УДК 517.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-4-72-77

А.-Р.К. Рамазанов¹, И.Г. Гусейнов²

О приближенном решении рациональными сплайн-функциями дифференциальных уравнений с особенностями

¹ Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; ar-ramazanov@rambler.ru

² Дагестанский федеральный исследовательский центр Российской академии наук; Россия, 367032, Махачкала, ул. М. Гаджиева, д. 45; ibraa2g@gmail.com

Рассмотрены вопросы приближенного решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка, старший коэффициент которых может обращаться в ноль в граничной точке промежутка существования решения.

Исследован вопрос возможности построения приближенного дважды непрерывно дифференцируемого решения в виде рациональной сплайн-функции специального вида. Найдены достаточные условия на класс точных решений, при выполнении которых подобная рациональная сплайн-функция существует.

Указан также способ построения разностной схемы численного решения рассматриваемых дифференциальных уравнений, на основе которого эффективно строится искомое решение класса C^2 в виде рациональной сплайн-функции.

Гладкие приближенные решения дифференциальных уравнений особенно востребованы в случае массивных сеток узлов и в случае, когда трудно найти их точное решение при данных краевых условиях.

В качестве приложения приведены примеры дифференциальных уравнений, для которых выполняются условия возможности построения решения в виде рациональной сплайн-функции класса C^2 .

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, рациональные сплайн-функции.

Введение

Полиномиальные сплайны, их свойства и важнейшие приложения широко исследованы различными авторами (см., например, [1–5] и цитированные в них источники).

Рассматривались также различного вида рациональные сплайн-функции (см., например, [6–8]) и их приложения.

Применение полиномиальных сплайн-функций при численном решении различных краевых и начальных задач для дифференциальных уравнений можно найти, например, в [1–4, 9].

Ниже рассматривается вопрос приближенного решения дифференциального уравнения вида

$$(x - a)^2 y'' + (x - a)p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

с непрерывными на отрезке $[a, b]$ функциями $p(x), q(x)$ при условии существования конечного предела точного решения $y(a + 0)$ с помощью рациональных сплайн-функций класса $C^2[a, b]$.

Случай линейных дифференциальных уравнений второго порядка с отличным от нуля старшим коэффициентом рассмотрен в [9].

Для определения рациональных сплайн-функций возьмем произвольную сетку узлов $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 2$), в которых определена конечная функция $f(x)$, число $\lambda > 0$ и набор чисел $g = \{g_1, g_2, \dots, g_{N-1}\}$ таких, что $g_i = x_{i+1} + \lambda(x_{i+1} - x_i)$ при $x_{i+1} - x_i \leq x_i - x_{i-1}$ и $g_i = x_{i-1} - \lambda(x_i - x_{i-1})$ при $x_i - x_{i-1} < x_{i+1} - x_i$ ($i = 1, 2, \dots, N-1$).

Тогда при $i = 1, 2, \dots, N-1$ однозначно определяется рациональная функция

$$R_i(x, f) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \gamma_i \frac{1}{x - g_i}$$

по условиям $R_i(x_j, f) = f(x_j)$ ($j = i-1, i, i+1$), при этом выполняются равенства

$$\begin{aligned} \alpha_i &= f(x_i) - f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i), \\ \beta_i &= f(x_{i-1}, x_{i+1}) + f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i), \\ \gamma_i &= f(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i). \end{aligned} \quad (2)$$

Если положим $R_0(x, f) \equiv R_1(x, f)$, $R_N(x, f) \equiv R_{N-1}(x, f)$, а при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, 2, \dots, N$) определим функцию $R_{N,2}(x, f) = R_{N,2}(x, f, \Delta, g) = R_i(x, f)A_{i,2}(x) + R_{i-1}(x, f)B_{i,2}(x)$,

где $A_{i,2}(x) = \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{(x_i - x_{i-1})^2 + (x - x_i)^2}$, $B_{i,2}(x) = 1 - A_{i,2}(x)$, то $R_{N,2}(x, f)$ представляет собой ([10]) сплайн-функцию класса $C^2[a, b]$.

Как показано в [9], в случае линейных дифференциальных уравнений второго порядка с непрерывными на $[a, b]$ коэффициентами и отличным от нуля на $[a, b]$ старшим коэффициентом существует последовательность рациональных сплайн-функций рассматриваемого вида, которая равномерно на $[a, b]$ сходится к точному решению соответствующей краевой задачи при $h = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \dots, N\} \rightarrow 0$ с ростом N . При этом существенно используется условие, что точное решение краевой задачи является функцией класса $C^2[a, b]$.

Однако в случае, когда старший коэффициент уравнения обращается в нуль в точках отрезка $[a, b]$, возникают особенности, некоторые из которых рассматриваются ниже.

Основной результат

Пусть дифференциальное уравнение (1) с непрерывными на данном отрезке $[a, b]$ функциями $p(x), q(x)$ имеет единственное решение $y(x)$ класса $C^2(a, b)$, удовлетворяющее условиям $y(a+0) = A, y(b) = B$ при заданных конечных A и B .

Узлам произвольно заданной сетки $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ ($N \geq 2$) сопоставим значение $y_0 = A$ и искомые приближенные значения решения $y_1, y_2, \dots, y_N$. Возьмем дискретную функцию $Y(x) = y_i$ при $x = x_i$ ($i = 0, 1, \dots, N$) и построим рациональную сплайн-функцию $R_{N,2}(x, Y) = R_{N,2}(x, Y, \Delta, g)$ класса $C^2[a, b]$.

Тогда (см. [10, 11]) значение $R_{N,2}^{(r)}(x_j)$ при $r = 0, 1, 2$ и $i = 0, 1, \dots, N-1$ можно выразить через y_j ($j = 0, 1, \dots, N$). Если для краткости записи сетку узлов считать равномерной с $x_i - x_{i-1} = h$ ($i = 1, 2, \dots, N$), то получим

$$\begin{aligned} R_{N,2}(x_i, Y) &= R_i(x_i, Y) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, N; \\ R'_{N,2}(x_i, Y) &= R'_i(x_i, Y) = \frac{1}{2(\lambda + 1)h} [-(\lambda + 2)y_{i-1} + 2y_i + \lambda y_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \\ R''_{N,2}(x_i, Y) &= R''_i(x_i, Y) = \frac{\lambda(\lambda + 2)}{(\lambda + 1)^2 h^2} (y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Эти равенства позволяют получить систему линейных алгебраических уравнений относительно y_i , исходя из соответствующего уравнения относительно $R_{N,2}(x, Y)$, а именно из уравнения

$$(x - a)^2 R''_{N,2}(x, Y) + (x - a)p(x)R'_{N,2}(x, Y) + q(x)R_{N,2}(x, Y) = 0.$$

Возможность построения приближенного решения в форме рациональной сплайн-функции рассматриваемого вида основана на следующем утверждении.

Теорема. Пусть функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$, и уравнение (1) имеет решение $y = y(x)$ класса $C^2(a, b]$, удовлетворяющее при заданных конечных A и B и при $h = \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, 2, \dots, N\} \rightarrow 0$ условиям:

- 1) $y(a + 0) = A, y(b) = B$;
- 2) $\sup\{|q(x)y(x)| : x \in (a, a + h)\} \rightarrow 0$;
- 3) $h \sup\{(x - a)^2 |y''(x)| : x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]\} \rightarrow 0, i = 2, 3, \dots, N - 1$;
- 4) $\sup\{(x - a)^2 |y''(x) - y''(t)| : x, t \in [x_{i-1}, x_{i+1}]\} \rightarrow 0,$
 $i = 2, 3, \dots, N - 1$. Тогда при $h \rightarrow 0$ имеем

$$\sup_{x \in [a, b]} |(x - a)^2 R''_{N,2}(x, y) + (x - a)p(x)R'_{N,2}(x, y) + q(x)R_{N,2}(x, y)| \rightarrow 0.$$

Доказательство. Далее для краткости будем считать сетку узлов равномерной. Если функцию $y = y(x)$ подставить в уравнение (1), то оно обратится в тождество относительно $x \in (a, b]$. Поэтому при $x \in (a, b]$ имеем

$$\begin{aligned} S &:= (x - a)^2 R''_{N,2}(x, y) + (x - a)p(x)R'_{N,2}(x, y) + q(x)R_{N,2}(x, y) = \\ &= (x - a)^2 [R''_{N,2}(x, y) - y''(x)] + (x - a)p(x)[R'_{N,2}(x, y) - y'(x)] + \\ &\quad + q(x)[R_{N,2}(x, y) - y(x)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Продолжим функцию $y(x)$ по непрерывности на отрезок $[a, b]$, полагая $y(a) = y(a + 0) = A$. Тогда в силу безусловной сходимости рациональных сплайн-функций $R_{N,2}$ на классе $C[a, b]$ [10] получим

$$\sup\{|R_{N,2}(x, y) - y(x)| : x \in [a, b]\} \rightarrow 0 \quad (4)$$

при $N \rightarrow \infty$ (что то же, при $h \rightarrow 0$).

Для оценки двух первых слагаемых правой части суммы S рассмотрим отдельно два случая: когда $x \in (a, a + h]$ и когда $x \in [a + h, b]$.

В первом случае преобразуем сумму S следующим образом:

$$S = (x - a)^2 R'_1(x, y) + (x - a)p(x)R'_1(x, y) + q(x)y(x) + q(x)[R_{N,2}(x, y) - y(x)] \quad (5)$$

и оценим каждое из четырех слагаемых в правой части отдельно.

С использованием равенств (2) получим

$$(x - a)^2 |R'_1(x, y)| \leq 24|y(a + 2h) - 2y(a + h) + y(a + 0)|. \quad (6)$$

Далее,

$$\begin{aligned} (x - a)R'_1(x, y) &= (x - a)\beta_1 - \gamma_1 \frac{x - a}{(x - g_1)^2} = \\ &= \frac{x - a}{h} \left[\frac{1}{2} (y(a + 2h) - y(a + 0)) + (y(a + 2h) - y(a + h)) - (y(a + h) - y(a + 0)) \right] \\ &\quad - 6y(a, a + h, a + 2h) \frac{x - a}{(x - a - 3h)^2}, \end{aligned}$$

откуда при $x \in (a, a + 2h]$ получим

$$\begin{aligned} |(x - a)R'_1(x, y)| &\leq |y(a + 2h) - y(a + 0)| + 2|y(a + 2h) - y(a + h)| + \\ &\quad + 2|y(a + h) - y(a + 0)| + 6|y(a + 2h) - 2y(a + h) + y(a + 0)|. \end{aligned} \quad (7)$$

Следовательно, в силу ограниченности функций $p(x), q(x)$ и непрерывности функции $y(x)$ из условия 2) теоремы и из (4)–(7) при $h \rightarrow 0$ имеем

$$\sup\{|S|: x \in (a, a + h)\} \rightarrow 0. \quad (8)$$

Пусть теперь $x \in [a + h, b]$. Тогда существует непрерывная производная $y''(x)$ на этом отрезке $[a + h, b]$. Поэтому оценки двух первых слагаемых правой части равенства (3) можно проводить по аналогии с подобными оценками из [9], а оценка третьего слагаемого вытекает из соотношения (4).

Отметим лишь, что при оценке первых двух слагаемых правой части (3) существенно используются следующие утверждения, полученные в [9]:

А) если $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ ($i = 2, 3, \dots, N - 1$), то найдутся точки $c_1, c_2, \tau \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ такие, что выполняется равенство

$$y'(x) - R'_i(x, y) = (y''(c_1) - y''(c_2))(x - \tau) + (y''(c_2) - R''_i(c_2))(x - \tau);$$

Б) если $x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ ($i = 2, 3, \dots, N - 1$), то найдется точка $\xi \in [x_{i-1}, x_{i+1}]$ такая, что

$$\begin{aligned} R''_i(x, y) &= y''(\xi)(1 - \theta(x)), \\ \theta(x) &= 1 - (g_i - x_{i-1})(g_i - x_i)(g_i - x_{i+1})(g_i - x)^3, \\ |\theta(x)| &\leq \frac{5}{\lambda}. \end{aligned}$$

Эти оценки показывают, что при $h \rightarrow 0$ также имеем

$$\sup\{|S|: x \in [a + h, b]\} \rightarrow 0. \quad (9)$$

Из (9) и (8) вытекает утверждение теоремы.

В качестве приложения отметим, что функция Бесселя $y = x^{-\frac{1}{2}} \sin x$ является решением дифференциального уравнения

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0,$$

для которого выполнены все условия теоремы на полуинтервале $(0, 1]$.

Действительно, имеем

$$1) \quad y(+0) = 0, \quad y(1) = \sin 1;$$

$$2) \quad \sup\{|q(x)y(x)|: x \in (0, h]\} = \sup\left\{\left|x^2 - \frac{1}{4}\right| \frac{\sin x}{\sqrt{x}}: x \in (0, h]\right\} = O(h^{1/2}) (h \rightarrow 0);$$

$$3) \quad \text{при } i = 2, 3, \dots, N - 1 \text{ выполняется соотношение}$$

$$h \sup\{x^2 |y''(x)|: x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]\} = O(h) (h \rightarrow 0);$$

$$4) \quad \text{при } i = 2, 3, \dots, N - 1 \text{ выполняется также соотношение}$$

$$\sup\{x^2 |y''(x) - y''(t)|: x, t \in [x_{i-1}, x_{i+1}]\} = O(h^{1/2}) (h \rightarrow 0).$$

В качестве примера несколько другого характера рассмотрим функцию

$y = x^{-1} \sin x$ как решение уравнения $y'' + \frac{2}{x} y' + y = 0$ с особенностью в точке $x = 0$.

Это уравнение путем почленного умножения на x^2 приводится к дифференциальному уравнению $x^2 y'' + 2x y' + x^2 y = 0$ вида (1), для которого также выполнены все условия теоремы на полуинтервале $(0, 1]$ в следующем виде:

$$1) \quad y(+0) = 1, \quad y(1) = \sin 1;$$

$$2) \quad \sup\{|q(x)y(x)|: x \in (0, h]\} = O(h^2) (h \rightarrow 0);$$

$$3) \quad \text{при } i = 2, 3, \dots, N - 1 \text{ получим}$$

$$h \sup\{x^2 |y''(x)|: x \in [x_{i-1}, x_{i+1}]\} = O(h) (h \rightarrow 0);$$

$$4) \quad \text{при } i = 2, 3, \dots, N - 1 \text{ имеем}$$

$$\sup\{x^2 |y''(x) - y''(t)|: x, t \in [x_{i-1}, x_{i+1}]\} = O(h) (h \rightarrow 0).$$

Литература

1. Алберг Дж., Нилсон Э., Уолли Дж. Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 316 с.
2. Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н. Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
4. Де Бор К. Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.
5. Васильев А.А. Аппроксимация с интерполяцией сплайнами произвольного дефекта // Мат. заметки. – 2018. – Т. 29, вып. 5. – С. 743–748.
6. Schaback R. Spezielle rationale Splinefunktionen II // J. Approx. Theory. 7:2. Academic Press. Inc. – 1973. – V. 7. № 2. – P. 281–292.
7. Edeoa A., Gofeb G., Terefa T. Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences. – 2015. – V. 12. № 1. – P. 110–122.
8. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. – М.: Мир, 1974. – 126 с.
9. Магомедова В.Г., Рамазанов А.-Р.К. О приближенном решении дифференциальных уравнений с помощью рациональных сплайн-функций // Ж-л вычисл. математики и мат. физики. – 2019. – Т. 59, № 4. – С. 579–586.
10. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Безусловно сходящиеся интерполяционные рациональные сплайны // Мат. заметки. – 2018. – Т. 103, вып. 4. – С. 592–603.
11. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Сплайны по трехточечным рациональным интерполянтам с автономными полюсами // Дагестанские электронные математические известия. – 2017. – Вып. 7. – С. 16–28.
12. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценки скорости сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам для непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций // Труды Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2017. – Т. 23, № 3. – С. 224–233.
13. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценка скорости сходимости сплайнов по рациональным интерполянтам через индуцированные функции // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. – 2016. – Т. 31, вып. 2. – С. 35–40.

Поступила в редакцию 4 сентября 2019 г.

UDC 517.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-4-72–77

On the approximate solution of differential equations with singularities by means of rational spline-functions

A.-R.K. Ramazanov, I.G. Guseinov

¹ Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; ar-ramazanov@rambler.ru;

² *Dagestan Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences; Russia, 367032, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45; ibraa2g@gmail.com*

The problems of the approximate solution of second-order linear differential equations the leading coefficient of which can vanish at the boundary point of the solution interval of existence are considered.

The question of the possibility of constructing a twice approximate continuously differentiable solution in the form of a rational spline function of a special form is investigated. Sufficient conditions under which a similar rational spline function exists are found for the class of exact solutions.

A method for constructing a difference scheme for numerically solving the differential equations under consideration is also presented, on the basis of which the desired solution of the class C^2 is constructed in the form of a rational spline function.

Smooth approximate solutions of differential equations are especially in demand in the case of massive grids of nodes and it is difficult to find their exact solution under given boundary conditions.

As an application, examples of differential equations are given for which the conditions for the possibility of constructing a solution in the form of a rational spline function of the class C^2 are met.

Keywords: *differential equations, rational spline-function.*

Received 4 September, 2019