УДК 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-4-60-64

М.С. Алиев**Некоторые соотношения для определителей**

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; aliev.mingazhudin@yandex.ru

В работе доказан цикл равенств между суммами произведений пар миноров одного порядка, отличающихся друг от друга по количеству точек. С помощью этих равенств устанавливаются связи между определителями различных порядков. Показана неизменность количества перемен знака в ряду отличных от нуля миноров по столбцам минимального числа линейно зависимых строк матрицы. Полученные результаты справедливы для любых числовых определителей.

Ключевые слова: функция, определитель, матрица, минор, Вандермонд.

Пусть $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ линейно независимые и ограниченные на $[a, b]$ функции. Положим

$$D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_k \\ x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} u_1(x_1) & \dots & u_k(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1(x_k) & \dots & u_k(x_k) \end{vmatrix} = D(x_1 x_2 \dots x_k)$$

Лемма 1. Справедливы равенства:

$$\sum_{i=k}^{k+l} (-1)^i D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_k \\ x_1 & \dots & x_{k-1} & x_k \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_k \\ x_l \dots x_{i-1} & x_{i+1} \dots & x_{k+l} \end{pmatrix} = 0 \quad (1)$$

($k \geq 1, 1 \leq l \leq k$).

Доказательство проведем методом математической индукции по числу k .

Так как вычисления в общем виде будут слишком громоздкими, проиллюстрируем схему доказательства при малых k . Пусть лемма справедлива при $k = 3$. Имеем:

$$\begin{aligned} l = 1 & -D(x_1 x_2 x_3) D(x_1 x_2 x_4) - D(x_1 x_2 x_4) D(x_1 x_2 x_3) = 0, \\ l = 2 & -D(x_1 x_2 x_3) D(x_2 x_4 x_5) + D(x_1 x_2 x_4) D(x_2 x_3 x_5) - D(x_1 x_2 x_5) D(x_2 x_3 x_4) = 0, \\ l = 3 & -D(x_1 x_2 x_3) D(x_4 x_5 x_6) + D(x_1 x_2 x_4) D(x_3 x_5 x_6) - D(x_1 x_2 x_5) D(x_3 x_4 x_6) + \\ & + D(x_1 x_2 x_6) D(x_3 x_4 x_5) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Далее в равенствах (1) номера точек могут быть разнообразными. Поэтому сформулируем правило проверки справедливости равенств вида (1):

- 1) Определители каждого слагаемого имеют l различную строку,
- 2) Число слагаемых равно $l + 1$.
- 3) Для проверки знаков и верности равенства полагаем $x_{k+l} = x_i$.

Докажем справедливость леммы (1) при $k = 4$, т. е. верность равенств:

$$\begin{aligned} L = 1 & D(x_1 x_2 x_3 x_4) D(x_1 x_2 x_3 x_5) - D(x_1 x_2 x_3 x_5) D(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0, \\ L = 2 & D(x_1 x_2 x_3 x_4) D(x_2 x_3 x_5 x_6) - D(x_1 x_2 x_3 x_5) D(x_2 x_3 x_4 x_6) + \\ & + D(x_1 x_2 x_3 x_6) D(x_2 x_3 x_4 x_5) = 0, \\ L = 3 & D(x_1 x_2 x_3 x_4) D(x_3 x_5 x_6 x_7) - D(x_1 x_2 x_3 x_5) D(x_3 x_4 x_6 x_7) + \\ & + D(x_1 x_2 x_3 x_6) D(x_3 x_4 x_5 x_7) - D(x_1 x_2 x_3 x_7) D(x_3 x_4 x_5 x_6) = 0, \\ L = 4 & D(x_1 x_2 x_3 x_4) D(x_5 x_6 x_7 x_8) - D(x_1 x_2 x_3 x_5) D(x_4 x_6 x_7 x_8) + D(x_1 x_2 x_3 x_6) \end{aligned}$$

$$D(x_4x_5x_7x_8) - D(x_1x_2x_3x_7) D(x_4x_5x_6x_8) + D(x_1x_2x_3x_8) D(x_4x_5x_6x_7) = 0.$$

Разложим все *определители* этих равенств по элементам последнего столбца и применим формулы (2) к полученным коэффициентам при $u_4(x_i) u_4(x_j)$. При этом возможны следующего вида коэффициенты:

При $u_4(x_1)u_4(x_3)$:

$$1) l = 2, -D(x_2x_3x_4)D(x_2x_5x_6) - (-D(x_2x_3x_5))D(x_2x_4x_6) + (-D(x_2x_3x_6))D(x_2x_4x_5) = 0,$$

$$2) l = 3 -D(x_2x_3x_4)(-D(x_5x_6x_7) - (-D(x_2x_3x_5))(-D(x_4x_6x_7) + (-D(x_2x_3x_6))(-D(x_4x_5x_7))) - (-D(x_2x_3x_7))(-D(x_4x_5x_6)) = 0.$$

При $u_4(x_5)u_4(x_6)$ и $l = 3$ имеем $-D(x_1x_2x_3)(-D(x_3x_4x_7) + D(x_1x_2x_3)(-D(x_3x_4x_7))) = 0$. Аналогично при $l = 4$.

При $[u_4(x_2)]^2$, $l = 2$ $D(x_1x_3x_4)(-D(x_3x_5x_6)) - D(x_1x_3x_5)(-D(x_3x_4x_6 - D(x_1x_3x_6)(-D(x_3x_4x_5)))) = 0$. Таким образом, все коэффициенты равны нулю и равенства (1) справедливы.

Лемма 2. Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & (-1)^k D \begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_k} \\ x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1} \\ x_1 & \dots & x_{j-1} & x_{j+1} & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix} + \\ & + \sum_{i=k}^{n+1} (-1)^i D \begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_k} \\ x_1 & \dots & x_{j-1} & x_{j+1} & \dots & x_k & x_i \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1} \\ x_1 & \dots & x_{i-1} & x_{i+1} & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix} = \\ & = (-1)^{n+1} D \begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_k} \\ x_1 & \dots & x_{j-1} & x_{j+1} & \dots & x_k & x \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1} \\ x_1 & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix} \quad (1 \leq k \leq n, 1 \leq j \leq k). \end{aligned} \quad (3)$$

Доказательство. $t_1, t_2, \dots, t_k$ любые номера столбцов из $1, 2, \dots, n+1$.

Эти функции и точки не упорядочены, и поэтому без умаления общности положим $t_1 = 1, t_2 = 2, \dots, t_k = k$.

Из k соотношений леммы докажем одну при $j = k$ (при других j мы можем еще раз перенумеровать точки и точка окажется на k -том месте). Далее обозначим $x = x_{n+2}$, и равенство леммы 2 примет вид:

$$\sum_{i=k}^{n+2} (-1)^i D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_k \\ x_1 & \dots & x_{k-1} & x_i \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1} \\ x_1 & \dots & x_{i-1} & x_{i+1} & \dots & x_{n+2} \end{pmatrix} = 0.$$

Ход рассуждений доказательства этого равенства проиллюстрируем в частном случае $k = 4, n = 9$, т. е. докажем равенство:

$$\sum_{i=4}^{11} (-1)^i D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_k \\ x_1 & \dots & x_3 & x_i \end{pmatrix} D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{10} \\ x_1 & \dots & x_{i-1} & x_{i+1} & \dots & x_{11} \end{pmatrix} = 0.$$

Для доказательства все определители десятого порядка по правилу Декарта разложим по последним шести столбцам. Получаемые миноры обозначим через $D_1(x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_9) = D \begin{pmatrix} u_5 & \dots & u_{10} \\ x_2x_3x_5x_6x_7 & x_9 \end{pmatrix}$. Алгебраическим дополнением этого минора в разложении определителя $D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{10} \\ x_1 & \dots & x_{10} \end{pmatrix}$ будет $(-1)^{s_1+s_2} D(x_1x_4x_8x_{10})$,

где $s_1 = 5 + 6 + \dots + 10, s_2 = 2 + 3 + 5 + 6 + 7 + 9$ – сумма номеров столбцов и строк. Коэффициентом при $(-1)^{s_1+s_2} D_1(x_2x_3x_5x_6x_7x_9)$ в доказываемом равенстве будет

$$(-1)^4 D(x_1x_2x_3x_4) D(x_1x_8x_{10}x_{11}) + (-1) D(x_1x_2x_3x_8) D(x_1x_4x_{10}x_{11}) + D(x_1x_2x_3x_{10}) D(x_1x_4x_8x_{11}) - D(x_1x_2x_3x_{11}) D(x_1x_4x_8x_{10}) = 0.$$

Коэффициентом при $(-1)^{s_1+s_3} D_1(x_1x_3x_4x_8x_9x_{11})$ ($s_3 = 1 + 3 + 4 + 8 + 9 + 10$) в доказываемом равенстве будет $-D(x_1x_2x_3x_5)(-1)^3 D(x_2x_6x_7x_{10}) + D(x_1x_2x_3x_6)(-1)^3 D(x_2x_5x_7x_{10}) - D(x_1x_2x_3x_7)(-1)^3 D(x_2x_5x_6x_{10}) + D(x_1x_2x_3x_{10})(-1) D(x_2x_5x_6x_7) = 0$.

Таким образом, убеждаемся, что все коэффициенты при минорах шестого порядка равны нулю. Лемма доказана.

Далее берем систему линейно независимых и непрерывных функций $\{u_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$ на $[a, b]$. Из линейной независимости следует существование точек $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$, таких, что $D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1} \\ x_1 & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix} \neq 0$. Рассмотрим полиномы $D_i(x) = D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1} \\ x_1 & \dots & x_{i-1} x_{i+1} \dots x_{n+1} \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq n+1$. Они различны, так как $D_i(x_i) \neq 0, D_i(x_j) = 0, i \neq j$. Допустим $D_i(x_0) = 0, k+1 \leq i \leq n+1, 1 \leq k \leq n, x_0 \in (x_{\mu-1}, x_\mu)$. На (x_0, x_μ) полиномы $D_i(x) (1 \leq i \leq n+1)$ сохраняют знак. Из $D_i(x_i) \neq 0, D_i(x_0) = 0$ следует, что последняя строка определителя $D_i(x_0)$ является линейной комбинацией остальных n строк

$u_l(x_0) = \sum_{r=1, r \neq i}^{n+1} c_r u_l(x_r) (1 \leq l \leq n+1)$. Последнюю строку определителя $D_p(x_0) = 0 (k+1 \leq p \leq n+1)$ заменим суммой – линейной комбинацией остальных строк определителя. Разлагая полученный определитель на сумму определителей и приравнявая к нулю определители с одинаковыми строками, получим $D_p(x_0) = c_p D_p(x_p) = 0$, то есть $c_p = 0$. Поменяв местами p и i , получим, что и $c_i = 0$. Итак, $u_l(x_0) = \sum_{r=1}^k c_r u_l(x_r) (1 \leq l \leq n+1), c_r \neq 0 (1 \leq r \leq k)$. (4)

Эти равенства равносильны тому, что матрица

$$\begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_1 & \dots & x_k & x_0 \end{pmatrix}$$

имеет ранг k и существует хотя бы один набор столбцов $t_1, t_2, \dots, t_k$, по которым миноры $D_j^{(k)} = D \begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_k} \\ x_1 & \dots & x_{j-1} x_{j+1} \dots x_k & x_0 \end{pmatrix}, (1 \leq j \leq k), D_{x_0}^{(k)} = D \begin{pmatrix} u_{t_1} & \dots & u_{t_k} \\ x_1 & \dots & x_k \end{pmatrix}$ отличны от нуля.

Теорема. $\text{Sign } D_j^{(k)} = \varepsilon \text{Sign } D_j^{n+1}, (1 \leq j \leq k), \varepsilon = \pm 1$. Для доказательства в равенствах (3) в условии леммы 2 положим $x = x_0$ и при оговоренных выше условиях получим:

$$(-1)^k D_{x_0}^{(k)} D_j^{n+1}(x_0) = (-1)^{n+1} D_j^{(k)} D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1} \\ x_1 & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Обозначив через $\varepsilon = \text{sign}(-1)^{n+1-k} D_{x_0}^{(k)} D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1} \\ x_1 & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix}$, получим

$$\text{sign } D_j^{(k)} = \varepsilon \text{sign } D_j^{n+1}(x_0) = \varepsilon D_j^{n+1}, (1 \leq j \leq k), \varepsilon = \pm 1.$$

Например, при $k = n$ $D_{n+1}(x_0) = D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1} \\ x_1 & \dots & x_n & x_0 \end{pmatrix} = 0$,

$$\text{sign } D_j^{(n)}(x_0) = \varepsilon \text{sign } D_j^{n+1}, \varepsilon = \text{sign}(-1)^{D^{(n)}(x_0)} D \begin{pmatrix} u_1 & \dots & u_{n+1} \\ x_1 & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Теорема. Если в ряду $D_1^{(k)}, \dots, D_k^{(k)}, D_0^{(k)}$ будет p перемен знака, то в ряду дополнительных миноров $d_1^{(k)}, \dots, d_{k-1}^{(k)}, d_0^{(k)} (d_j^{(k)} \neq 0)$ элементов любого столбца во всех определителях $k+1$ порядка матрицы (4) будет также p перемен знака, при равенстве нулю дополнительного минора хотя бы одного элемента какого-нибудь определителя $k+1$ порядка матрицы (4) дополнительные миноры всех остальных элементов этого столбца также равны нулю.

Доказательство. Ранг матрицы (4) равен k , $k+1$ строки матрицы линейно зависимы и любые k строк линейно независимы. Отсюда следует

$$\sum_{r=1}^k \mu_r u_l(x_r) + \mu_{r+1} u_l(x_0) = 0, \quad \mu_j \neq 0, 1 \leq j \leq r+1, 1 \leq l \leq n+1.$$

По свойству решений однородной системы линейных уравнений этой системе удовлетворяют дополнительные миноры любого набора k столбцов T_k матрицы (4), и поэтому $d_r^{(k)} = \alpha(T_k) \mu_r$, $d_0^{(k)} = \alpha(T_k) \mu_{r+1}$. Если $\alpha(T_k) = 0$, то все $d_r^{(k)} = 0$, если $\text{sign } \alpha(T_k) = \pm 1$, то знаки могут поменяться в зависимости от k , но число перемен знака останется неизменным.

Зависимость между минорами равного нулю определителя и самими определителями проследим на примерах. Рассмотрим определитель Вандермонда $B_n = D \begin{pmatrix} 1x & \dots & x^n \\ x_1 & \dots & x_{n+1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) = \prod_1^{n+1} (x_j - x_i)$.

Обозначим через $B_n(k) = D \begin{pmatrix} 1 & x & \dots & x^{k-1} & x^{r+1} & \dots & x^n \\ & x_1 & & & & & x_n \end{pmatrix}$. Вычислим эти определители методом математической индукции. Пусть $k = n - 1$. При $n = 3$ имеем $B_3(2) = \prod_1^3 (x_j - x_i)(x_1 + x_2 + x_3)$. Предположим $B_{n-1}(n-2) = \prod_1^{n-1} (x_j - x_i)(\sum_{k=1}^{n-1} x_k)$. Чтобы вычислить $B_n(n-1)$, умножим первую строку на -1 и прибавим ко всем остальным строкам. Разложим

$$x_j^k - x_1^k = (x_j - x_1)(x_j^{k-1} + x_j^{k-2}x_1 + \dots + x_jx_1^{k-2} + x_1^{k-1}) \quad (2 \leq k \leq n).$$

После вынесения за знак определителя множителей $(x_j - x_i)$ представим определитель в виде суммы, приравнивая нулю определители с одинаковыми столбцами, начиная с второго столбца (для сокращения записей вместо всего определителя ход рассуждений проиллюстрируем на первой строке). Получим определитель с первой строкой $1, x_2, x_2^2, \dots, x_2^{n-3}, x_2^{n-1} + x_2^{n-2}x_1 + x_2^{n-3}x_2^2 + \dots + x_2^{n-1}$. После очередного представления в виде суммы определителей имеем

$$B_n(n-1) = \prod_2^n (x_j - x_1)(B_{n-1}(n-2) + x_1 B_{n-2}) = \prod_1^n (x_j - x_i)(\sum_{k=1}^n x_k).$$

Определитель $B_n(n-1)$ на $[a, b]$ при $a < 0$, $b > 0$ может равняться 0 и в точке, отличной от x_i . В таком равном нулю определителе все миноры по первым $n-1$ столбцам при $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ положительны и в ряду $D_1^{n+1}, \dots, D_{n+1}^{n+1}$ может быть не более одной перемены знака.

$$\text{Рассуждая аналогично, получим: } B_n(n-2) = \prod_1^n (x_j - x_i)(\sum_{i_1 i_2=1}^n x_{i_1} x_{i_2}),$$

$$B_n(n-3) = \prod_1^n (x_j - x_i)(\sum_{i_1 i_2 i_3=1}^n x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}), \dots, \quad B_n(0) = \prod_1^n (x_j - x_i) x_1 x_2 \dots x_n.$$

Таким образом, можно вычислять определители типа Вандермонда с двумя вычеркнутыми степенями. $B_4(2, 3) = \prod_1^4 (x_j - x_i)(\sum_1^3 x_i^2 + \sum_1^3 x_{i_1} x_{i_2})$, $i_1 \neq i_2$, и каждый из них принимает значения от 1 до 3. Далее условие $i_{k_1} \neq i_{k_2}$ сохраняется. Предположим по индукции

$$B_{n-1}(n-2, n-3) = \prod_1^{n-3} (x_j - x_i)(\sum_1^{n-3} x_i^2 + \sum_1^{n-3} x_{i_1} x_{i_2}).$$

Повторив приведенные выше рассуждения, получим

$$\begin{aligned} B_n(n-1, n-2) &= \prod_1^{n-1} (x_j - x_1)(B_{n-1}(n-2, n-3) + x_1 B_{n-2}(n-3) + x_1^2 B_{n-3}) = \\ &= \prod_1^{n-1} (x_j - x_i) \left[\sum_2^{n-1} x_i^2 + \sum_2^{n-1} x_{i_1} x_{i_2} + x_1 \sum_2^{n-1} x_i + x_1^2 \right] = \\ &= \prod_1^{n-1} (x_j - x_i) \left[\sum_1^{n-1} x_i^2 + \sum_1^{n-1} x_{i_1} x_{i_2} \right]. \end{aligned}$$

Литература

1. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973.
2. Севестьянов Е.А., Долгобродов А.А. Нули функций в весовых пространствах со смешанной нормой // Мат. заметки. – 2013. – Т. 94, вып. 2. – С. 2–7.
3. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценка скорости сходимости сплайнов по рациональным интерполянтам через индуцированные функции // Вестник ДГУ. – 2016. – Вып. 2. – С. 35–40.
4. Алиев М.С. О приближении функций слабой системой Чебышева // Вестник ДГУ. – 2011. – Вып. 6. – С. 120–125.
5. Алиев М.С. К вопросу реализации нормы одного функционала // Вестник ДГУ. – 2013. – Вып. 1 – С. 85–88.
6. Алиев М.С. Свойства полиномов по одной системе функций // Вестник ДГУ. – 2016. – Вып. 2. – С. 41–44.
7. Хаиров А.Р. О различных формах представления многочленов Лежандра // Вестник ДГУ. – 2018. – Вып. 3. – С. 80–93.
8. Загиров Н.Ш., Гаджиева Т.О. Оценки постоянной А.А. Маркова в весовом пространстве Якоби // Вестник ДГУ. – 2018. – Вып. 3. – С. 54–61.
9. Алиев М.С. О наилучшем приближении в пространстве $S_{[a,b]}$ // Вестник ДГУ. – 2018. – Вып. 2. – С. 17–21.
10. Рамазанов А.-Р.К. Характеризация полинома наилучшего приближения со знакочувствительным весом // Мат. сборник. – 2005. – Т. 196, № 3. – С. 89–118.
11. Алиев М.С., Бру Мантч. Об определителях Вандермонда с двумя вычеркнутыми степенями // Вестник ДГУ. – 2017. – Вып. 3. – С. 67–73.

Поступила в редакцию 24 августа 2019 г.

UDC 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-4-60–64

Some ratio for determinants

M.S. Aliev

Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; aliev.mingazhudin@yandex.ru

The paper proves the cycle of equality between the sums of products of pairs of minors of the same order, distinguished from each other by the number of different points. These equations establish relationships between determinants of different orders. The invariance of the number of sign changes in a series of non-zero minors on the columns of the minimum number of linearly dependent rows of the matrix is shown. The results obtained are valid for any numerical determinants.

Keywords: *function, determinant, matrix, minor, Vandermond.*

Received 24 August, 2019