МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-1-40-55

А.Р. Хаиров

О различных формах представления многочленов Чебышева первого рода

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; A.Chairov@yandex.ru

Исходя из формулы бинома и параметрических преобразований получены различные формы представления многочленов Чебышева первого рода, применен способ одновременного вывода алгебраической формы представления и дифференциального уравнения для них. С помощью одной из форм представления многочленов Чебышева для них получена производящая функция, выраженная через косинус и гиперболический косинус, а с помощью другой – интегральное представление через многочлены Чебышева–Лагерра. Для одной системы функций, зависящих от трех параметров, получена производящая функция, которая, в частности, при соответствующем подборе параметров совпадает с производящей функцией для многочленов Чебышева. Приведен оригинальный способ разложения показательной функции, который представляет самостоятельный интерес и основан на вычислении коэффициентов Фурье–Чебышева с помощью правила дифференцирования однопараметрического преобразования.

Ключевые слова: *различные формы, бином, представление, ортогональный, многочлен, параметрический.*

Во множестве всех систем алгебраических многочленов вряд ли существует другая система, которая обладала бы таким большим числом замечательных свойств и имела бы так много приложений, как многочлены Чебышева первого рода.

Основополагающими работами в теории приближений и функций, наименее уклоняющихся от нуля, являются [1–3]. П.Л. Чебышев [1] в результате решения задачи о нахождении многочлена степени n , наименее уклоняющегося от нуля, пришел к многочлену

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \left[\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) + \left(x - \sqrt{x^2 - 1} \right)^n \right]$$

(радикалы при возведении в степень по формуле бинома исчезают). Другой важной формой представления многочлена $T_n(x)$ является [4]:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Третья форма, в которой многочлен $T_n(x)$ представлен в явном виде

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{n}{n-k} C_{n-k}^k 2^{n-2k-1} x^{n-2k},$$

в [6] выведена из дифференциального уравнения

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

В [7] система многочленов $\{T_n(x)\}$ определяется как система ортогональных многочленов веса $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ и промежутка $(-1,1)$, в [8] принято определение

$$T_n(x) = \frac{2^n n!}{(2n)!} \sqrt{x^2-1} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2-1)^{n-\frac{1}{2}} \right],$$

а в [9] многочлен $T_n(x)$ является собственной функцией задачи Штурма–Лиувилля для уравнения

$$(1-x^2)y'' - xy' + \lambda y = 0$$

при краевых условиях регулярных в конечных точках промежутка $[-1, 1]$. Собственное значение, соответствующее решению $y = T_n(x)$, равно $\lambda = n^2$.

С помощью параметрических преобразований бинома $(\xi + \eta)^n$ мы получили различные формы представления классических и некоторых других ортогональных многочленов. В [10] получены различные формы представления многочленов Лежандра, доказаны их основные свойства. Теперь метод параметрических преобразований применяем для получения различных форм представления многочленов Чебышева и доказательства их свойств.

Определения, формулы и правила дифференцирования параметрических преобразований

Функция [10]

$$f\left(\frac{x}{(a)_\cdot}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^n}{(a)_n}, \quad (1)$$

где $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$, однопараметрическим преобразованием функции $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ($|x| < R$), а функция

$$f\left(\frac{(b)_\cdot}{(a)_\cdot} x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(b)_n}{(a)_n} x^n \quad (2)$$

называется двухпараметрическим преобразованием функции $f(x)$.

Формулы

$$\left(1 + \lambda \frac{(a)_\cdot}{(b)_\cdot} \xi\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda^k \frac{(a)_k}{(b)_k} \xi^k, \quad (3)$$

$$\left(\frac{\xi}{(a)_\cdot} + \frac{\eta}{(b)_\cdot}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\xi^k}{(a)_k} \frac{\eta^{n-k}}{(b)_k} \quad (4)$$

получены при соответствующих преобразованиях из биномиальных формул

$$(1 + \lambda \xi)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda^k \xi^k, \quad (\xi + \eta)^n = \sum_{k=1}^n C_n^k \xi^k \eta^{n-k}.$$

Для преобразований (1) и (2) справедливы следующие правила дифференцирования [11]:

$$\frac{d}{dx} f\left(\frac{x}{(a)_{\cdot}}\right) = \frac{1}{a} f'\left(\frac{x}{(a+1)_{\cdot}}\right), \quad (5)$$

$$\frac{d}{dx} f\left(\frac{(b)_{\cdot}}{(a)_{\cdot}} x\right) = \frac{b}{a} f'\left(\frac{(b+1)_{\cdot}}{(a+1)_{\cdot}} x\right). \quad (6)$$

Определим преобразование

$$f((a)_{\cdot}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (a)_n x^n, \quad (7)$$

если $f(x)$ такова, что ряд (7) имеет положительный радиус сходимости.

Формула

$$\left(1 - \frac{(a)_{\cdot}}{(b)_{\cdot}}\right)^n = \left(\frac{(b-a)_n}{(b)_n}\right) \quad (8)$$

выводится из (3) при $\lambda\xi = -1$ с помощью формулы

$$\frac{1}{(b)_k} = (-1)^{n-k} \frac{(1-b-n)_{n-k}}{(b)_n}. \quad (9)$$

Ортогональность и первая формула представления многочлена Чебышева первого рода

Для одновременного получения символического представления и доказательства ортогональности многочленов Чебышева нам понадобится следующая

Лемма 1. Если $Q(\xi)$ – алгебраический многочлен степени n , то справедливо равенство

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^p Q(1-x)(1+x)^m dx = 2^{2p+m+1} B(p+1, p+1+m) Q\left(2 \frac{(p+1)_{\cdot}}{(2p+m+2)_{\cdot}}\right). \quad (10)$$

Доказательство. Для $Q(\xi) = \sum_{k=0}^n a_k \xi^k$ вычислим интеграл

$$A_{mn} = \int_{-1}^1 (1-x^2)^p Q(1-x)(1+x)^m dx.$$

Представим этот интеграл в виде

$$A_{mn} = \sum_{k=0}^n a_k \int_{-1}^1 (1-x)^{p+k} (1+x)^{p+m} dx$$

и воспользуемся формулой

$$\int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q dx = 2^{p+q+1} B(p+1, q+1).$$

В результате имеем равенство

$$A_{mn} = \sum_{k=0}^n a_k 2^{2p+m+1} B(p+1+k, p+1+m),$$

которое с помощью формул [4]

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad \Gamma(a+k) = (a)_k \Gamma(a)$$

приводится к равенству

$$\begin{aligned} A_{mn} &= 2^{2p+m+1} B(p+1, p+1+m) \sum_{k=0}^n a_k \frac{(p+1)_k}{(2p+m+2)_k} = \\ &= 2^{2p+m+1} B(p+1, p+1+m) Q\left(2 \frac{(p+1)_\cdot}{(2p+m+2)_\cdot}\right). \end{aligned}$$

Теорема 1. Многочлен Чебышева первого рода $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ совпадает с многочленом

$$\left(1 - \frac{(n)_\cdot}{2(1/2)_\cdot}(1-x)\right)^n.$$

Доказательство. Если в лемме 1 полагать $p = -1/2$,

$$Q(\xi) = \left(1 + \lambda \frac{(a)_\cdot}{(b)_\cdot} \xi\right)^n,$$

то получим

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(1 + \lambda \frac{(a)_\cdot}{(b)_\cdot} (1-x)\right)^n (1+x)^m dx = 2^m B(1/2, m+1/2) \left(1 + 2\lambda \frac{(a)_\cdot}{(b)_\cdot} \frac{(1/2)_\cdot}{(m+1)_\cdot}\right)^n.$$

Если в этом равенстве полагать $2\lambda = -1$, $2b = 1$, то получим

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - \frac{(a)_\cdot}{2(1/2)_\cdot}(1-x)\right)^n (1+x)^m dx = 2^m B(1/2, m+1/2) \left(1 - \frac{(a)_\cdot}{(m+1)_\cdot}\right)^n. \quad (11)$$

Так как

$$\left(1 - \frac{(a)_n}{(m+1)_\cdot}\right)^n = \frac{(m+1-a)_n}{(m+1)_n} = (-1)^n \frac{(a-n-m)_n}{(m+1)_n},$$

то при $a = n$ равенство (11) принимает вид

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - \frac{(n)_\cdot}{2(1/2)_\cdot}(1-x)\right)^n (1+x)^m dx = 2^m B(1/2, m+1/2) \frac{(-1)^n}{(m+1)_n} (-m)_n, \quad (12)$$

где $(-m)_n = 0$ при $m = 0, 1, \dots, n-1$. Эти соотношения означают, что многочлен

$$\left(1 - \frac{(n)_\cdot}{2(1/2)_\cdot}(1-x)\right)^n$$

является ортогональным многочленом степени n , промежутка $(-1, 1)$ и веса $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Следовательно, он числовым множителем отличается от многочлена Чебышева $T_n(x)$:

$$T_n(x) = c_n \left(1 - \frac{(n)_\cdot}{2(1/2)_\cdot}(1-x)\right)^n.$$

Так как $T_n(1) = 1$, то $c_n = 1$. Таким образом, мы нашли новую форму представления многочлена Чебышева:

$$T_n(x) = \left(1 - \frac{(n)}{2(1/2)}(1-x)\right)^n \quad (13)$$

Ортогональность и вторая форма представления многочлена $T_n(x)$

Лемма 2. Если $Q(\xi, \eta)$ – однородный многочлен степени n , то

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} Q(1-x, 1+x)(1+x)^m dx = 2^{m+n} B(1/2, m+1/2) Q((1/2), (m+1/2)).$$

Доказательство. Однородный многочлен $Q(\xi, \eta)$ степени n имеет вид

$$Q(\xi, \eta) = \sum_{s+r=n} a_{sr} \xi^s \eta^r.$$

Функция $Q(1-x, 1+x)$ является алгебраическим многочленом степени n , и тогда вычисление интеграла

$$A_{mn} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} Q(1-x, 1+x)(1+x)^m dx$$

сводится к вычислению интегралов

$$c_{sr} = \int_{-1}^1 (1-x)^{s-1/2} (1+x)^{r+m-1/2} dx.$$

С помощью формулы

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

находим

$$c_{sr} = 2^{m+n} \frac{\Gamma(s+1/2)\Gamma(r+m+1/2)}{\Gamma(m+n+1)} = 2^{m+n} B(1/2, m+1/2) (1/2)_s (m+1/2)_r.$$

Подставив выражения для коэффициентов c_{sr} в равенство

$$A_{mn} = \sum_{s+r=n} a_{sr} c_{sr},$$

получим

$$\begin{aligned} A_{mn} &= 2^{m+n} B(1/2, m+1/2) \sum_{s+r=n} a_{sr} (1/2)_s (m+1/2)_r = \\ &= 2^{m+n} B(1/2, m+1/2) Q((1/2), (m+1/2)). \end{aligned}$$

Теорема 2. Многочлен Чебышева первого рода $T_n(x)$ совпадает с многочленом

$$\frac{(1/2)_n}{2^n} \left(\frac{x-1}{(1/2)} + \frac{x+1}{(1/2)} \right)^n.$$

Доказательство. Если в лемме 2 полагать $a = 1/2$,

$$Q(\xi, \eta) = \left(\frac{\eta}{(b)} - \frac{\xi}{(a)} \xi \right)^n,$$

то

$$A_{mn} = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{x-1}{(1/2)_n} + \frac{x+1}{(b)_n} \right)^n (1+x)^m dx = 2^{m+n} B(1/2, m+1/2) \left(\frac{(m+1/2)_n}{(b)_n} - 1 \right)^n.$$

Если применить формулу (8) к A_{mn} при $b = 1/2$, получим

$$A_{mn} = 2^{m+n} B(1/2, m+1/2) (-1)^n \frac{(-m)_n}{(1/2)_n} = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, получаем соотношения ортогональности:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{x-1}{(1/2)_n} + \frac{x+1}{(1/2)_n} \right)^n (1+x)^m dx = 0, \quad m < n.$$

Из этих соотношений следует, что многочлен

$$\left(\frac{x-1}{(1/2)_n} + \frac{x+1}{(1/2)_n} \right)^n$$

числовым множителем отличается от $T_n(x)$. Числовой множитель определяется по условию $T_n(1) = 1$ и равен $(1/2)_n 2^{-n}$. Мы получили еще одну форму представления многочлена Чебышева первого рода:

$$T_n(x) = \frac{(1/2)_n}{2^n} \left(\frac{x-1}{(1/2)_n} + \frac{x+1}{(1/2)_n} \right)^n. \quad (14)$$

Ортогональность и представления для четных и нечетных многочленов

Из формулы (14) легко выводится свойство $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$, из которого следует, что $T_n(x)$ содержит члены одной четности с n . Поэтому отдельно находим представления для $T_{2n}(x)$ и $T_{2n+1}(x)$.

Лемма 3. Если $Q(\xi) = \sum_{k=0}^n a_k \xi^k$, то

$$\int_{-1}^1 Q(x^2) (1-x^2)^\gamma dx = B(1/2, \gamma+1) Q\left(\frac{(1/2)_n}{(\gamma+3/2)_n}\right). \quad (15)$$

Доказательство. Обозначив интеграл в (15) через A_n , представим его в виде

$$A_n = \sum_{k=0}^n a_k \int_{-1}^1 x^{2k} (1-x^2)^\gamma dx.$$

Так как

$$\int_{-1}^1 x^{2k} (1-x^2)^\gamma dx = \int_0^1 t^{k-1/2} (1-t)^\gamma dt = B(k+1/2, \gamma+1) = B(1/2, \gamma+1) \frac{(1/2)_k}{(\gamma+1/2)_k},$$

то

$$A_n = B(1/2, \gamma+1) \sum_{k=0}^n a_k \frac{(1/2)_k}{(\gamma+3/2)_k} = B\left(\frac{1}{2}, \gamma+1\right) Q\left(\frac{(1/2)_n}{(\gamma+3/2)_n}\right).$$

Теорема 3. Многочлены $T_{2n}(x)$, $T_{2n+1}(x)$ соответственно совпадают с многочленами

$$(-1)^n \left(1 - \frac{(n)_\cdot}{(1/2)_\cdot} x^2 \right)^n, \quad (-1)^n (2n+1)x \left(1 - \frac{(n+1)_\cdot}{(3/2)_\cdot} x^2 \right)^n$$

Доказательство. Если в лемме 3 полагать $\gamma = m - 1/2$, где m – целое неотрицательное число,

$$Q(\xi) = \left(1 + \lambda \frac{(a)_\cdot}{(b)_\cdot} \xi \right),$$

получим равенство

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(1 + \lambda \frac{(a)_\cdot}{(b)_\cdot} x^2 \right)^n (1-x^2)^m dx = B(1/2, m+1/2) \left(1 + \lambda \frac{(a)_\cdot}{(b)_\cdot} \frac{(1/2)_\cdot}{(m+1)_\cdot} \right)^n. \quad (16)$$

Степенное выражение в правой части упрощается при $b = 1/2$, $\lambda = -1$ и принимает вид

$$\left(1 - \frac{(a)_\cdot}{(m+1)_\cdot} \right)^n = \frac{(m+1-a)_n}{(m+1)_n}.$$

Так как $(m+1-a)_n = (-1)^n (a-n-m)_n = (-1)^n (-m)_n$ при $a = n$, то равенство (16) принимает вид

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - \frac{(n)_\cdot}{(1/2)_\cdot} x^2 \right)^n (1-x^2)^m dx = B(1/2, m+1/2) \frac{(-1)^n (-m)_n}{(m+1)_n} = 0$$

при $m = 0, 1, \dots, n-1$. Из этих соотношений и очевидных соотношений

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - \frac{(n)_\cdot}{(1/2)_\cdot} x^2 \right)^n x^{2m+1} dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1$$

следует, что

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(1 - \frac{(n)_\cdot}{(1/2)_\cdot} x^2 \right)^n x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2n-1. \quad (17)$$

Соотношения (17) означают, что

$$T_{2n}(x) = c_n \left(1 - \frac{(n)_\cdot}{(1/2)_\cdot} x^2 \right)^n,$$

где числовой множитель c_n может быть определен по условию $T_{2n}(1) = 1$.

Так как

$$\left(1 - \frac{(n)_\cdot}{(1/2)_\cdot} \right)^n = \frac{(1/2-n)_n}{(1/2)_n} = (-1)^n,$$

то

$$T_{2n}(x) = (-1)^n \left(1 - \frac{(n)_\cdot}{(1/2)_\cdot} x^2 \right)^n. \quad (18)$$

Если в лемме 3 полагать $Q(\xi) = \xi P(\xi)$, где $P(\xi)$ – многочлен степени n , то

$$\int_{-1}^1 x^2 P(x^2) (1-x^2)^\gamma dx = B(3/2, \gamma+1) P\left(\frac{(3/2)_\cdot}{(\gamma+5/2)_\cdot} \right).$$

Из этого равенства при $\gamma = m - 1/2$

$$P(\xi) = \left(1 + \lambda \frac{(a)}{(b)} x^2 \right)$$

получим равенство

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x \left(1 + \lambda \frac{(a)}{(b)} x^2 \right)^n x (1-x^2)^m dx = B(3/2, m+1/2) \left(1 + \lambda \frac{(a)}{(b)} \frac{(3/2)}{(m+2)} \right)^n,$$

которое при $\lambda = -1$, $a = n+1$, $b = \frac{3}{2}$ принимает вид

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x \left(1 - \frac{(n+1)}{(3/2)} x^2 \right)^n x (1-x^2) dx = B(3/2, m+3/2) \frac{(-1)^n (-m)_n}{(m+2)} = 0$$

при $m = 0, 1, \dots, n-1$.

Эти соотношения вместе с соотношениями

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x \left(1 - \frac{(n+1)}{(3/2)} x^2 \right)^n x^{2m} dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n$$

дают

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x \left(1 - \frac{(n+1)}{(3/2)} x^2 \right)^n x^k dx = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2n. \quad (19)$$

Соотношения (19) означают, что многочлен

$$x \left(1 - \frac{(n+1)}{(3/2)} x^2 \right)^n$$

$T_{2n+1}(x)$ отличается числовым множителем, который может быть определен по условию $T_{2n+1}(1) = 1$. Легко показать, что числовой множитель равен $(-1)^n (2n+1)$. Таким образом, для $T_{2n+1}(x)$ получили символическое представление

$$T_{2n+1}(x) = (-1)^n (2n+1) x \left(1 - \frac{(n+1)}{(3/2)} x^2 \right)^n. \quad (20)$$

Две формы представления ортонормированных многочленов Чебышева

Мы приведем один способ вычисления нормы многочлена $T_n(x)$, основанный на использовании форм представления (13) и (14) и представляющий самостоятельный интерес. Для удобства обозначим

$$A_n = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n^2(x) dx.$$

В силу формул (13) и (14) имеем

$$A_n = (-1)^n \frac{(1/2)_n}{2^n} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{x-1}{(1/2)} + \frac{x+1}{(1/2)} \right)^n \left(1 - \frac{(n)}{2(1/2)} (1-x) \right)^n dx.$$

Так как многочлен (14) ортогонален всем многочленам степени меньше n , то

$$A_n = (-1)^n \frac{(n)_n}{2^{2n}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{x-1}{(1/2)} + \frac{x+1}{(1/2)} \right)^n (1-x)^n dx.$$

Представив интеграл в правой части этого равенства в развернутом виде

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{1}{(1/2)_k (1/2)_{n-k}} \int_{-1}^1 (1-x)^{n+k-1/2} (1+x)^{n-k-1/2} dx,$$

воспользуемся формулой

$$\int_{-1}^1 (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = 2^{\alpha+\beta+1} B(\alpha+1, \beta+1).$$

В результате последняя сумма примет вид

$$2^{2n} B(n+1/2, 1/2) \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{(n+1/2)_k}{(1/2)_k} = 2^{2n} \frac{(1/2)_n}{(2n)!} \pi \left(1 - \frac{(n+1/2)_n}{(1/2)_n} \right)^n =$$

$$= (-1)^n 2^{2n} \frac{n!}{(2n)!}.$$

В силу этого получим

$$A_n = \frac{(n)_n n!}{(2n)!} \pi = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, ортонормированный многочлен $\hat{T}_n(x)$ имеет следующие формы представления:

$$\hat{T}_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{(n)_n}{2(1/2)_n} (1-x) \right)^n, \quad T_0(x) = \sqrt{\frac{1}{\pi}};$$

$$\hat{T}_n(x) = \frac{(1/2)_n}{2^n} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{x-1}{(1/2)_n} + \frac{x+1}{(1/2)_n} \right)^n.$$

Формула перехода от одной формы представления многочлена Чебышева к другой

Лемма 4. При любых ξ и η справедливо равенство

$$\left(\frac{\xi}{(1/2)_n} + \frac{\eta}{(1/2)_n} \right)^n = \frac{1}{(1/2)_n} \left(\eta - \xi + \frac{(n)_n}{(1/2)_n} \xi \right)^n. \quad (21)$$

Доказательство. Согласно формуле (4) имеем

$$A_n = \left(\frac{\xi}{(1/2)_n} + \frac{\eta}{(1/2)_n} \right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\xi^k}{(1/2)_k} \frac{(\xi)^{n-k}}{(1/2)_{n-k}}. \quad (22)$$

К правой части равенства (22) применим формулу (9) при $b = \frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{(1/2)_{n-k}} = (-1)^k \frac{(1/2-n)_k}{(1/2)_n}.$$

В результате получим

$$A_n = \frac{1}{(1/2)_n} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k (\eta)^{n-k} \frac{(1/2-n)_k}{(1/2)_k} \xi^k = \frac{1}{(1/2)_n} \left(\eta - \left(\frac{(1/2-n)_n}{(1/2)_n} \xi \right)^n \right).$$

С помощью формулы (8) степенное выражение в этом равенстве приведем к виду

$$\left(\eta - \xi + \frac{(n)_n}{(1/2)_n} \xi \right)^n,$$

который завершает доказательство формулы (21).

Для $T_n(x)$ нами найдено две формы представления: (13) и (14).

Если воспользоваться формулой (21), то формула (14) может быть получена из формулы (13), и наоборот. Для этого в (21) положим $\xi = \frac{x-1}{2}$, $\eta = \frac{x+1}{2}$. В результате получим равенство

$$\left(\frac{x-1}{2(1/2)_n} + \frac{x+1}{2(1/2)_n} \right)^n = \frac{1}{(1/2)_n} \left(1 - \frac{(n)_n}{2(1/2)_n} (1-x) \right)^n,$$

из которого по (13) можно получить (14) и по (14) можно получить (13).

Теперь получим новую форму для $T_{2n+1}(x)$ исходя из формулы (20), по которой находим $\xi = x^2$, $\eta - \xi = 1$. Поэтому $T_{2n+1}(x)$ согласно условию $T_{2n+1}(1) = 1$ имеет вид

$$T_{2n+1}(x) = (3/2)_n x \left(\frac{x^2-1}{(a)_n} + \frac{x^2}{(3/2)_n} \right). \quad (23)$$

Сравнивая (23) с (20), имеем равенство

$$(3/2)_n \left(\frac{x^2-1}{(a)_n} + \frac{x^2}{(3/2)_n} \right)^n = (-1)^n (2n+1) \left(1 - \frac{(n+1)_n}{(3/2)_n} x^2 \right)^n,$$

из которого при $x = 0$ получим уравнение

$$\frac{(3/2)_n}{(a)_n} = 2n+1,$$

которому удовлетворяет $a = \frac{1}{2}$. Таким образом, для нечетного многочлена мы получим новую форму представления

$$T_{2n+1}(x) = (3/2)_n x \left(\frac{x^2-1}{(1/2)_n} + \frac{x^2}{(3/2)_n} \right). \quad (24)$$

Представление для $T_{2n}(x)$ может быть получено из формулы (21) и представления (18):

$$T_{2n}(x) = (1/2)_n \left(\frac{x^2-1}{(1/2)_n} + \frac{x^2}{(1/2)_n} \right)^n.$$

Интегральное представление многочлена $T_n(x)$ через многочлен Чебышева–Лагерра

Система многочленов Чебышева–Лагерра, ортогональная на $(0, \infty)$ по весу $e^{-x} x^\alpha$ ($\alpha > -1$), имеет форму представления [12]

$$L_n(x; \alpha) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \left(1 - \frac{x}{(\alpha+1)_n} \right)^n. \quad (25)$$

Для интегрального представления многочлена $T_n(x)$ через (25) при $\alpha = -\frac{1}{2}$ нам понадобится следующая

Лемма 5. Для любого многочлена $P(\xi)$ имеет место формула

$$P((a), \xi) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} P(\xi t) dt. \quad (26)$$

Доказательство. Для произвольного многочлена $P(\xi) = \sum_{k=0}^m c_k \xi^k$ в силу формулы $\Gamma(a+k) = a_k \Gamma(a)$ имеем

$$\int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} P(t\xi) dt = \sum_{k=0}^m c_k \xi^k \int_0^\infty e^{-t} t^{a-1} t^{k-1} dt = \sum_{k=0}^m c_k \Gamma(a+k) \xi^k = \Gamma(a) \sum_{k=0}^m c_k a_k \xi^k.$$

Отсюда согласно определению преобразования (7) получим формулу (26).

Если в лемме 5 полагать

$$P(\xi) = \left(1 - \frac{\xi}{2(1/2)}\right)^n = \frac{n!}{(1/2)_n} L_n(\xi/2; -1/2),$$

то получим равенство

$$\left(1 - \frac{(n)}{2(1/2)} \xi\right)^n = \frac{n}{(1/2)_n} \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} L_n\left(\frac{\xi}{2}t; -\frac{1}{2}\right) dt,$$

из которого при $\xi = 1 - x$ получим интегральное представление

$$T_n(x) = \frac{n}{(1/2)_n} \int_0^\infty e^{-t} t^{n-1} L_n\left(\frac{1-x}{2}t; -\frac{1}{2}\right) dt, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Дифференциальное уравнение и алгебраическая форма представления

Для $T_n(x)$ одновременно выведем дифференциальное уравнение и алгебраическую форму представления для $T_n(x)$ из функции

$$y = \left(ax + b\sqrt{x^2 + \alpha}\right)^n \quad (27)$$

и граничных условий

$$y(-1) = (-1)^n, \quad y(1) = 1. \quad (28)$$

Для функции (27) находим

$$\sqrt{x^2 + \alpha} y' = n \left(bx + a\sqrt{x^2 + \alpha}\right) u^{n-1}(x), \quad u(x) = ax + b\sqrt{x^2 + \alpha};$$

$$\left(\sqrt{x^2 + \alpha} y'\right)' = n(n-1)u^{n-2}(x)u'(x) \left(bx + a\sqrt{x^2 + \alpha}\right) + n \left(b + \frac{ax}{\sqrt{x^2 + \alpha}} u^{n-1}(x)\right) =$$

$$= n(n-1) \frac{\left(bx + a\sqrt{x^2 + \alpha}\right)^2}{\left(ax + b\sqrt{x^2 + \alpha}\right)^2} \frac{y}{\sqrt{x^2 + \alpha}} + n \frac{y}{\sqrt{x^2 + \alpha}}.$$

Отсюда при условии

$$\left(bx + a \sqrt{x^2 + \alpha} \right)^2 = \left(ax + b \sqrt{x^2 + \alpha} \right)^2 \quad (29)$$

получим дифференциальное уравнение

$$\left(\sqrt{x^2 + \alpha} y' \right)' = n^2 \frac{y}{\sqrt{x^2 + \alpha}}. \quad (30)$$

Условие (29) выполняется в двух случаях: 1) $a = b$, 2) $b = -a$. Так как уравнение (30) линейное однородное, то можно считать: 1) $a = b = 1$, 2) $b = -a = -1$.

Этим случаям соответствуют решения $y_1 = \left(x + \sqrt{x^2 + \alpha} \right)^n$, $y_2 = \left(x - \sqrt{x^2 + \alpha} \right)^n$. Тогда $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ будет общим решением уравнения (30).

Из общего решения уравнения (30) выделим решение, удовлетворяющее условиям (28):

$$\begin{aligned} c_1 (-1 + \sqrt{1 + \alpha})^n + c_2 (-1 - \sqrt{1 + \alpha})^n &= (-1)^n, \\ c_1 (1 + \sqrt{1 + \alpha})^n + c_2 (1 - \sqrt{1 + \alpha})^n &= 1. \end{aligned}$$

Из этой системы следует, что

$$\alpha = -1. \quad c_1 = c_2 = \frac{1}{(1 + \sqrt{1 + \alpha})^n + (1 - \sqrt{1 + \alpha})^n} = \frac{1}{2}$$

Таким образом, функция

$$y = \frac{1}{2} \left[\left(x + i\sqrt{1 - x^2} \right)^n + \left(x - i\sqrt{1 - x^2} \right)^n \right] \quad (31)$$

удовлетворяет уравнению

$$\left[\left(\sqrt{1 - x^2} y' \right)' + n^2 \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}} \right] = 0$$

и граничным условиям (28). Таковой является и функция $y = T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Следовательно, функция (31) совпадает с $T_n(x)$.

Производящая функция для системы функций, связанной с системой $\{T_n(x)\}$

С помощью системы функций

$$Q_n(x, t) = \frac{1}{2} \left[\left(ax + b\sqrt{\alpha + x^2} \right)^n + \left(ax - b\sqrt{\alpha + x^2} \right)^n \right],$$

которая при $a = b = 1$, $\alpha = -1$ совпадает с системой многочленов $T_n(x)$, образуем функцию

$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n Q_n(x, t). \quad (32)$$

Если параметры a, b, α таковы, что $\left| ax + b\sqrt{\alpha + x^2} \right| \leq 1$ на некотором множестве E , то ряд (32) сходится абсолютно при $|t| < 1$. Поэтому функция $G(x, t)$ является суммой двух геометрических рядов

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} t^n \left(ax \pm b \sqrt{\alpha + x^2} \right)^n$$

и

$$G(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - t(ax + b\sqrt{\alpha + x^2})} + \frac{1}{1 - t(ax - b\sqrt{\alpha + x^2})} \right].$$

Эта функция после упрощения принимает вид

$$G(x, t) = \frac{1 - axt}{1 - 2axt - \alpha b^2 t^2 + (a^2 - b^2)x^2 t^2}.$$

В частности, при $a = b = 1$, $\alpha = -1$, $E = [-1, 1]$ получим производящую функцию

$$G(x, t) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n T_n(x), \quad |t| < 1.$$

Иным путем эта функция получена в [4].

Еще одна производящая функция для многочленов $T_n(x)$

Формула (14) позволяет в некоторых случаях получить разложения функций в ряды по многочленам $T_n(x)$, минуя вычисление коэффициентов Фурье–Чебышева.

Пользуясь равенством $(2n)! = 2^{2n} n! (1/2)_n$, произведение Коши абсолютно сходящихся при любых ξ и η рядов

$$\cos \xi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\xi^{2n}}{(2n)!}, \quad \operatorname{ch} \eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^{2n}}{(2n)!}$$

представим в виде

$$\cos \xi \operatorname{ch} \eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! 2^{2n}} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\xi^{2k}}{(1/2)_k} \frac{\eta^{2(n-k)}}{(1/2)_{n-k}}.$$

К внутренней сумме применим формулу (4)

$$\cos \xi \operatorname{ch} \eta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! 2^{2n}} \left(\frac{\eta^2}{(1/2)_n} - \frac{\xi^2}{(1/2)_n} \right)^n. \quad (33)$$

Если равенство (33) полагать

$$\xi^2 = \frac{1-x}{2} t^2, \quad \eta^2 = \frac{1+x}{2} t^2 \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

то получим разложение

$$\cos \sqrt{\frac{1-x}{2}} t \operatorname{ch} \sqrt{\frac{1+x}{2}} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^{3n} n!} \left(\frac{x-1}{(1/2)_n} + \frac{x+1}{(1/2)_n} \right)^n,$$

которое согласно формуле (14) принимает вид

$$\cos \sqrt{\frac{1-x}{2}} t \operatorname{ch} \sqrt{\frac{1+x}{2}} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} T_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

Разложение e^{ax} по многочленам $T_n(x)$

Коэффициентами разложения Фурье–Чебышева $A_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(a) T_n(x)$ функции e^{ax} являются

$$A_0(a) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 e^{ax} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (34)$$

$$A_n(a) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 e^{ax} T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (35)$$

Если в (34) e^{ax} разложить в ряд по степеням x , затем почленно интегрировать полученный ряд после умножения на $e^{ax} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, то получим

$$A_0(a) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_{-1}^1 x^k (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx.$$

С помощью бета-функции вычислим интеграл под знаком этой суммы. В результате получим

$$A_0(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{2^{2k} k! (1)_k}. \quad (36)$$

Функция Бесселя мнимого аргумента порядка ν определяется [3] рядом

$$I_{\nu}(a) = \frac{a^{\nu}}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{2k}}{2^{2k} k! (\nu+1)_k}. \quad (37)$$

Равенство (36) означает, что $A_0(a) = I_0(a)$. Находим выражение $A_1(a)$ через $I_1(a)$:

$$A_1(a) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 e^{ax} T_1(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 e^{ax} x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 2 \frac{d}{da} A_0(a) = 2 \frac{d}{da} I_0(a).$$

Представив равенство (36) в виде $A_0(a) = e^{\frac{a^2}{2^2(1)}}$ по правилу (5) дифференцирования однопараметрического преобразования, находим

$$\frac{d}{da} I_0(a) = 2 I_1(a).$$

Возможность дифференцирования интеграла $A_n(a)$ по параметру очевидна. Поэтому имеем

$$\frac{d}{da} A_n(a) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 e^{ax} x T_n(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}. \quad (38)$$

С помощью рекуррентного соотношения $2xT_n(x) = T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x)$ из (37) получим

$$2 \frac{d}{da} A_n(a) = A_{n+1}(a) + A_{n-1}(a). \quad (39)$$

Таким образом, имеем дифференциально-разностное уравнение (39) и начальные условия

$$A_0(a) = I_0(a), \quad A_1(a) = 2 I_1(a). \quad (40)$$

Для решения уравнения (39) нам понадобится уравнение

$$2 \frac{d}{da} I_{\nu}(a) = I_{\nu+1}(a) + I_{\nu-1}(a), \quad (41)$$

которое легко получается из представления

$$I_{\nu}(a) = \frac{a^{\nu}}{2^{\nu} \Gamma(\nu+1)} e^{\frac{a^2}{2^2(\nu+1)}},$$

и правила дифференцирования (5).

Из (39), (40) и (41) при $\nu = n$ следует, что система функций

$$\varphi_0(a) = A_0(a) - I_0(a), \quad \varphi_n(a) = A_n(a) - 2I_n(a)$$

удовлетворяет дифференциально-разностному уравнению и начальным условиям:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{da} \varphi_n(a) &= \varphi_{n+1}(a) + \varphi_{n-1}(a), \\ \varphi_0(a) &= 0, \quad \varphi_1(a) = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Теперь легко проверить, что задача (42) имеет нулевое решение. Следовательно, но,

$$A_0(a) = I_0(a), \quad A_n(a) = 2I_n(a) \quad \text{и} \quad I_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(a) T_n(x) \quad (43)$$

является рядом Фурье–Чебышева для e^{ax} . Поскольку ряд (43) равномерно сходится на $[-1, 1]$ при любых a , то

$$e^{ax} = I_0(a) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_n(a) T_n(x), \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (44)$$

Таким образом, мы вновь получили хорошо известное разложение (44). Новый способ разложения приводится нами потому, что его получение обладает математической красотой, подобающей и функции e^{ax} , и системе многочленов $\{T_n(x)\}$.

Литература

1. Чебышев П.Л. Теория механизмов, известных под названием параллелограммов // Соч.: в 2 т. – Т. II. – С. 23–51. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1947 (Комментарий В.Л. Гончарова. – С. 474–485).
2. Чебышев П.Л. Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближенным представлением функций // Соч. в 2 т. – Т. II. – С. 146–150. – М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1947 (Комментарий В.Л. Гончарова. – С. 196–507).
3. Марков А.А. Лекции о функциях, наименее уклоняющихся от нуля // Избранные труды. – М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
4. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2007.
5. Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. – М.: Гостехиздат, 1954.
6. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.–Л.: Гостехиздат, 1949.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции (функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены). – М.: Наука, 1974.
8. Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1965.
9. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. – М.–Л.: Гостехиздат, 1951. – Т. 1.
10. Хаиров А.Р. Различные формы представления многочленов Лежандра // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. – 2018. – Т. 33, вып. 3. – С. 80–93.
11. Хаиров Р.А. Двупараметрическое преобразование степенных рядов // Вестник ДГТУ. – 2010. – № 16. – С. 72–79.

12. Хаиров А.Р. Формулы сложения для функций преобразованной тригонометрической системы // Материалы V Международной конференции (26–29 сентября) «Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения». – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2011. – С. 221–224.

13. Корнев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 17 января 2019 г.

UDC 517.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-1-37-40-55

On different forms of representation of the Chebyshev polynomials of first type

A.R. Khairov

*Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a;
A. Chairov@yandex.ru*

Different forms of the Chebyshev standardized and orthonormalized polynomials of the first type representation are obtained from parametrical transformations of binomial formula by the parameters according to the conditions of orthogonality. The formula of transition from one form of representation to another is obtained, the method of simultaneous differential equation and generating function for Chebyshev polynomials is realized. One form of representation is used to get the integral representation of the Chebyshev polynomials via the standardized Chebyshev–Laguerre polynomials, and another for the output of the generating function, expressed through the cosine and hyperbolic cosine.

Keywords: different forms, binomial, representation, orthogonal, polynomial, parametric.

Received 17 January, 2019