УДК 517.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-1-61-66

Н.Ш. Загиров, Т.Ю. Гаджиева

Оценки постоянной Маркова в весовых пространствах

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; nizam_zagirov@mail.ru, tamila.usup@mail.ru

Работа посвящена нахождению оценок постоянной Маркова в весовом пространстве множества всех вещественных измеримых функций, квадраты которых с заданным весом суммируемы на некотором отрезке. Установлены общие результаты для любого веса, после чего отдельно изучаются случаи весов Лагерра и Эрмита.

В случае пространства непрерывных на отрезке функций, А.А. Марков нашел значение этой постоянной. Данные оценки в различных пространствах были найдены С.Б. Конягиным и Н.К. Бари.

В статье установлено выражение для постоянной Маркова в случае производной произвольного порядка, предложены некоторые случаи точного вычисления постоянной Маркова в весовом пространстве Лагерра и Эрмита.

Ключевые слова: *оценки постоянной Маркова, ортонормированный многочлен, весовая функция.*

Пусть X – линейное нормированное пространство, содержащее Π_n – множество всех многочленов степени не выше чем n .

Постоянной Маркова называется число

$$M_{n,k} = M_{n,k}(X) = \sup \left\{ \frac{\|f^{(k)}\|}{\|f\|} : f \in \Pi_n, f \neq 0 \right\}, 1 \leq k \leq n, n = 1, 2, \dots$$

В работах [1; 2] были найдены значения постоянной Маркова в случае $X = C[-1,1]$. В случае $X = L_1$ оценки $M_{n,k}$ найдены в [3], а в случае $L_p, p > 1$ их установила Н.К. Бари [4].

В работе [5] предложен численный алгоритм вычисления $M_{n,1}$ в весовых пространствах.

Смежные вопросы были разобраны в работах [6–8].

Основной целью настоящей статьи является получение алгоритмов численного нахождения и оценок $M_{n,k}$ в весовом пространстве Лагерра (в случае $\rho(x) = e^{-x} \cdot x^\alpha$, $\alpha > -1$ на полуоси $[0, \infty)$) и весовом пространстве Эрмита (в случае $\rho(x) = e^{-x^2}$). Случай весового пространства Якоби был рассмотрен нами ранее [9].

Обозначим через $\{P_n\}$ систему ортонормированных по весу ρ многочленов. В статье [9] показано, что значение $M_{n,k}^2$ совпадает с наибольшим собственным значением $\lambda_{\max}$ специальной матрицы B , получаемой следующим образом.

Шаг 1. Построить таблицу коэффициентов $c_{ij}^{(k)} = c_{ij}^{(k)}$, $j = k, \dots, n$, $i = 1, \dots, j - k + 1$

$$c_{ij}^{(k)} = \int \rho(t) P_j^{(k)}(t) P_{i-1}(t) dt, \quad (1)$$

где $P_j^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{j-k+1} c_{ij}^{(k)} P_{i-1}(t)$.

Шаг 2. Подсчитать элементы матрицы B :

$$B_{ij} = \sum_{i=1}^{j-k+1} c_{ij} c_{iv}, \quad v = j, \dots, n, \quad j = k, \dots, n.$$

Шаг 3. По симметрии записать остальные элементы матрицы B .

Для определения значения $\lambda_{\max}$ к полученной симметричной матрице B $n - k + 1$ -го порядка можно применить один из методов численного нахождения наибольшего собственного значения. Возникает проблема нахождения коэффициентов Фурье $c_{ij}^{(k)}$.

Разберем случай весового пространства Лагерра $\rho(x) = x^\alpha \cdot e^{-x}$, $\alpha > -1$.

Пусть $h_{n,\alpha} = \frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{n!}$, $L_{n,\alpha}(x) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{\rho(x)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^n \rho(x))$.

Многочлены $L_{n,\alpha}(x)$ (см. [7]) ортогональны по весу ρ на $[0, \infty)$ и

$$\int_0^\infty \rho(t) \cdot L_{n,\alpha}^2(t) dt = h_{n,\alpha}.$$

Нам понадобятся известные [7] соотношения

$$\begin{aligned} (L_{n,\alpha}(x))' &= -L_{n-1,\alpha+1}(x), \\ L_{n,\alpha+1}(x) &= L_{n,\alpha}(x) + L_{n-1,\alpha+1}(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Так как $L_{0,\alpha}(x) = 1$, то отсюда можно вывести, что

$$L_{m,\alpha+1}(x) = \sum_{v=0}^m L_{v,\alpha}(x). \quad (3)$$

Теорема 1. Для случая веса Лагерра коэффициенты $c_{ij}^{(k)}$ имеют вид

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(k)} &= \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \cdot \frac{(j-i)!}{(j-i-k+1)!} \cdot \sqrt{\frac{h_{i-1,\alpha}}{h_{j,\alpha}}}, \\ i &= 1, \dots, j - k + v, \quad j = k, \dots, n. \end{aligned}$$

Доказательство.

Из определения $c_{ij}^{(k)}$ (см. п. 1) следует, что ($i = 1, \dots, j - k + 1$)

$$c_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{h_{j,\alpha} \cdot h_{i-1,\alpha}}} \cdot \int_0^\infty \rho(t) \cdot L_{j,\alpha}^{(k)}(t) \cdot L_{i-1,\alpha}(t) dt,$$

$$j = k, \dots, n, i = 1, \dots, j - k + v.$$

Из формулы (2) вытекает

$$L_{j,\alpha}^{(k)}(t) = (-1)^k L_{j-k,\alpha+k}(t). \quad (4)$$

Лемма. Для любого k верно равенство

$$L_{m,\alpha+k}(t) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{v=0}^m (m-v+1) \cdot \dots \cdot (m-v+k-1) \cdot L_{v,\alpha}(t).$$

Доказываем лемму индукцией по k . Если $k=1$, утверждение леммы совпадает с равенством (3). Пусть равенство верно для $k \leq n$. Если $k = n+1$, то

$$\begin{aligned} L_{m,\alpha+n+1}(t) &= L_{m,\alpha+1+n}(t) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{v=0}^m (m-v+1) \cdot \dots \cdot (m-v+n-1) \cdot L_{v,\alpha+1}(t) = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{v=0}^m (m-v+1) \cdot \dots \cdot (m-v+n-1) \cdot \sum_{i=0}^v L_{i,\alpha}(t) = \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{i=0}^m L_{i,\alpha}(t) \cdot \sum_{v=i}^m (m-v+1) \cdot \dots \cdot (m-v+n-1). \end{aligned}$$

Пусть

$$s = \sum_{v=i}^m (m-v+1) \cdot \dots \cdot (m-v+n-1).$$

Так как

$$s = \sum_{x=1}^{m-i+1} x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-2)$$

$$\text{и } \sum_{x=1}^N x \cdot (x+1) \cdot \dots \cdot (x+n-2) = \frac{N \cdot (N+1) \cdot \dots \cdot (N+n-1)}{n} \quad ([10, \text{с. 250}]),$$

то

$$s = \frac{(m-i+1) \cdot \dots \cdot (m-i+n)}{n},$$

$$L_{m,\alpha+n+1}(t) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^m (m-i+1) \cdot \dots \cdot (m-i+n) \cdot L_{i,\alpha}(t).$$

Лемма доказана. Отсюда и из равенства (4) следует, что

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \rho(t) \cdot L_{j,\alpha}^{(k)}(t) \cdot L_{i-1}(t) dt &= (-1)^k \cdot \frac{1}{(k-1)!} \cdot \sum_{v=0}^{j-k} (j-k-v+1) \cdot \dots \cdot (j-v-1) \cdot \int_0^\infty \rho(t) \cdot L_{v,\alpha}(t) \cdot L_{i-1}(t) dt = \\ &= \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \cdot (j-k-i+2) \cdot \dots \cdot (j-i) \cdot h_{i-1,\alpha}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$c_{ij}^{(k)} = \frac{(-1)^k}{(k-1)!} \cdot \sqrt{\frac{h_{i-1,\alpha}}{h_{j,\alpha}}} \cdot \frac{(j-i)!}{(j-k-i+1)!}.$$

При $k=1$ это равенство установлено в [5].

Рассмотрим далее случай, когда $\rho(x) = e^{-x^2}$ – вес Эрмита.

Многочлены

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\rho(x)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} \rho(x)$$

ортogonalны по весу ρ на промежутке $(-\infty, \infty)$ [см. 10, с. 115].

Известно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx = \sqrt{\pi} \cdot 2^n \cdot n!,$$

$$H_0 = 1, \quad H'_n(x) = 2n \cdot H_{n-1}(x).$$

Пусть $h_n = \sqrt{\pi} \cdot 2^n \cdot n!$.

Теорема 2. Для случая веса Эрмита коэффициенты $c_{ij}^{(k)}$ имеют вид

$$c_{ij}^{(k)} = 0, \text{ если } i=1, \dots, j-k \text{ и } c_{j-k+1,j}^{(k)} = \sqrt{\frac{j!}{(j-k)!}} \cdot 2^k, \quad j=k, \dots, n.$$

Доказательство.

В этом случае

$$c_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{h_j \cdot h_{i-1}}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) \cdot H_j^{(k)}(t) \cdot H_{i-1}(t) dt, \quad j=k, \dots, n; \quad i=1, \dots, j-k+1.$$

Так как

$$H_j^{(k)}(x) = 2j \cdot 2(j-1) \cdot \dots \cdot 2(j-k+1) \cdot H_{j-k}(x),$$

то

$$c_{ij}^{(k)} = \frac{2^k}{\sqrt{h_j \cdot h_{i-1}}} \cdot \frac{j!}{(j-k)!} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \rho(t) \cdot H_{j-k}(t) \cdot H_{i-1}(t) dt.$$

Следовательно, $c_{ij}^{(k)} = 0$, если $i \leq j-k$,

$$c_{j-k+1,j}^{(k)} = \sqrt{\frac{h_{j-k}}{h_j}} \cdot 2^k \cdot \frac{j!}{(j-k)!}$$

или

$$c_{j-k+1,j}^{(k)} = \sqrt{\frac{j!}{(j-k)!}} \cdot 2^k.$$

Для веса Эрмита постоянная Маркова

$$M_{n,k} = \sqrt{\frac{n!}{(n-k)!}} \cdot 2^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Действительно, в этом случае

$$B_{jv} = \sum_{i=1}^{j-k+1} c_{ij}^{(k)} \cdot c_{iv}^{(k)} = c_{j-k+1,j}^{(k)} \cdot c_{j-k+1,v}^{(k)}, \quad v = j, \dots, n.$$

Поэтому

$$B_{jj} = (c_{j-k+1,j}^{(k)})^2 \text{ и } B_{jv} = 0 \text{ во всех остальных случаях.}$$

Матрица B имеет диагональный вид. Значит,

$$\lambda_{\max} = \frac{n!}{(n-k)!} \cdot 2^k.$$

Если $k = n$, то матрица B состоит из одного элемента $b_{nn} = (c_{1n}^n)^2$. Согласно теореме 2 [9], имеем

$$b_{nn} = \left(n! \cdot \frac{A_n}{A_0} \right)^2,$$

где $A_n = A_{n,\rho}$ – старший коэффициент ортонормированного по весу ρ многочлена $P_n = P_{n,\rho}$ ($A_n > 0$).

Поэтому

$$M_{nn} = n! \cdot \frac{A_n}{A_0}.$$

В случае веса Лагерра имеем

$$M_{nn} = |c_{1n}^n| = \sqrt{\frac{h_{0,\alpha}}{h_{n,\alpha}}} = \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha + 1) \cdot n!}{\Gamma(n + \alpha + 1)}}.$$

Литература

1. Марков А.А. Об одном вопросе Д.И. Менделеева // Изв. Петербургской АН. – 1989. – Т. 62. – С. 1–24.
2. Марков В.А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. – СПб., 1892. – 117 с.
3. Конягин С.Б. О неравенстве В.А. Маркова для многочленов в пространстве L // Тр. мат. института АН СССР. – 1980. – Т. 45. – С. 117–125.
4. Бари Н.К. Обобщение неравенств С.Н. Бернштейна и А.А. Маркова // Изв. АН СССР. Сер.: Математика. – 1954. – Т. 18, № 2. – С. 159–176.
5. Загиров Н.Ш., Ахмадова М.А. Постоянная Маркова для весовых пространств // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 75–80.
6. Загиров Н.Ш., Пашаева З.Ш. Оценка значений многочленов внутри отрезка // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 67–74.
7. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценка наилучших полиномиальных приближений ограниченных функций со знакочувствительным весом // Вестник ДГУ. – 2015. – Вып. 6. – С. 105–111.
8. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г., Мустафа Б.Г. Али. Оценка скорости полиномиальных аппроксимаций функций в вариационных метриках через различные структурные характеристики // Вестник ДГУ. – 2013. – Вып. 1. – С. 68–79.
9. Загиров Н.Ш., Гаджиева Т.Ю. Оценки постоянной А.А. Маркова в весовом пространстве Якоби // Вестник ДГУ. – 2018. – Вып. 3. – С. 54–61.
10. Сеге Г. Ортогональные многочлены: пер. с англ. – М.: Гл. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962. – 500 с.
11. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: Наука, 1967. – 376 с.

Поступила в редакцию 24 февраля 2019 г.

UDC 517.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-1-61-66

Estimates of the Markov constant in weight spaces

N.Sh. Zagirov, T.U. Gadzhieva

*Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a;
nizam_zagirov@mail.ru, tamila.usup@mail.ru*

The work is devoted to finding estimates of the Markov constant in the weight space of the set of all real measurable functions whose squares with a given weight are summable on a certain segment. General results for any weight are established, after which the cases of Laguerre and Hermite weights are studied separately.

In the case of the space of continuous functions on a segment, A.A. Markov found the value of this constant. These estimates in different spaces were found by S.B. Konyagin and N.K. Bari.

The paper establishes an expression for the Markov constant in the case of an arbitrary order derivative. Some cases of exact calculation of Markov constant in weight space of Laguerre and Hermite are offered.

Keywords: *estimations of a Markov constant, orthonormal polynomial, weight function.*

Received 24 February, 2019