УДК 517.968

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-4-53–59

М.М. Зайнулабидов, М.М. Шихиинатова

Об оценках для сингулярного интегрального оператора с обобщенным ядром Коши–Трикоми и его приращения

Дагестанский государственный педагогический университет; Россия, 367003, г. Махачкала, ул. М. Ярагского, 57; shichtum_2006@mail.ru

В теории нелинейных сингулярных интегральных уравнений фундаментальную роль играют оценки для сингулярного интегрального оператора с ядром Коши и его приращения, на основе которых получают теоремы вложения в различных функциональных пространствах, способствующие доказательству существования решения уравнения и приближенному его нахождению.

Проведенные в статье исследования преследуют цель получить аналогичные оценки для сингулярного интегрального оператора с обобщенным ядром Коши–Трикоми, частным случаем которого является оператор с ядром Коши.

Основным методом исследования является метод преобразований, сводящий изучаемую проблему к ранее исследованным. В статье найдены замены переменных, которые сводят оператор с обобщенным ядром Коши–Трикоми к оператору с ядром Коши, позволяющие выявить известные оценки в удобной форме и, возвращаясь к первоначальным переменным, получить необходимые оценки для оператора с ядром Коши–Трикоми.

Основным результатом исследований являются оценки, полученные для сингулярного интегрального оператора с обобщенным ядром Коши–Трикоми, и его приращения, а также вытекающие из этих оценок важные для дальнейших исследований следствия в виде неравенств.

Можно сделать вывод, что достаточно много результатов, полученных относительно сингулярного интегрального оператора с ядром Коши, можно распространить на сингулярный интегральный оператор с ядром Коши–Трикоми. Раскрытие этих возможностей должно стать предметом дальнейших научных исследований.

Ключевые слова: *сингулярный интегральный оператор с обобщенным ядром Коши–Трикоми, оценки оператора с ядром Коши–Трикоми и его приращения.*

Рассмотрим сингулярный интегральный оператор

$$V(x, b) = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{bt}{1-btx} \right) f(x, t) dt \quad (1)$$

с ядром Коши–Трикоми [3, 4, 5], которое совпадает при $b = 0$ с ядром Коши [2], при $b = 1$ – с ядром Трикоми [1, 6, 7, 8], а при $0 < b < 1$ занимает некоторое промежуточное положение.

Известно, что в теории нелинейных сингулярных интегральных уравнений [2] роль исходной позиции занимают оценки для оператора $V(x, 0)$ с ядром Коши и для его приращения $V(x_2, 0) - V(x_1, 0)$.

Естественно, по этой причине определенный научный интерес представляет получение аналогичных оценок для оператора (1) при $0 < b \leq 1$.

Исследованию этой проблемы посвящена настоящая статья.

Ради краткости и простоты изложения ограничимся рассмотрением частного случая (1):

$$\frac{V(x,b)}{1+bx^2} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{bt}{1-btx} \right) \frac{f(x,t)}{1+bt^2} dt, \quad 0 \leq b \leq 1, \quad (2)$$

которое не ограничивает общности, как будет видно из проводимых исследований.

Теорема. Если $f(x, t)$ непрерывна в $(-1; 1) \times (-1; 1)$ и для любых $x, x_1, x_2 \in (-1; 1)$ сходятся интегралы

$$\int_{-1}^1 |f(x, t)| dt, \int_0^1 \frac{\omega(f, o, \delta(t), [c(x_1), c(-x_2)], [c(x_1), c(-x_2)])}{t} dt, \quad (3)$$

где $\delta(t) = \frac{(1+b)t}{1+bt^2}$, $c(x) = \frac{(1-x)(1-bx)}{2(1+bx^2)}$,

$\omega(f, o, \delta, [c_1, d_1], [c_1, d_1]) = \sup |f(x, t_1) - f(x, t_2)|$ при

$|t_1 - t_2| \leq \delta(t)$, $x \in [c_1, d_1]$, $t_1, t_2 \in [c_2, d_2]$, $(c_k, d_k) \in (-1, 1)$, $k = 1, 2$,

то для $V(x, b)$ и $V(x_2, b) - V(x_1, b)$ из (2) справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} |V(x, b)| \leq & 2 \left\{ \frac{(1+bx^2)(1+b)}{(1+x)(1+bx)} \int_{-1}^{-\alpha(x)} |f(x, t)| dt + \frac{(1+bx^2)(1+b)}{(1-x)(1-bx)} \int_{\alpha(-x)}^1 |f(x, t)| dt + \right. \\ & + (1+bx^2) \int_{-\alpha(x)}^{\beta_1(x)} \frac{|f(x, t)| dt}{(x-t)(1-bxt)} + (1+bx^2) \int_{\beta_2(x)}^{\alpha(-x)} \frac{|f(x, t)| dt}{(t-x)(1-btx)} + \\ & \left. + \int_0^{g(x)} \frac{\omega(f, o, \delta(t), [-c(x), c(-x)], [-c(x), c(-x)])}{t} dt \right\}; \quad (4) \\ & + \frac{h(1+b)(1+bx_1^2)(1+bx_2^2)}{(1-x_1)(1-x_2)(1-bx_1)(1-bx_2)} \int_{\alpha(-x)}^1 |f(x, t)| dt + \frac{hf(x_1, x_1)(1+bx_2^2)}{(1+x_2)(1+bx_2)} + \\ & + \frac{hf(x_2, x_2)(1+bx_1^2)}{(1-x_1)(1-bx_1)} + \\ & + \int_{g(x_1, G_1)}^{\gamma(x_1, x_2)} \frac{(1+bx_1^2)|f(x, t)| dt}{(t-x_1)(1-bx_1t)} + \int_{\gamma(x_1, x_2)}^{g(x_2, G_2)} \frac{(1+bx_2^2)|f(x, t)| dt}{(x_2-t)(1-bx_2t)} + \\ & + \frac{(1+bx_2^2)(1+b)}{(1+x_2)(1+bx_2)} \int_{-1}^{-\alpha(x_1)} |f(x_2, t) - f(x_1t)| dt + \\ & + \frac{(1+bx_1^2)(1+b)}{(1-x_1)(1-bx_1)} \int_{\alpha(-x_2)}^1 |f(x_2, t) - f(x_1t)| dt + \\ & + h \int_0^{\alpha(-x_1)} \frac{\omega\left(f, 0, \delta(t), [\delta(x_1), \delta(x_2)], \left[-c(x_1), \frac{\delta(x_1) + \delta(x_2)}{2}\right]\right)}{t[(1+b)t + h(1+bt^2)]} dt + \\ & + h \int_0^{\alpha(x_2)} \frac{\omega\left(f, 0, \delta(t), [\delta(x_1), \delta(x_2)], \left[\frac{\delta(x_1) + \delta(x_2)}{2}, c(-x_2)\right]\right)}{t[(1+b)t + h(1+bt^2)]} dt + \\ & + \omega(f, h, 0, [\delta(x_1), \delta(x_2)], [-c(x_1), c(x_2)]) \ln \frac{4}{h}, \quad (5) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \frac{2c(x)}{(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 - 4bc^2(x)}}, & \beta_k(x) &= \frac{2g_k(x)}{(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 - 4bg_k^2(x)}}, \\ g_k(x) &= \delta(x) + (-1)^k G[\delta(x)], & k &= 1, 2, \\ g(x) &= \frac{g_2(x) - g_1(x)}{(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 - b[g_2(x) - g_1(x)]^2}}, \\ \gamma(x_1, x_2) &= \frac{\delta(x_1) + \delta(x_2)}{(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 - b[\delta(x_1) + \delta(x_2)]^2}}, \\ g(x, G_k) &= \frac{2[\delta(x) - (-1)^k G_k]}{(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 - 4b[\delta(x) - (-1)^k G_k]^2}}, \\ k &= 1, 2; G[\delta(x)] = \min[c(-x), c(x)], G_1 = \min\left[\frac{h}{2}, c(-x_1)\right], \\ G_2 &= \min\left[\frac{h}{2}, c(x_2)\right], & h &= \frac{(1+b)(x_2 - x_1)(1 - bx_1x_2)}{(1 + bx_1^2)(1 + bx_2^2)}, \\ \omega(f, \delta, o, [c_1, d_1], [c_2, d_2]) &= \sup|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \text{ при} \\ |x_1 - x_2| < \delta, & x_1, x_2 \in [c_1, d_1], & t \in [c_2, d_2], & (c_k, d_k) \in (-1, 1), & k = 1, 2.\end{aligned}$$

Доказательство. Из легко проверяемого равенства

$$\frac{(t-x)(1-btx)}{(1+bt^2)(1+bx^2)} = \frac{t}{1+bt^2} - \frac{x}{1+bx^2}$$

следует, что в результате замены переменных согласно формулам

$$S = \frac{(1+b)t}{1+bt^2}, \quad y = \frac{(1+b)t}{1+bt^2}, \quad ds = \frac{(1+b)(1-bx^2)}{(1+bt^2)^2} dt \quad (6)$$

равенство (2) можно переписать в виде

$$\varphi(y) = \int_{-1}^1 \frac{\psi(y, s)}{s-y} ds, \quad (7)$$

где $\varphi(y) = V(x, b)$, $\psi(y, s) = f(x, t)$, $t[(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 - 4bs^2}] = 2s$,

$$x[(1+b) + \sqrt{(1+b)^2 - 4by^2}] = 2y. \quad (8)$$

Для оператора $\varphi(y)$ с ядром Коши (7) и для его приращения $\varphi(y_2) - \varphi(y_1)$ при условии непрерывности $\psi(y, s)$ в $(-1, 1) \times (-1, 1)$ и сходимости для любых $y, y_1, y_2 \in (-1; 1)$ интегралов

$$\int_{-1}^1 |\psi(y, s)| ds, \quad \int_{-1}^1 \frac{\omega(\psi, 0, s, [\frac{y_1-1}{2}, \frac{y_2+1}{2}]; [\frac{y_1-1}{2}, \frac{y_2+1}{2}])}{s} ds, \quad (9)$$

где

$$\omega(\psi, 0, s, [\frac{y_1-1}{2}, \frac{y_2+1}{2}]; [\frac{y_1-1}{2}, \frac{y_2+1}{2}]) = \sup|\psi(y, s_1) - \psi(y, s_2)|,$$

когда

$$|s_1 - s_2| < s, \quad y, s_1, s_2 \in [\frac{y_1-1}{2}, \frac{y_2+1}{2}]; [\frac{y_1-1}{2}, \frac{y_2+1}{2}] \subset (-1, 1),$$

известны оценки [2], которые в удобной для наших исследований форме могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}|\varphi(y)| &\leq 2 \left\{ \frac{1}{y+1} \int_{-1}^{\frac{y-1}{2}} |\psi(y, s)| ds + \frac{1}{1-y} \int_{\frac{y+1}{2}}^1 |\psi(y, s)| ds + \int_{\frac{y-1}{2}}^{\frac{y+1}{2}} \frac{|\psi(y, s)| ds}{y-s} + \right. \\ &\left. + \int_{\frac{y+1}{2}}^{\frac{y+1}{2}} \frac{|\psi(y, s)| ds}{s-y} + \int_0^{G(y)} \frac{\omega(\psi, 0, s, [\frac{y-1}{2}, \frac{y+1}{2}]; [\frac{y-1}{2}, \frac{y+1}{2}])}{s} ds \right\}, \quad (10)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\varphi(y_2) - \varphi(y_1)| \leq & 4 \left\{ \frac{h}{(y_1+1)(y_2+1)} \int_{-1}^{\frac{y_1-1}{2}} |\psi(y_1, s)| ds + \right. \\
 & + \frac{h}{(1-y_1)(1-y_2)} \int_{\frac{1+y_2}{2}}^1 |\psi(y_2, s)| ds + \frac{h\psi(y_1, y_1)}{1+y_2} + \frac{h\psi(y_2, y_2)}{1-y_1} + \\
 & + \int_{y_1+G_1}^{y_1+\frac{h}{2}} \frac{|\psi(y, s)|}{s-y_1} ds + \int_{y_2-\frac{h}{2}}^{y_2-G_2} \frac{|\psi(y_2, s)|}{y_2-s} ds + \frac{1}{1+y_2} \int_{-1}^{\frac{y_1+1}{2}} |\psi(y_2, s) - \psi(y_1, s)| ds + \\
 & + \frac{1}{1-y_1} \int_{\frac{1+y_2}{2}}^1 |\psi(y_2, s) - \psi(y_1, s)| ds + h \int_{\frac{1-y_2}{2}}^{\frac{y_1+1}{2}} \frac{\omega\left(\psi, 0, s, [y_1, y_2], \left[\frac{y_1-1}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right]\right)}{s(s+h)} ds + \\
 & + h \int_0^{\frac{1-y_2}{2}} \frac{\omega\left(\psi, 0, s, [y_1, y_2], \left[\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{1+y_2}{2}\right]\right)}{s(s+h)} ds + \\
 & \left. + \omega\left(\psi, h, 0, [y_1, y_2], \left[\frac{y_1-1}{2}, \frac{y_2+1}{2}\right]\right) \ln \frac{4}{h}, \right. \quad (11)
 \end{aligned}$$

где $h = y_2 - y_1$, $G(y) = \min\left\{\frac{y+1}{2}, \frac{1-y}{2}\right\}$, $G_1 = \min\left\{\frac{h}{2}, \frac{y_1+1}{2}\right\}$,

$$G_2 = \min\left\{\frac{h}{2}, \frac{1-y_2}{2}\right\}, \quad \omega(\psi, 0, s, [c_1, d_1]; [c_2, d_2]) = \sup |\psi(y, s_1) - \psi(y, s_2)|,$$

$$|s_1 - s_2| < s, \quad y \in [c_1, d_1], \quad s_1 s_2 \in [c_2, d_2], \quad [c_k, d_k] \subset (-1, 1), \quad k = 1, 2;$$

$$\begin{aligned}
 \omega\left(\psi, h, 0, [y_1, y_2]; \left[\frac{y_1-1}{2}, \frac{y_2+1}{2}\right]\right) = \\
 = \sup |\psi(y_1, s) - \psi(y_2, s)|, \quad |y_1 - y_2| < h,
 \end{aligned}$$

$$y_1, y_2 \in (-1, 1), \quad s \in \left[\frac{y_1-1}{2}, \frac{y_2+1}{2}\right] \subset (-1, 1).$$

Возвращаясь в (9), (10), (11) к старым переменным t, x, f согласно формулам (6), (8) с учетом очевидных неравенств

$(1 - bt^2) < 1, (1 - bt^2) < (1 + bt^2)$, без особого труда можно получить условия (3) и утверждения (4), (5) теоремы, что завершает ее доказательство.

Следствие 1. Если $f(x)$ суммируема в $(-1, 1)$ и сходится интеграл

$$\int_0^1 \frac{\omega(f, \delta(t), [-c(x_1), c(x_2)])}{t} dt, \quad \delta(t) = \frac{(1+b)t}{1+bt^2}, \quad c(x) = \frac{(1-x)(1-bx)}{2(1+bx^2)}, \quad (12)$$

где $\omega(f, \delta(t), [-c(x_1), c(x_2)]) = \sup |f(t_1) - f(t_2)|$ при $|t_1 - t_2| < \delta(t)$

$t_1, t_2 \in [-c(x_1), c(x_2)]$, x_1, x_2 , то для функции $V(x, b)$ из равенства

$$\frac{V(x, b)}{1+bx^2} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{t-x} - \frac{bt}{1-bxt} \right) \frac{f(t)}{1+bt^2} dt, \quad 0 \leq b \leq 1 \quad (13)$$

справедливы оценки, получаемые из (4), (5) с учетом равенств $f(x_2, t) - f(x_1, t) = f(t) - f(t) = 0$

$\omega(f, h, 0, \delta(t), [-c(x_1), c(x_2)]) = 0$ и заменой $f(x, t)$ на $f(t)$,

$\omega(f, h, 0, \delta(t), [-c(x_1), c(x_2)])$ на $\omega(f, 0, \delta(t), [-c(x_1), c(x_2)])$.

Следствие 2. Если $f(x, t)$ непрерывна на $(-1, 1) \times (-1, 1)$ и $f(-1, -1) = f(1, 1) = 0$, то для функции $V(x, b)$ и её приращения

$V(x_2, b) - V(x_1, b)$ из (2) справедливы оценки

$$|V(x, b)| \leq 8 \int_0^1 \frac{\omega(f, \delta(t), 0)}{t} dt + 7 \int_0^1 \frac{\omega(f, 0, \delta(t))}{t} dt, \quad (14)$$

$$|V(x_2, b) - V(x_1, b)| \leq 44h \int_0^1 \frac{\omega(f, 0, \delta(t))}{t[(1+b)t + (1+bt^2)h]} dt + 64 \int_0^h \frac{\omega(f, \delta(t), 0)}{t} dt +$$

$$+ 4\omega(f, h, 0) \ln \frac{2}{h}, \quad (15)$$

где модули непрерывности $\omega(f, 0, \delta(t))$, $\omega(f, \delta(t), 0)$, $\omega(f, h, 0)$ берутся на всем отрезке $[-1, 1]$ и с учетом этого определяются так же, как и в теореме.

Доказательство следствия 2, то есть справедливости неравенств (14) и (15), легко можно получить из известных [2] аналогичных неравенств для $\varphi(y)$ из (7) путем перехода к переменным t, x, f согласно (6) и (8), точно так же, как это было сделано при доказательстве теоремы.

Следствие 3. Если функция $f(x)$ непрерывна на $[-1, 1]$ и $f(-1) = f(1) = 0$, то для функции $V(x, b)$ из (13) имеют место оценки

$$|V(x, b)| < 7 \int_0^1 \frac{\omega(f, \delta(t))}{t} dt, \quad |V(x_2, b) - V(x_1, b)| \leq 44h \int_0^1 \frac{\omega(f, \delta(t))}{t[(1+b)t + (1+bt^2)h]} dt. \quad (16)$$

Справедливость неравенств (16) легко установить, исходя из неравенств (14), (15) с учетом $\omega[(f(x), \delta(t), 0)] = 0$ по определению.

Следует обратить внимание на то, что приведенные выше исследования опираются на ограничение параметра $0 \leq b \leq 1$ в операторе $V(x, b)$.

Возникает вопрос: можно ли рассматривать оператор $V(x, b)$ при $b > 1$ и получить аналогичные результаты?

Получить ответ на этот вопрос можно, но непросто.

Дело в том, что при $b > 1$ замена переменной интегриации по формуле (6) на всем промежутке $[-1, 1]$ не работает, так как $[-\frac{1}{\sqrt{b}}, \frac{1}{\sqrt{b}}] \subset [-1, 1]$, и вместо двух особых точек на концах отрезка надо учесть еще две особые точки внутри.

Однако эта проблема снимается, если вместо оператора (1) рассматривать оператор

$$V(x, b) = \int_{-\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\alpha}} \left(\frac{1}{t-x} - \frac{\alpha^2 t}{1-\alpha^2 tx} \right) f(x, t) dt,$$

который содержит параметр α не только в ядре, но и в пределах интегриации.

Любопытно обратить внимание на предельные случаи: $w(x, 1) = V(x, 1)$,

$$W(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x, t)}{t-x} dt.$$

Оператор $W(x, 0)$ достаточно хорошо изучен, информацию об этом можно найти в монографиях [2, 9, 10] и в научных статьях.

Исследование $V(x, \alpha)$ при $0 < \alpha \leq \infty$ можно провести так же, как и для $W(x, 1)$, так как замена переменных согласно равенствам $\tau = \alpha t$, $y = \alpha x$, $\alpha \neq 0$ сводит $W(x, \alpha)$ к оператору $V(y, 1)$ с плотностью $f\left(\frac{y}{\alpha}, \frac{\tau}{\alpha}\right)$.

Заключение. Полученные результаты показывают, что известные оценки сингулярного оператора с ядром Коши и его приращения, играющее достаточно значимое

место в теории сингулярных интегральных уравнений, как линейных, так и нелинейных, могут быть распространены на сингулярные операторы с ядром Коши–Трикоми и использованы при построении теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши–Трикоми.

Литература

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. Глушак А.В., Романченко Т.Г. Формулы связи между решениями абстрактных сингулярных дифференциальных уравнений // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Сер.: Математика, физика. – 2016. – № 6. – С. 27–35.
3. Гусейнов А.И., Мухтаров Х.Ш. Введение в теорию нелинейных сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1980. – 414 с.
4. Зайнулабидов М.М., Зайнулабидова Г.М., Зайнулабидова З.М. Подготовка магистров к поиску и решению научных проблем математики // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. – 2017. – Т. 11. – С. 105–109.
5. Зайнулабидов М.М., Зайнулабидова Г.М., Зайнулабидова З.М. К проблеме подготовки магистров-математиков к научно-исследовательской работе // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. – 2018. – Т. 12, № 2. – С. 51–55.
6. Зайнулабидов М.М., Зайнулабидова З.М. Об одном интегральном уравнении со степенным ядром с особенностью типа Трикоми и его некоторые приложения // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. – Махачкала, 2017. – С. 107–111.
7. Крикунов Ю.М. Краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. – Казань: Издательство Казанского университета, 1986. – 148 с.
8. Мишин С.Н. Об одном виде дифференциально-операторных уравнений с переменными коэффициентами // Вестник Российского университета дружбы народов. Сер.: Математика, информатика, физика. – 2015. – № 1.
9. Плаксина И.М. О разрешимости сингулярной задачи Коши для функционально-дифференциального уравнения с отклонением специального вида // Вестник Тамбовского университета. Сер.: Естественные науки. – 2018. – Т. 23, № 123.
10. Сабитов К.Б., Сафина Р.М. Первая граничная задача для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Известия РАН. Сер.: Математика. – 2018. – Т. 82, № 2. – С. 79–112 // Math-Net. Ru с LIBRARY.Ru.
11. Сабитов К.Б., Мартеньянова Н.В. К вопросу о корректности обратных задач для неоднородного уравнения Гельмгольца // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Физико-математические науки. – 2018. – Т. 22, № 2. – С. 269–292 // Math-Net. Ru.
12. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1985. – 304 с.
13. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. – М.: Гостехиздат, 1997.

Поступила в редакцию 1 июля 2019 г.

UDC 517.968

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-4-53–59

**On estimates for a singular integral operator with generalized kernel
of Cauchy–Tricomi and its increments**

M.M. Zainulabidov, M.M. Shihshinatova

*Dagestan State Pedagogical University; Russia, 367003, Makhachkala, M. Yaragsky
st., 57; shichmum_2006@mail.ru*

The fundamental role is played in the theory of nonlinear singular integral equations by estimates for the singular integral operator with Cauchy kernel and its increments on the basis of which the embedding theorems in various functional spaces are obtained, contributing to the proof of the existence of the equation solution and its approximate finding.

The studies carried out in the article aim at obtaining similar estimates for a singular integral operator with a generalized Cauchy–Tricomi kernel, a special case of which is an operator with a Cauchy kernel.

The main method of research is the method of transformations, which reduces the studied problem to the previously studied one. The article found changes of variables that reduce the operator with the generalized Cauchy–Tricomi kernel to the operator with the Cauchy kernel, allowing to reveal known estimates in a convenient form, and returning to the original variables obtain the necessary estimates for the operator with the Cauchy–Tricomi kernel.

The main result of the research is the estimates obtained for a singular integral operator with a generalized Cauchy–Tricomi kernel and its increments. The inequalities important for further investigations are also derived from these estimates.

The authors conclude that quite a lot of results obtained with respect to a singular integral operator with a Cauchy kernel can be extended to a singular integral operator with a Cauchy–Tricomi kernel and the disclosure of these possibilities should be the subject of further scientific research.

Keywords: *singular integral operator with generalized Cauchy–Tricomi kernel, Estimates of the operator with the Cauchy–Tricomi kernel and its increments.*

Received 1 July, 2019