УДК 517.946

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-2-55-62

С.Р. Велиева

Решение смешанной задачи для уравнения движения сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости

Бакинский государственный университет; Азербайджан, AZ1148, г. Баку, ул. Академика Захида Халилова, 23; sevinj_velyeva@mail.ru

В статье рассматривается смешанная задача для процесса движения сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости, имеющая математическую модель уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами в частных производных.

В частном случае с помощью метода факторизации рассматриваемое уравнение сводится к системе двух уравнений с частными производными второго порядка (один из которых содержит производные только по одной переменной). В общем случае применяется метод разделения переменных.

Ключевые слова: *процесс движения сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости, линейное уравнение в частных производных четвертого порядка с постоянными коэффициентами, метод факторизации, разделение переменных, метод Фурье.*

Введение

Для частного случая, применяя метод факторизации, оператор данного уравнения сводится к двум уравнениям второго порядка с частными производными и постоянными коэффициентами, один из которых содержит производные только лишь в одном направлении.

В общем случае применяется метод разделения переменных, и решение получается в виде ряда Фурье. Изучены асимптотические распределения собственных значений соответствующей спектральной задачи и асимптотики собственных функций, на основе которых доказана разрешимость основной задачи.

Постановка задачи

Рассмотрим смешанную задачу для линейного дифференциального уравнения с частными производными четвертого порядка вида:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} - \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + b^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \omega_0^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0,1), \quad (1)$$

с начальными условиями:

$$\left. \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} \right|_{t=0} = \varphi_k(x), \quad k = \overline{0,3}; \quad x \in [0,1], \quad (2)$$

и граничными условиями:

$$\alpha_{k0} u(0,t) + \alpha_{k1} \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} + \beta_{k0} u(1,t) + \beta_{k1} \left. \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right|_{x=1} = \gamma_k(t), \quad k = \overline{1,2}; \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где c , b и ω_0 – заданные положительные постоянные числа, α_{kj}, β_{kj} , при $k = 1, 2$, $j = 0, 1$; заданные постоянные числа $\varphi_k(x)$, при $k = \overline{0, 3}$, $x \in [0, 1]$ и $\gamma_k(t)$ при $k = 1, 2$; $t \geq 0$, заданные непрерывные функции, а граничные условия (3) линейно независимые, $u(x, t)$ – искомая функция.

В уравнении (1) произведем следующую замену:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = v(x, t),$$

Тогда (1) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + b^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - \omega_0^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = 0$$

Предполагая, что

$$\omega_0^2 = b^2 c^2, \quad (4)$$

и факторизуя дифференциальный оператор, входящий в уравнение (1), получаем следующую систему уравнений второго порядка вида:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = v(x, t) c^2, \\ \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + b^2 c^2 v(x, t) = 0, \quad x \in (0, 1), \quad t > 0, \end{cases} \quad (5)$$

где второе уравнение содержит производные только по t , а его общее решение имеет вид:

$$v(x, t) = C_1(x) \cos(bct) + C_2(x) \sin(bct), \quad (6)$$

где $C_1(x)$ и $C_2(x)$ – произвольные функции.

Для определения этих функций воспользуемся первым уравнением системы (5) и начальными условиями (2), т. е.

$$c^2 v(x, 0) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{t=0} = \varphi_2(x) - c^2 \varphi_0''(x), \quad (7)$$

и так как

$$c^2 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} - c^2 \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t},$$

то

$$c^2 \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial t^3} \Big|_{t=0} - c^2 \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \partial t} \Big|_{t=0} = \varphi_3(x) - c^2 \varphi_1''(x). \quad (8)$$

Далее из (6) получим:

$$v(x, 0) = C_1(x) = \frac{1}{c^2} \varphi_2(x) - \varphi_0''(x), \quad (9)$$

$$\text{и } \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -C_1(x) bc \sin(bct) + C_2(x) bc \cos(bct),$$

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = C_2(x) bc = \frac{1}{c^2} \varphi_3(x) - \varphi_1''(x). \quad (10)$$

Таким образом, учитывая (9) и (10), из (6), имеем:

$$v(x, t) = \left[\frac{1}{c^2} \varphi_2(x) - \varphi_0''(x) \right] \cos(bct) + \frac{\varphi_3(x) - c^2 \varphi_1''(x)}{bc^3} \sin(bct). \quad (11)$$

После того как определен $v(x, t)$, из первого уравнения системы (5) получаем следующее неоднородное уравнение гиперболического типа:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} &= [\varphi_2(x) - c^2 \varphi_0''(x)] \cos(bct) + \frac{\varphi_3(x) - c^2 \varphi_1''(x)}{bc} \times \\ &\times \sin(bct) \equiv f(x, t), \quad x \in (0, 1), \quad t > 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Присоединяя к уравнению (12) граничное условие из (3) и первую пару начальных условий из (2), получаем для функции $u(x, t)$ смешанную задачу.

Полученная задача хорошо исследована в литературе. К этой задаче можно применить преобразование Лапласа.

Теперь возвращаемся к общему случаю, когда условия (4) не имеют место. Для простоты изложения рассмотрим однородное граничное условие (3), т. е. пусть

$$\gamma_k(t) = 0, k = 1, 2, t \geq 0. \quad (13)$$

Тогда, применяя метод разделения переменных, решение уравнения (1) будем искать в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (1), получим:

$$\frac{1}{c^2} X(x) T^{(IV)}(t) - X''(x) T''(t) + b^2 X(x) T''(t) - \omega_0^2 X''(x) T(t) = 0,$$

или

$$X(x) \left[\frac{T^{(IV)}(t)}{c^2} + b^2 T''(t) \right] - X''(x) [T''(t) + \omega_0^2 T(t)] = 0,$$

или же

$$\frac{T^{(IV)}(t) + b^2 c^2 T''(t)}{c^2 [T''(t) + \omega_0^2 T(t)]} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2, \quad (15)$$

что приводит нас к следующим двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$X''(x) = \lambda^2 X(x), x \in (0, 1) \quad (16)$$

и

$$T^{(IV)}(t) + b^2 c^2 T''(t) = c^2 \lambda^2 [T''(t) + \omega_0^2 T(t)], t > 0. \quad (17)$$

Учитывая (14), в граничном условии (3) с учетом (13) имеем:

$$\alpha_{k0} X(0) + \alpha_{k1} X'(0) + \beta_{k0} X(1) + \beta_{k1} X'(1) = 0, k = 1, 2 \quad (18)$$

Из спектральной задачи (16), (18) имеем:

$$X(x) = C_1 e^{-\lambda x} + C_2 e^{\lambda x}, \quad (19)$$

где C_1 и C_2 определяется из алгебраической системы:

$$\alpha_{k0}(C_1 + C_2) + \alpha_{k1}(-C_1 \lambda + C_2 \lambda) + \beta_{k0}(C_1 e^{-\lambda} + C_2 e^{\lambda}) + \beta_{k1}(-C_1 \lambda e^{-\lambda} + C_2 \lambda e^{\lambda}) = 0, k = 1, 2. \quad (20)$$

Система (20) имеет нетривиальное решение, если:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \alpha_{10} - \alpha_{11}\lambda + (\beta_{10} - \beta_{11}\lambda)e^{-\lambda} & \alpha_{10} + \alpha_{11}\lambda + (\beta_{10} + \beta_{11}\lambda)e^{\lambda} \\ \alpha_{20} - \alpha_{21}\lambda + (\beta_{20} - \beta_{21}\lambda)e^{-\lambda} & \alpha_{20} + \alpha_{21}\lambda + (\beta_{20} + \beta_{21}\lambda)e^{\lambda} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е.

$$\begin{aligned} & \left[- \begin{vmatrix} \alpha_{10} & \beta_{10} \\ \alpha_{20} & \beta_{20} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{10} & \beta_{11} \\ \alpha_{20} & \beta_{21} \end{vmatrix} \lambda - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{10} \\ \alpha_{21} & \beta_{20} \end{vmatrix} \lambda - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix} \lambda^2 \right] e^{\lambda} + \\ & + 2 \left[\begin{vmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{10} & \beta_{11} \\ \beta_{20} & \beta_{21} \end{vmatrix} \right] \lambda + \left[- \begin{vmatrix} \alpha_{10} & \beta_{10} \\ \alpha_{20} & \beta_{20} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_{10} & \beta_{11} \\ \alpha_{20} & \beta_{21} \end{vmatrix} \lambda - \right. \\ & \left. - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{10} \\ \alpha_{21} & \beta_{20} \end{vmatrix} \lambda + \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix} \lambda^2 \right] e^{-\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Если

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{11} \\ \alpha_{21} & \beta_{21} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (22)$$

Тогда главная часть $\Delta(\lambda)$ выделяется следующим образом:

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \left[1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right], |\lambda| \rightarrow \infty, \Delta_0(\lambda) = -\lambda^2 \Delta_1 (e^{\lambda} - e^{-\lambda}), \quad (23)$$

т. е. собственные значения имеют следующую асимптотику:

$$\lambda_k = \lambda_k^{(0)} + O(1), k \in Z, \lambda_k^{(0)} = k\pi i. \quad (24)$$

В этом случае C_1 и C_2 совпадают, и из (19) имеем следующие собственные функции:

$$X_k(x) = C \cos k\pi x, k \in Z. \quad (25)$$

Так как при $k < 0$ собственные функции совпадают с собственными функциями при $k > 0$, то имеем:

Теорема 1. При условии (22) собственные значения и собственные функции задачи (16), (18) имеют вид:

$$\lambda_k = k\pi i, X_k(x) = \cos k\pi x + o(1), k \geq 0, \text{ т. е. } k \in N \cup \{0\}.$$

Если не имеет место условие (22), а выполняется условие

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_{10} & \beta_{11} \\ \alpha_{20} & \beta_{21} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \beta_{10} \\ \alpha_{21} & \beta_{20} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (26)$$

то главная часть $\Delta(\lambda)$ имеет вид:

$$\Delta(\lambda) = \lambda \Delta_2 \left\{ e^\lambda + \frac{2}{\Delta_2} \Delta_0 + e^{-\lambda} \right\}, \quad (27)$$

$$\text{где } \Delta_0 = \begin{vmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{10} & \beta_{11} \\ \beta_{20} & \beta_{21} \end{vmatrix}. \quad (27_1)$$

Собственные значения определяются следующим образом:

$$\lambda_k^{(l)} = \ln \frac{-\Delta_0 + (-1)^l \sqrt{\Delta_0^2 - \Delta_2^2}}{\Delta_2} + (-1)^l 2k\pi i + o(1), l = 1, 2, k \in Z. \quad (28)$$

Очевидно, что

$$\lambda_k^{(1)} = -\lambda_k^{(2)} + o(1). \quad (29)$$

Таким образом, учитывая собственные значения (28), из (19) с помощью системы (20) получаем следующие собственные функции:

$$X_k^{(1)}(x) = C_k^{(1)} \left[e^{-\lambda_k^{(1)} x} - \frac{(\alpha_{10} + \alpha_{11} \lambda_k^{(2)}) + (\beta_{10} + \beta_{11} \lambda_k^{(2)}) e^{\lambda_k^{(2)}}}{(\alpha_{10} + \alpha_{11} \lambda_k^{(1)}) + (\beta_{10} + \beta_{11} \lambda_k^{(1)}) e^{\lambda_k^{(1)}}} e^{\lambda_k^{(2)} x} \right]$$

и

$$X_k^{(2)}(x) = C_k^{(2)} \left[e^{-\lambda_k^{(2)} x} - \frac{(\alpha_{10} + \alpha_{11} \lambda_k^{(1)}) + (\beta_{10} + \beta_{11} \lambda_k^{(1)}) e^{\lambda_k^{(1)}}}{(\alpha_{10} + \alpha_{11} \lambda_k^{(2)}) + (\beta_{10} + \beta_{11} \lambda_k^{(2)}) e^{\lambda_k^{(2)}}} e^{\lambda_k^{(1)} x} \right],$$

или же

$$X_k^{(1)}(x) = \frac{C_k^{(1)}}{(\alpha_{10} + \alpha_{11} \lambda_k^{(1)}) + (\beta_{10} + \beta_{11} \lambda_k^{(1)}) e^{\lambda_k^{(1)}}} \left\{ e^{\lambda_k^{(2)} x} \left[(\alpha_{10} + \alpha_{11} \lambda_k^{(1)}) + (\beta_{10} + \beta_{11} \lambda_k^{(1)}) \right] - \left[(\alpha_{10} + \alpha_{11} \lambda_k^{(2)}) + (\beta_{10} + \beta_{11} \lambda_k^{(2)}) e^{\lambda_k^{(2)}} \right] e^{\lambda_k^{(1)} x} \right\}, \quad (30)$$

и

$$X_k^{(2)}(x) = \frac{C_k^{(2)}}{(\alpha_{10} + \alpha_{11} \lambda_k^{(2)}) + (\beta_{10} + \beta_{11} \lambda_k^{(2)}) e^{\lambda_k^{(2)}}} \left\{ e^{\lambda_k^{(1)} x} \left[(\alpha_{10} + \alpha_{11} \lambda_k^{(2)}) + (\beta_{10} + \beta_{11} \lambda_k^{(2)}) \right] - \left[(\alpha_{10} + \alpha_{11} \lambda_k^{(1)}) + (\beta_{10} + \beta_{11} \lambda_k^{(1)}) e^{\lambda_k^{(1)}} \right] e^{\lambda_k^{(2)} x} \right\}. \quad (31)$$

Как видно из (30) и (31), эти собственные функции являются линейно зависимыми, т. е.

$$X_k^{(2)}(x) = C_k X_k^{(1)}(x), k \in Z. \quad (32)$$

Таким образом, имеем:

Теорема 2. Если $\Delta_1 = 0, \Delta_2 \neq 0$, то собственные значения имеют вид:

$$\lambda_k = \ln \frac{-\Delta_0 + \sqrt{\Delta_0^2 - \Delta_2^2}}{\Delta_2} + 2k\pi i + o(1), k \in Z,$$

а собственные функции

$$X_k(x) = \left\{ e^{-\lambda_k x} \left[(\alpha_{10} + \alpha_{11}\lambda_k) + (\beta_{10} + \beta_{11}\lambda_k) \right] - \left[(\alpha_{10} + \alpha_{11}\lambda_k) + (\beta_{10} + \beta_{11}\lambda_k) e^{-\lambda_k} \right] e^{\lambda_k x} \right\}, k \in Z.$$

Теорема 3. Если $\Delta_1 = 0, \Delta_2 = 0$, но

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} \alpha_{10} & \alpha_{11} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_{10} & \beta_{11} \\ \beta_{20} & \beta_{21} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то рассмотренная задача не регулярна в смысле Биркгофа, Тамаркина, Расулова [8–10].

Теорема 4. Если $\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$ и

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_{10} & \beta_{10} \\ \alpha_{20} & \beta_{20} \end{vmatrix} \neq 0,$$

тогда опять такие собственные значения имеют вид: $\lambda_k = k\pi i, k \in N$, а собственные функции $X_k(x) = \sin k\pi x, k \in N$.

Теперь возвращаемся к уравнению (17). Определим общее решение этого уравнения. Применяя схему Эйлера, решение уравнения (17) будем искать в виде

$$T_k(t) = e^{\rho_k t}. \quad (33)$$

Тогда имеем следующее характеристическое уравнение (биквадратное):

$$\rho_k^4 + (b^2 c^2 - c^2 \lambda_k^2) \rho_k^2 - c^2 \omega_0^2 \lambda_k^2 = 0, \quad (34)$$

$$\rho_k^2 = \frac{c^2(\lambda_k^2 - b^2)}{2} \pm \sqrt{\frac{c^4(\lambda_k^2 - b^2)^2}{4} + c^2 \omega_0^2 \lambda_k^2},$$

т. е.

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_k^{(1)} = -c \sqrt{\frac{\lambda_k^2 - b^2}{2} - \sqrt{\frac{(\lambda_k^2 - b^2)^2}{4} + \frac{\omega_0^2}{c^2} \lambda_k^2}}, \\ \rho_k^{(2)} = -c \sqrt{\frac{\lambda_k^2 - b^2}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda_k^2 - b^2)^2}{4} + \frac{\omega_0^2}{c^2} \lambda_k^2}}, \\ \rho_k^{(3)} = c \sqrt{\frac{\lambda_k^2 - b^2}{2} - \sqrt{\frac{(\lambda_k^2 - b^2)^2}{4} + \frac{\omega_0^2}{c^2} \lambda_k^2}}, \\ \rho_k^{(4)} = c \sqrt{\frac{\lambda_k^2 - b^2}{2} + \sqrt{\frac{(\lambda_k^2 - b^2)^2}{4} + \frac{\omega_0^2}{c^2} \lambda_k^2}}, \end{array} \right. \quad (35)$$

Тогда общее решение уравнения (17) имеет вид:

$$T_k(t) = \sum_{l=1}^4 A_l e^{\rho_k^{(l)} t}, \quad (36)$$

где A_l – произвольные постоянные числа, $\rho_k^{(1)} = -\rho_k^{(3)}, \rho_k^{(2)} = -\rho_k^{(4)}$.

Рассмотрим случай, когда имеет место теорема 4, т. е. пусть $\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0, \Delta_3 \neq 0$.

Тогда $\lambda_k = k\pi i, X_k(x) = \sin k\pi x, k \in N$.

Тогда $\Delta(\lambda)$ имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = \Delta_3(e^\lambda - e^{-\lambda}), \quad (37)$$

а решение смешанной задачи будем искать в виде:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 A_{kl} e^{\rho_k^{(l)} t} \sin k\pi x, \quad (38)$$

где собственные значения и собственные функции даны в теореме 4.

Теперь определим произвольные постоянные A_{kl} . Для этого, учитывая начальные условия (2), имеем:

$$\left. \frac{\partial^s u(x, t)}{\partial t^s} \right|_{t=0} = \varphi_s(x), \quad s = \overline{0, 3}; \quad x \in [0, 1],$$

т. е.

$$\varphi_s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^4 A_{kl} \rho_k^{(l)s} \sin k\pi x, \quad s = \overline{0, 3}, \quad (39)$$

или же

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_s(x) \sin m\pi x \, dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^4 A_{kl} \rho_k^{(l)s} \right) \int_0^1 \sin k\pi x \sin m\pi x \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^4 A_{ml} \rho_m^{(l)s}, \quad s = \overline{0, 3}. \end{aligned} \quad (40)$$

Таким образом, приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} A_{m1} + A_{m2} + A_{m2} + A_{m4} = 2 \int_0^1 \varphi_0(x) \sin m\pi x \, dx, \\ A_{m1} \rho_m^{(1)} + A_{m2} \rho_m^{(2)} + A_{m3} \rho_m^{(3)} + A_{m4} \rho_m^{(4)} = 2 \int_0^1 \varphi_1(x) \sin m\pi x \, dx, \\ A_{m1} \rho_m^{(1)^2} + A_{m2} \rho_m^{(2)^2} + A_{m3} \rho_m^{(3)^2} + A_{m4} \rho_m^{(4)^2} = 2 \int_0^1 \varphi_2(x) \sin m\pi x \, dx, \\ A_{m1} \rho_m^{(1)^3} + A_{m2} \rho_m^{(2)^3} + A_{m3} \rho_m^{(3)^3} + A_{m4} \rho_m^{(4)^3} = 2 \int_0^1 \varphi_3(x) \sin m\pi x \, dx, \end{cases} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\rho_m^{(3)} & -\rho_m^{(4)} & \rho_m^{(3)} & \rho_m^{(4)} \\ \rho_m^{(3)^2} & \rho_m^{(4)^2} & \rho_m^{(3)^2} & \rho_m^{(4)^2} \\ -\rho_m^{(3)^3} & -\rho_m^{(4)^3} & \rho_m^{(3)^3} & \rho_m^{(4)^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \rho_m^{(3)} & \rho_m^{(4)} \\ 2\rho_m^{(3)^2} & 2\rho_m^{(4)^2} & \rho_m^{(3)^2} & \rho_m^{(4)^2} \\ 0 & 0 & \rho_m^{(3)^3} & \rho_m^{(4)^3} \end{vmatrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} \rho_m^{(3)} & \rho_m^{(4)} \\ \rho_m^{(3)^3} & \rho_m^{(4)^3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2\rho_m^{(3)^2} & 2\rho_m^{(4)^2} \end{vmatrix} = -4 \rho_m^{(3)} \rho_m^{(4)} \left(\rho_m^{(4)^2} - \rho_m^{(3)^2} \right)^2 \neq 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Тогда $A_{ml}, l = \overline{1, 4}$ определяются из системы (41), и, подставляя их в (38), определяем решения заданной смешанной задачи при условиях теоремы 4.

Что касается условия гладкости начальных данных $\varphi_s(x), s = \overline{0, 3}, x \in [0, 1]$ для сходимости как ряда (38), так и его производных, обеспечивается с помощью интегрирования по частям правых частей системы (41)

Замечание 1. Как видно из (35), для $\rho_k^{(l)}$ при больших значениях k имеем асимптотические представления следующих видов:

$$\begin{aligned} \rho_k^{(3)} &= -\rho_k^{(1)} = \omega_0 i + \frac{\omega_0}{2c^2} (b^2 c^2 - \omega_0^2) \frac{i}{\lambda_k^2} + O(\lambda_k^{-4}), \\ \rho_k^{(4)} &= -\rho_k^{(2)} = c \lambda_k + \frac{\omega_0^2 - b^2 c^2}{2c} \cdot \frac{1}{\lambda_k} + \frac{4\omega_0^2(b^2 c^2 - \omega_0^2) - (\omega_0^2 - b^2 c^2)}{8c^3} \cdot \frac{1}{\lambda_k^3} + O(\lambda_k^{-5}). \end{aligned}$$

Замечание 2. Неизвестные коэффициенты A_{kl} в формуле (38), которые определяются из системы (41), в своих значениях содержат величину Δ , определяемую из формулы (42), в которую входят λ_k^{-s} , т. е. k^s .

Теорема 5. Пусть где c, b и ω_0 – заданные положительные постоянные числа, α_{kj}, β_{kj} при $k=1,2, m=0,1$; вспомогательные постоянные числа, $\gamma_k(t)$, $k=1,2, t \geq 0$ – непрерывные функции, $\Delta_0 = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, $\Delta_3 \neq 0$, $\varphi_k(0) = \varphi_k(1) = \varphi_k''(0) = \varphi_k''(1) = 0$, $\varphi_k(x) \in C^4(0,1)$, $k=0,1,2$, $\varphi_3(0) = \varphi_3(1) = 0$, $\varphi_3(x) \in C^{(2)}(0,1)$. Тогда существует единственное решение смешанной задачи (1)–(3), представленное в виде (38).

Действительно, учитывая асимптотическое представление, данные в замечании 1 для сходимости четырехкратных производных по t и двукратных производных по x коэффициенты A_{mi} , определенные из алгебраических систем (41), должны иметь асимптотики $A_{m1} = O(m^{-4})$, $A_{m2} = O(m^{-6})$, $A_{m3} = O(m^{-4})$, $A_{m4} = O(m^{-6})$.

Литература

1. Соболев С.Л. Уравнение математической физики. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 444 с.
2. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, – М.: Наука, 1981. – 512 с.
3. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 832 с.
4. Петровский И.Г., Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: ГИФМЛ, 1966. – 352 с.
5. Jahanshahi M., Aliyev N. Determining of an analytic function on its analytic domain by Cauchy-Riemann equation with special kind of boundary conditions. (English) Southeast Asian Bulletin Mathematics. – 2004. – Vol. 28, № 1. – P. 33–39.
6. Aliyev N., Jahanshahi M. Solution of Poisson's equation with global, local and non-local boundary conditions. (English) International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. – 2002. – Vol. 33, № 2. – P. 241–247.
7. Aliev N.A., Abbasova A.Kh., Zeynalov R.M. Non-local boundary condition Steklov problem for a laplace equation in bounded domain (English) Science // Journal of Applied Mathematics and Statistics, New York, USA. – 2013. – Vol. 1, № 1. – P. 1–6.
8. Birkhoff G.D. On the asymptotic character of the solution of certain linear differential equations containing a parametr // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – Vol. 9. – P. 219–231.
9. Тамаркин Я.Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. – Петроград, 1917. – 280 с.
10. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла. – М.: Наука, 1964. – 340 с.
11. Алиев Н.А., Велиева С.Р. Смешанная задача для одного уравнения с частными производными четвертого порядка, Вестник Дагестанского государственного университета. Сер. 1. – 2018. – Т. 33, вып. 3. – С. 62–66.

Поступила в редакцию 16 апреля 2019 г.

UDC 517.946

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-2-55-62

The solution of a mixed problem for the equation of motion compressible exponentially stratified fluid

S.R. Valiyeva

Baku State University; Azerbaijan AZ1148, Baku, academ. Zahid Khalilov st., 23; sevinj_veliyeva@mail.ru

The paper presents a mixed problem for the process of moving a compressible exponentially stratified fluid that has a mathematical model of a fourth-order equation with constant coefficients in partial differential.

In the particular case using factorization method, the equation under consideration is reduced to a system of two partial differential equations of the second order (one of which contains derivatives in only of one variable). In general, the method of separation of variables is applied.

Keywords: the process of moving a compressible exponentially stratified fluid, a fourth-order linear partial differential equation with constant coefficients, factorization method, separation of variables, Fourier method.

Received 16 April, 2019