} \int_0^r v^2(x) dx - \frac{b}{a} \left(v(r) v'(r) - v(0) v'(0) - \int_0^r [v'(x)]^2 dx \right). \end{aligned}$$

Так как из однородных условий, соответствующих условиям (5), следует, что $v(0) = v(r) = 0$, то из последнего равенства приходим к неравенству

$$J = \frac{1}{a} \int_0^r v^2(x) dx + \frac{b}{a} \int_0^r [v'(x)]^2 dx \geq 0. \quad (11)$$

Из неравенств (10) и (11) следует, что интеграл $J = 0$. Но при $J = 0$ из (11) следует, что $v(x) \equiv 0$. Тогда из соотношения (8) имеем:

$$\tau'''(x) = 0,$$

откуда

$$\tau(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2, \quad c_1, c_2, c_3 = \text{const}. \quad (12)$$

Переходя к пределу при $y \rightarrow -0$ из однородных условий, соответствующих условиям (5), (6), получим, что

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(r) = 0, \quad \tau''(r) = 0. \quad (13)$$

Из (12) при условиях (13) заключаем, что $\tau(x) \equiv 0$. Таким образом, показано, что для соответствующей задаче 1 однородной задачи имеют место равенства $\tau(x) \equiv 0$ и $v(x) \equiv 0$. При этом в области Ω_1 приходим к задаче нахождения решения уравнения (2), удовлетворяющего начальному условию

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq r \quad (14)$$

и граничным условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(r, y) = 0, \quad u_{xx}(r, y) = 0, \quad -\alpha < y < 0, \quad (15)$$

а в области Ω_2 — к задаче нахождения решения уравнения (3), удовлетворяющего начальному условию (14) и граничным условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(r, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq \beta. \quad (16)$$

Покажем, что задача (2), (14), (15) имеет только тривиальное решение. Для этого введем в уравнение (2) новую искомую функцию по формуле:

$$u(x, y) = e^{\mu y} v(x, y), \quad \mu = \text{const}, \quad (x, y) \in \Omega_1. \quad (17)$$

При замене (17) из уравнения (2) приходим к новому уравнению

$$L_\mu v = v_{xxx} - v_y - \mu v = 0 \quad (18)$$

с начально краевыми условиями

$$v(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq r \quad (19)$$

$$v(0, y) = 0, \quad v(r, y) = 0, \quad v_{xx}(r, y) = 0, \quad -\alpha < y < 0. \quad (20)$$

Введем далее вспомогательную область $\Omega_{1\varepsilon} = \{(x, y): \varepsilon < x < r - \varepsilon, -\alpha + \varepsilon < y < \varepsilon\}$ и проинтегрируем уравнение $2v_{xx} L_\mu v = 0$ по области $\Omega_{1\varepsilon}$.

Будем иметь

$$2 \int_{\Omega_{1\varepsilon}} v_{xx} L_\mu v \, dx \, dy = 2 \int_{\Omega_{1\varepsilon}} v_{xx} [v_{xxx} - v_y - \mu v] \, dx \, dy = 0,$$

откуда

$$2 \int_{\Omega_{1\varepsilon}} v_{xx} L_\mu v \, dx \, dy = \int_{\Gamma_{1\varepsilon}} [v_{xx}^2 - 2v_x v_y - 2\mu v v_x] \, dy - v_x^2 \, dx + 2\mu \int_{\Omega_{1\varepsilon}} v_x^2 \, dx \, dy = 0, \quad (21)$$

где $\Gamma_{1\varepsilon}$ — граница области $\Omega_{1\varepsilon}$.

Перейдем в равенстве (21) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Легко заметить, что при этом область $\Omega_{1\varepsilon}$ переходит в Ω_1 . Тогда с учетом граничных условий (19), (20) из (21) получим

$$2 \int_{\Omega_1} v_{xx} L_\mu v \, dx \, dy = - \int_{-\alpha}^0 v_{xx}^2(0, y) \, dy - \int_0^r v_x^2(x, -\alpha) \, dx + 2\mu \int_{\Omega_1} v_x^2 \, dx \, dy = 0. \quad (22)$$

Выбирая значение постоянной $\mu < 0$, замечаем, что равенство (22) может иметь место в том и только в том случае, когда $v_x(x, y) \equiv 0$. Откуда

$$v(x, y) = g(y), \quad (23)$$

где $g(y)$ — произвольная функция от y . Удовлетворяя (23) одному из граничных условий (20), убеждаемся, что $g(y) \equiv 0$, следовательно, $v(x, y) \equiv 0$ в Ω_1 . Тогда из замены (17) заключаем, что и $u(x, y) \equiv 0$ в Ω_1 .

Как следует из результатов работы [10], однородная первая краевая задача (14), (16) для уравнения Аллера (3) имеет только тривиальное решение $u(x, y) \equiv 0$ в Ω_2 . Таким образом доказано, что однородная задача, соответствующая задаче 1, имеет только тривиальное решение $u(x, y) \equiv 0$ в Ω , что говорит о единственности регулярного решения задачи (1), (5), (6).

Перейдем к исследованию вопроса о существовании решения задачи (1), (5), (6). Путем дифференцирования из соотношения (9) находим

$$v'(x) - a \tau'''(x) - b v'''(x) = 0, \quad 0 < x < r. \quad (24)$$

Исключая из (8) и (24) искомую функцию $\tau(x)$, относительно функции $v(x)$ приходим к уравнению

$$v'''(x) - \frac{1}{b} v'(x) + \frac{a}{b} v(x) = 0, \quad 0 < x < r. \quad (25)$$

Соответственно путем дифференцирования с последующим предельным переходом при $y \rightarrow 0$ из граничных условий (5), (6) находим

$$v(0) = \varphi'_1(0), \quad v(r) = \varphi'_2(0), \quad v''(r) = \varphi'_3(0). \quad (26)$$

Таким образом, для определения искомой функции $v(x)$ получили краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка (25) с условиями (26). Задачу (25)–(26) будем решать методом функции Грина. С помощью замены

$$v(x) = y(x) + \left(1 - \frac{x}{r}\right) \varphi'_1(0) + \frac{x}{r} \varphi'_2(0) + \frac{x(x-r)}{2} \varphi'_3(0) \quad (27)$$

задача (25)–(26) сводится к неоднородному уравнению вида

$$y''''(x) - \frac{1}{b} y'(x) + \frac{a}{b} y(x) = \frac{a(x-r)-1}{br} \varphi'_1(0) + \frac{1-ax}{br} \varphi'_2(0) - \frac{ax^2 - (2+ar)x + r}{2b} \varphi'_3(0) \quad (28)$$

с однородными краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(r) = 0, \quad y''(r) = 0 \quad (29)$$

относительно искомой функции $y(x)$.

Решение задачи (28)–(29) выписывается по формуле:

$$y(x) = \int_0^r G(x, \xi) \left[\frac{a(\xi-r)-1}{br} \varphi'_1(0) + \frac{1-a\xi}{br} \varphi'_2(0) - \frac{a\xi^2 - (2+ar)\xi - r}{2b} \varphi'_3(0) \right] d\xi, \quad (29)$$

где $G(x, \xi)$ – функция Грина задачи (28), (29), которая имеет следующий вид

$$G(x, \xi) = \frac{1}{g(-r)\Delta} \begin{cases} f(-\xi)g(x-r) - f(x-\xi)g(-r), & 0 \leq x < \xi, \\ f(-\xi)\delta(x-r), & \xi < x \leq r. \end{cases}$$

Функции $f(x)$, $g(x)$ и значение определителя Δ в зависимости от знака дискриминанта

$$D = \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \right) = \frac{27a^2b - 4}{108b^3} \text{ характеристического уравнения}$$

$$k^3 + pk + q = k^3 - \frac{1}{b}k + \frac{a}{b} = 0$$

определяются по одной из формул:

$$\Delta = (k_2 - k_1)(k_3 - k_1)(k_3 - k_2) \neq 0,$$

$$f(x) = (k_3 - k_2)e^{k_1x} + (k_1 - k_3)e^{k_2x} + (k_2 - k_1)e^{k_3x},$$

$$g(x) = (k_3^2 - k_2^2)e^{k_1x} + (k_1^2 - k_3^2)e^{k_2x} + (k_2^2 - k_1^2)e^{k_3x},$$

$$k_i = \frac{2}{\sqrt{3b}} \cos\left(\frac{\varphi + 2\pi i}{3}\right), \quad i = 0, 1, 2, \quad \cos \varphi = -\frac{3a\sqrt{3b}}{2}, \quad \sin \varphi > 0$$

в случае, когда $D < 0$;

$$\text{либо } \Delta = (k_2 - k_1)^2 \neq 0, \quad k_1 = 2\sqrt[3]{a/b}, \quad k_2 = -\sqrt[3]{a/b},$$

$$f(x) = e^{k_1x} + [3k_2x - 1]e^{k_2x}, \quad g(x) = 2k_2e^{k_1x} - [3k_2^2x + 2k_2]e^{k_2x}$$

при $D = 0$;

$$\text{либо же } \Delta = 6\sqrt{D} = \sqrt{\frac{27a^2b - 4}{3b^3}} \neq 0,$$

$$f(x) = \beta_1 e^{\alpha_1 x} - \beta_1 e^{-\frac{\alpha_1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \beta_1 x\right) - \sqrt{3} \alpha_1 e^{-\frac{\alpha_1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \beta_1 x\right),$$

$$g(x) = -\frac{\sqrt{3} \alpha_1 \beta_1}{2} e^{\alpha_1 x} + \frac{\sqrt{3} \alpha_1 \beta_1}{2} e^{-\frac{\alpha_1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \beta_1 x\right) - \frac{3}{4} (\alpha_1^2 + \beta_1^2) e^{-\frac{\alpha_1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \beta_1 x\right),$$

$$\alpha_1 = \alpha + \beta, \quad \beta_1 = \alpha - \beta,$$

$$\alpha = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{27a^2b-4}{108b^3}}}, \quad \beta = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{D}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{27a^2b-4}{108b^3}}},$$

когда $D > 0$.

Из (27) и (29) находим:

$$\nu(x) = \frac{1}{br} \left[b(r-x) - \int_0^r G(x, \xi) (1 - a\xi + ar) d\xi \right] \varphi'_1(0) + \frac{1}{br} \left[bx + \int_0^r G(x, \xi) (1 - a\xi) d\xi \right] \varphi'_2(0) +$$

$$+ \frac{1}{2b} \left[bx(x-r) - \int_0^r G(x, \xi) (a\xi^2 - (2+ar)\xi - r) d\xi \right] \varphi'_3(0). \quad (30)$$

После того как функция $\nu(x)$ найдена, $\tau(x)$ находится по формуле

$$\tau(x) = \frac{r-x}{2r} \int_0^r t^2 \nu(t) dt - \frac{1}{2} \int_x^r (t-x)^2 \nu(t) dt - \frac{r-x}{r} \varphi_1(0) + \frac{x}{r} \varphi_2(0) - \frac{x(r-x)}{2} \varphi_3(0).$$

Тогда в области Ω_2 приходим к задаче нахождения решения первой краевой задачи с условиями (5) и $u(x, 0) = \tau(x)$ для уравнения (3). Ее решение выписано в работе [10], а в области Ω_1 решение задачи (5), (6) и $u(x, 0) = \tau(x)$ для уравнения (2) выписывается по формуле:

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_{-y}^0 G(x, -y; 0, -\eta) \varphi_3(\eta) d\eta + \int_{-y}^0 G_{\xi\xi}(x, -y; r, -\eta) \varphi_1(\eta) d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_{-y}^0 G_{\xi\xi}(x, -y; r, -\eta) \varphi_2(\eta) d\eta + \int_0^r G(x, -y; \xi, 0) \tau(\xi) d\xi \right\},$$

где $G(x, y; \xi, \eta) = U(x, y; \xi, \eta) - W(x, y; \xi, \eta)$ – функция Грина, $U(x, y; \xi, \eta)$ и $W(x, y; \xi, \eta)$ фундаментальные решения уравнения (2) [2, с. 135].

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.
2. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: ФАН, 1979. – 238 с.
3. Красильников В.А., Кузнецов В.П. Распространение нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации // Акустический журнал. – 1974. – Т. 20, № 3. – С. 473–477.
4. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. – М.: Наука, 1973. – 175 с.

5. Иргашев Ю. Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Сборник научных трудов «Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения». – Ташкент: ФАН, 1976. – С. 17–31.
6. Джураев Т. Д., Абдиназаров С. Краевые задачи типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Известия АН Узбекской ССР. – 1981. – № 1. – С. 8–11.
7. Абдиназаров С. Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Диф. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 1. – С. 3–12.
8. Hallaire M. Potential efficace de l'eau dans le sol en régime de dessèchement // Assemblée générale de Berkeley General Assembly of Berkeley, Publ. № 62 (August 1963). – Gentbrugge, 1963. – P. 114–122.
9. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.
10. Макаова Р.Х. Первая краевая задача для неоднородного уравнения Аллера // Вестник КРАУНЦ. – 2016. – № 4–1 (16). – С. 45–49.
11. Yangarber V.A. The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1967. – Vol. 8, № 1. – P. 62–64.
12. Макаова Р.Х. Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля // Доклады Адыгской (Черкесской) международной академии наук. – 2015. – Т. 17, № 3. – С. 35–38.
13. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // J. differen. equations. – 1972. – Vol. 12. – P. 559–565.
14. Нахушев А.М. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Диф. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 1. – С. 72–81.
15. Водахова В.А. Краевая задача с нелокальным условием А.М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Диф. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 2. – С. 280–285.
16. Водахова В.А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с нелокальным условием А.М. Нахушева // Диф. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 1. – С. 163–166.
17. Макаова Р.Х. Первая краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения третьего порядка // Вестник Адыгейского государственного университета. – 2018. – Вып. 4 (231). – С. 39–44.
18. Макаова Р.Х. Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения третьего порядка с оператором Аллера в главной части // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2018. – Т. 149. – С. 64–71.
19. Балкизов Ж.А. Краевая задача со смещением для модельного уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка // Вестник КРАУНЦ. – 2018. – № 3 (23). – С. 19–26.
20. Балкизов Ж.А. Нелокальная краевая задача для уравнения парабола-гиперболического типа третьего порядка с вырождением типа и порядка в области его гиперболичности // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2018. – Т. 149. – С. 14–24.

21. Нахушев А.М. К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гипербола-параболического типа // Диф. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 1. – С. 66–73.

Поступила в редакцию 2 сентября 2019 г.

UDC 517.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-4-78–85

The first boundary-value problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type of the third order with the Aller operator

V.A. Vodakhova, M.S. Balkizova

Kabardino-Balkarian State University named after Berbekov H.M.; Russia, 360004, Nalchik, Chernyshevsky st., 173; V.a.vod@yandex.ru; Bmadina1980@yandex.ru

The first boundary-value problem for an equation of mixed parabolic-hyperbolic type of the third order with multiple characteristics and with the Aller operator in the region of hyperbolicity is investigated. A theorem on the existence and uniqueness of a regular solution to the problem under study is proved. To prove the uniqueness theorem for the solution, an analog of the Tricomi method is used, and the existence theorem is proved using the Green's function method. The Green's function and the corresponding solution are written out explicitly.

Keywords: *Aller equation, third-order equation with multiple characteristics, mixed type equation, Tricomi method, Green's function method.*

Received 2 September, 2019