МАТЕМАТИКА

УДК 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-2-50-54

М.С. Алиев

Обобщение теоремы С. Карлина об «ужах»

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; aliev.mingazhudin@yandex.ru

В данной статье системы непрерывных и линейно независимых функций разбиваются на «классы k » ($1 \leq k \leq n$). Установлены некоторые свойства этих систем. Теорема С. Карлина о существовании полиномов по системе Чебышева ($k = n$), которые могут проползти между двумя функциями, попеременно касаясь их, обобщается на случай приближения полиномами по системе функций «класса k » ($1 \leq k \leq n - 1$).

Ключевые слова: функция, альтернанс, норма, ранг матрицы, определитель, минор, полином.

На системе точек $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{r+1} \leq b$ функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ линейно зависимы в узком смысле, если матрица

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_{r+1}) & \varphi_2(x_{r+1}) & \dots & \varphi_n(x_{r+1}) \end{vmatrix} \quad (1)$$

имеет ранг r и существуют отличные от нуля числа $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r+1}$, такие, что $\sum_{j=1}^{r+1} \mu_j \varphi_i(x_j) = 0, i = 1, 2, \dots, n, (0 \leq r \leq n)$.

Определение. Систему непрерывных и линейно независимых на $[a, b]$ функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ назовем системой типа « k » ($0 \leq k \leq n$), если:

1) для произвольной системы точек $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{r+1} \leq b$, на которой функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ линейно зависимы в узком смысле, в соответствующей матрице (1) $r \geq k$;

2) в последовательности $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r+1}$ имеется не менее k перемен знака, причем хотя бы для одной системы точек в указанной последовательности будет точно k перемен знака.

Лемма 1. Пусть на множестве точек $x_1 < x_2 < \dots < x_{r+1}$ функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ линейно зависимы в узком смысле. Тогда алгебраические дополнения элементов любого столбца произвольного минора $r + 1$ порядка матрицы (1) пропорциональны числам $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r+1}$.

Доказательство. Пусть $\{(-1)^j \Delta_j^r\}_{j=1}^{r+1}$ – алгебраические дополнения, расположенные по любым r столбцам матрицы (1). Так как ранг матрицы (1) равен r , то $\sum_{j=1}^{r+1} (-1)^j \Delta_j^r \varphi_i(x_j) = 0, i = 1, 2, \dots, n$. Известно [2, упр. 746], что если ранг однородной системы линейных уравнений на единицу меньше числа уравнений, то любые два решения этой системы пропорциональны. Итак, пусть $(-1)^j \Delta_j^r = l \mu_j$. Если хотя бы один из миноров $\Delta_j^r = 0$, то все миноры по этим столбцам равны нулю. Отличными от нуля

могут быть миноры по нескольким наборам по r столбцам. Для определенности предположим, что номерами этих столбцов будут $t_1 < t_2 < \dots < t_r$.

Лемма 2. Если на множестве точек $x_1 < x_2 < \dots < x_{r+1}$ функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ линейно зависимы в узком смысле и $\varphi_1(x_1) \neq 0$, то первый столбец матрицы (1) содержится по крайней мере среди одной группы из r столбцов, по которым расположены отличные от нуля миноры.

Доказательство. Допустим противное. Все миноры порядка r , содержащие первый столбец, равны нулю. По определению типа существует набор из r столбцов $2 \leq l_1 < l_2 < \dots < l_r \leq n$, по которым все миноры порядка r

$$D \begin{pmatrix} \varphi_{l_1} & \dots & \varphi_{l_r} \\ x_1, \dots, x_{j-1}, & x_{j+1}, \dots, & x_{r+1} \end{pmatrix} \neq 0, j = 1, 2, \dots, r+1. \quad (2)$$

По допущению и лемме 1

$$(3) \quad D \begin{pmatrix} \varphi_1 \varphi_{l_1} \dots \varphi_{l_{p-1}} \varphi_{l_{p+1}} & \dots & \varphi_{l_r} \\ x_1, \dots, x_{j-1} x_{j+1} & \dots & x_{r+1} \end{pmatrix} = 0, p = 1, 2, \dots, r, j = 1, \dots, r+1.$$

Из равенства при $p = 1$ имеем $\alpha_1 \varphi_1(x_j) + \sum_{s=2}^r \alpha_s \varphi_{l_s}(x_j) = 0$.

$\alpha_1 \neq 0$, ибо иначе определители (2) равнялись бы нулю. Находим

$$\varphi_1(x_j) = -\sum_{s=2}^r \frac{\alpha_s}{\alpha_1} \varphi_{l_s}(x_j) \text{ и подставляем в (3). Из равенства}$$

$$-\frac{\alpha_p}{\alpha_1} D \begin{pmatrix} \varphi_p \varphi_{l_1} \dots \varphi_{l_{p-1}} \varphi_{l_{p+1}} & \dots & \varphi_{l_r} \\ x_1, \dots, x_{j-1} x_{j+1} & \dots & x_{r+1} \end{pmatrix} = 0$$

в силу (2) получим $\alpha_p = 0, p = 2, 3, \dots, r$; что противоречит $\varphi_1(x_1) \neq 0$.

Пусть $\varphi_1(b) \neq 0$, введем обозначения

$$u_2(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(b) & \varphi_2(b) \\ \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \end{vmatrix}, \dots, u_n(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(b) & \varphi_n(b) \\ \varphi_1(x) & \varphi_n(x) \end{vmatrix}$$

$$\text{Лемма 3. } D \begin{pmatrix} u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_r} \\ x_1, x_2, \dots, x_r \end{pmatrix} = [\varphi_1(b)]^{r-1} D \begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_{t_1}, \varphi_{t_2}, \dots, \varphi_{t_r} \\ x_1, x_2, \dots, x_r, b \end{pmatrix},$$

$$1 \leq r \leq n, 2 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_r \leq n.$$

Для доказательства выпишем общую строку определителя слева

$$|\varphi_1(x_j) \varphi_{t_1}(b) - \varphi_1(b) \varphi_{t_1}(x_j) \dots \varphi_1(x_j) \varphi_{t_r}(b) - \varphi_1(b) \varphi_{t_r}(x_j)|_{j=1}^r$$

Все слагаемые разложения определителя, содержащие $\varphi_{t_k}(b) \varphi_{t_i}(x_j)$, равны нулю, как определители с двумя первыми столбцами. Далее имеем

$$\sum_{k=1}^r (-\varphi_1(b))^{r-1} \varphi_k(b) D \begin{pmatrix} \varphi_{t_1}, \dots, \varphi_{t_{k-1}} \varphi_1, \varphi_{t_{k+1}}, \dots, \varphi_{t_r} \\ x_1, x_2, \dots, x_r, b \end{pmatrix} + (-\varphi_1(b))^r D \begin{pmatrix} \varphi_{t_1}, \varphi_{t_2}, \dots, \varphi_{t_r} \\ x_1, x_2, \dots, x_r, b \end{pmatrix} = (\varphi_1(b))^{r-1} D \begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_{t_1}, \varphi_{t_2}, \dots, \varphi_{t_r} \\ x_1, x_2, \dots, x_r, b \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем будем предполагать $\sum_{i=1}^n (\varphi_i(b))^2 \neq 0$, что выполняется для систем типа $k \geq 1$. Допустим, $\varphi_1(b) \neq 0$ и $0 < \beta < b - a$.

Лемма 4. Если система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ типа k ($1 \leq k \leq n$) на $[a, b]$ и $\varphi_1(b) \neq 0$, то тип системы функций $\{u_i(x)\}_{i=2}^n$ на $[a, b - \beta]$ равен $k - 1$ или k .

Доказательство. По лемме 3

$$D \begin{pmatrix} u_2, u_3, \dots, u_n \\ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \end{pmatrix} = [\varphi_1(b)]^{n-2} D \begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n \\ x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, b \end{pmatrix}.$$

При $\varphi_1(b) \neq 0$ по лемме 2 существуют $r + 1$ столбца $1, t_1, t_2, \dots, t_r$, по которым миноры $\Delta_j^{r+1}(\varphi) = (-1)^{j+1} D \begin{pmatrix} \varphi_1, \varphi_{t_1}, \dots, \varphi_{t_r} \\ x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{r+2} \end{pmatrix} \neq 0$

$j = 1, 2, \dots, r + 2, x_{r+2} = b$. Из равенства

$$\Delta_j^r(u) = (-1)^{j+1} D \begin{pmatrix} u_{t_1}, u_{t_2}, \dots, u_{t_r} \\ x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{r+1} \end{pmatrix} = [\varphi_1(b)]^{r-1} \Delta_j^{r+1}(\varphi).$$

Получаем, что, если на множестве точек $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{r+1} < x_{r+2} = b$ функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ линейно зависимы в узком смысле, то функции $(u_i(x))_{i=2}^n$ также линейно зависимы в узком смысле на множестве $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{r+1} \leq b - \beta$. Таким образом число точек может уменьшиться на единицу. Что касается перемен знака, то при $\Delta_{r+1}^{r+1}(\varphi)\Delta_{r+2}^{r+1}(\varphi) > 0$ в последовательностях $(\Delta_j^{r+1}(\varphi))_{j=1}^{r+2}$ и $(\Delta_j^r(u))_{j=1}^{r+1}$ будет одинаковое количество перемен знака, а при $\Delta_{r+1}^{r+1}(\varphi)\Delta_{r+2}^{r+1}(\varphi) < 0$ во второй последовательности на единицу меньше.

Пример. Тип функций $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(x) = x - 1$ на $[-1, 1]$ равен единице, функция $u_1(x) = 1 - x$ типа единица на $[-1, 1 - \beta]$.

Придерживаясь терминологии монографии [1], рассмотрим пространство $B(\phi_+, \phi_-)$ непрерывных функций с несимметричной нормой

$\|P\|_\phi = \max_{a \leq x \leq b} \left\{ \frac{P_+(x)}{\phi_+(x)} + \frac{P_-(x)}{\phi_-(x)} \right\}$, где $\phi_+(x), \phi_-(x)$ строго положительные и непрерывные на $[a, b]$ функции, а $P_\pm(x) = \frac{1}{2}(|P(x)| \pm P(x))$. При приближении функций по норме пространства $B(\phi_+, \phi_-)$ остается справедливой теорема [4]:

Теорема 1. Для того чтобы полином $P(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$, наименее уклоняющийся в метрике пространства $B(\phi_+, \phi_-)$ от непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, обладал не менее $k + 1$ точечным альтернансом, причем хотя бы для одной функции $f(x)$, по крайней мере, один из наименее уклоняющихся от нее полиномов обладал точно $k + 1$ точечным альтернансом, необходимо и достаточно, чтобы система $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ была типа k ($1 \leq k \leq n$) на $[a, b]$.

Достаточность доказывается дословно, путем повторения доказательства обобщения теоремы Ремеза [1, с. 478] на случай приближения в кососимметричной метрике.

Необходимость. Пусть каждый наименее уклоняющийся от функции полином обладает не менее $k + 1$ точечным альтернансом, тем не менее, тип системы равен $m \neq k$. По определению типа существуют минимальное количество $r + 1$ точек $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{r+1} \leq b$, по которым все определители $r + 1$ порядка матрицы $\{\varphi_i(x_j)\}_{i=1 \dots n}^{j=1 \dots r+1}$ равны нулю. Хотя бы в одном таком определителе миноры

$\Delta_j^r = (-1)^{j+1} D \begin{pmatrix} \varphi_{t_1} & \dots & \varphi_{t_r} \\ x_1 \dots x_{j-1} & x_{j+1} \dots & x_{r+1} \end{pmatrix} \neq 0$ и в последовательности $\{\Delta_j^r\}_{j=1}^{r+1}$ будет точно m перемен знака. Положим

$$f(x_j) = \begin{cases} \phi_+(x_j), & \text{при } \Delta_j^r > 0, \\ \phi_-(x_j), & \text{при } \Delta_j^r < 0, \end{cases}$$

$f(a) = f(b) = 0$, линейна на остальных промежутках.

Для любого полинома $P(c, x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$ определитель

$$0 = \begin{vmatrix} \varphi_{t_1}(x_1) & \dots & \varphi_{t_r}(x_1) & P(c, x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{t_1}(x_{r+1}) & \dots & \varphi_{t_r}(x_{r+1}) & P(c, x_{r+1}) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{r+1} \Delta_j^r P(c, x_j), \quad (3)$$

с одной стороны, равен нулю, так как на этих точках наша система функций линейно зависима в узком смысле, с другой стороны равен указанной сумме. Отклонение полинома $P(c, x) \equiv 0$ от $f(x)$ в метрике пространства $B(\phi_+, \phi_-)$ равно единице. Допустим противное – наилучшее приближение

$$L = \max \left\{ \frac{[f(x) - P(c, x)]_+}{\phi_+(x)} + \frac{[f(x) - P(c, x)]_-}{\phi_-(x)} \right\} < 1,$$

тогда в каждой точке x_j $\text{sign } P(c, x_j) = \text{sign } f(x_j) = \text{sign } \Delta_j^r \neq 0$, что

противоречит (3). Следовательно, одним из полиномов наилучшего приближения будет $P(c, x) \equiv 0$ с $m + 1$ точечным альтернансом. Получается противоречие: при $m \leq k \leq n$ число точек альтернанса меньше $k + 1$, а при $m > k$ – нет функции наименее уклоняющийся полином от которой обладал бы точно $k + 1$ точечным альтернансом.

Теорема 2. Пусть для непрерывных на $[a, b]$ функций $f(x) > g(x)$ существует полином $h(x)$ по системе функций $\{u_i(x)\}_{i=1}^n$ типа κ ($1 \leq \kappa \leq n$), такой, что $g(x) < h(x) < f(x)$ на $[a, b]$. Тогда:

а) существует полином $P_0(x)$, удовлетворяющий условиям:

$$1) \quad g(x) \leq P_0(x) \leq f(x), a \leq x \leq b$$

2) найдутся точки $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{r+1} \leq b$, в которых $P_0(x_i)$ совпадает с $f(x_i)$ или $g(x_i)$, последовательно чередуясь не менее $\kappa - 1$ раз, при этом $P_0(x_{r+1}) = f(x_{r+1})$.

б) существует полином $P_1(x)$, удовлетворяющий условиям 1) и 2), только $P_1(x_{r+1}) = g(x_{r+1})$.

Доказательство. Пусть $h(x) \equiv 0$, положим $\phi_+(x) = f(x) - h(x) > 0$, $-\phi_-(x) = g(x) - h(x) < 0$. Обозначим через Π_0 и Π_1 множества Π полиномов по системе функций $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)\}$, принимающих в точке $x = b$ значения 0 и 1. Базисом подпространства Π_0 будет $u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x)$ из леммы 3. Если добавить к ним функцию $\Phi_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(b)}$, получим базис подпространства Π_1 . Так как $u_i(b) = 0$, $i = 2, \dots, n$ – интервал $[a, b]$ заменим на интервал $[a, \gamma]$ ($a < \gamma < b$).

Рассмотрим задачу о нахождении полинома из Π_1 , наименее уклоняющегося от нуля в метрике пространства $B(\phi_+, \phi_-)$ на $[a, \gamma]$. Всякий полином из Π_1 представим в виде $\Phi_1(x) - \sum_{i=2}^n \alpha_i u_i(x) = \Phi_1(x) - Q(x)$, $Q(x) \in \Pi_0$.

Обозначим через $P_\gamma(x) = \sum_{i=2}^n \alpha_i(\gamma) u_i(x)$ один из полиномов, на котором достигается минимум в выражении $\frac{1}{L_\gamma} = \min_{\alpha_i} \|\Phi_1(x) - \sum_{i=2}^n \alpha_i u_i(x)\|_\phi^\gamma$. Тогда $-\phi_-(x) \leq L_\gamma P_\gamma(x) \leq \phi_+(x)$ и по теореме 1 найдутся точки $x_1(\gamma) < x_2(\gamma) < \dots < x_{r_\gamma+1}(\gamma)$, в которых $L_\gamma P_\gamma(x_j(\gamma)) = \phi_+(x_j(\gamma))$ или $\phi_-(x_j(\gamma))$ в зависимости от знака $(-1)^j \Delta_j^{r_\gamma}(u)$. В этой последовательности меняется знак не менее $\kappa - 1$ раз, то есть полином $L_\gamma P_\gamma(x(\gamma))$ касается попеременно $\phi_+(x)$ и $\phi_-(x)$ не менее κ раз. Из-за условия $\Phi_1(b) = 1, L_\gamma P_\gamma(x_{r_\gamma+1}(\gamma)) = \phi_+(x_{r_\gamma+1}(\gamma))$.

Множество полиномов $L_\gamma P_\gamma(x)$, заключенных между двумя непрерывными функциями $\phi_+(x)$ и $-\phi_-(x)$ компактно. В силу этого при $\gamma \rightarrow b - 0$ имеем $L_\gamma P_\gamma(x) \rightarrow L_b P_b(x) = P_0(x)$, $x_j(\gamma) \rightarrow x_b, r_\gamma \rightarrow r_b$. Полином $P_0(x)$ касается функций $\phi_+(x)$ и $-\phi_-(x)$ не менее $r_b + 1$ раз, меняя эти функции не менее $\kappa - 1$ раз и $L_b P_b(x_{r_b+1}(\gamma)) = \phi_+(x_{r_b+1}(\gamma))$. Многочлен $P_1(x)$ строится таким же образом, заменив $\Phi_1(x)$ на $\Phi_2(x) = -\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_1(b)}$.

Пример. $\varphi_1(x) = x^2, \varphi_2(x) = x - 1$ на $[-1, 1]$, $u_2(x) = 1 - x, \phi_+(x) \equiv 5$

$-\phi_-(x) \equiv -1$. $L = 5, P_0(x) = 5 \left[x^2 - 2 \left(-1 + \sqrt{\frac{6}{5}} \right) (1 - x) \right]$ касается в точках

$$x_1 = 1 - \sqrt{\frac{6}{5}}, x_2 = 1.$$

Литература

1. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные. – М.: Наука, 1973.
2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. – М., 1962.
3. Зуховицкий С.И. О приближении действительных функций в смысле П.Л. Чебышева // УМН. – 1956. – Т. 11, вып. 2.
4. Алиев М.С. О наилучшем приближении непрерывных функций в метрике $C_{[a,b]}$ обобщенными полиномами // Доклад АН СССР, 1968. – Т. 179, № 2. – С. 257–259.
5. Алиев М.С. О приближении функций слабой системой Чебышева // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2011. – Вып. 6. – С. 120–124.
6. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценка наилучших приближений ограниченных функций со знакочувствительным весом // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2015. – Вып. 6.
7. Алиев М.С. Свойства полиномов по системе функций // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2016. – Вып. 2. – С. 41–45.
8. Алиев М.С., Бру Манмч Г.Й. Об определителях Вандермонда с двумя вычеркнутыми степенями // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2017. – Вып. 3. – С. 67–73.
9. Алиев М.С. О наилучшем приближении в пространстве $S_{[a,b]}$ // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2018. – Вып. 2. – С. 17–22.
10. Алиев М.С. Об одной системе Маркова // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2011. – Вып. 4. – С. 80–83.
11. Загиров Н.Ш., Пашаева З.Ш. Оценка значений многочленов внутри отрезка // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2012. – Вып. 6. – С. 20–24.
12. Рамазанов А.-Р. К. Характеризация полинома наилучшего приближения со знакочувствительным весом // Мат. сборник. – 2005. – Т. 196, № 3. – С. 89–118.

Поступила в редакцию 13 марта 2019 г.

UDC 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-2-50-54

Generalization of the Snake Theorem of Karlin

M.S. Aliev

Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; aliev.mingazhudin@yandex.ru

The article studies the systems of continuous and linearly independent functions which are divided into "classes K " ($1 \leq K \leq n$). Some properties of these systems are established. The theorem of S. Karlin on the existence of polynomials in the Chebyshev system ($K = n$), which can creep between two functions, alternately touching them, is generalized to the case of approximation by polynomials in the system of functions of "class K " ($1 \leq k \leq n - 1$).

Keywords: *function, alternance, norm, rank of matrix, determinant, minor, polynomial.*

Received 13 March, 2019