УДК 532.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-1-15-23

Б.М. Кумицкий¹, Н.А. Саврасова², Е.Р. Лихачев²

Гидродинамическая модель осесимметричного истечения идеальной жидкости из донного отверстия резервуара формы параболоида вращения

¹ Воронежский государственный технический университет; Россия, 394006, Воронеж, ул. 20-летия Октября, 84; boris-kum@mail.ru;

² Военный учебно-научный центр военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия им. профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина»; Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых большевиков, 54а; nataly-savrasova@mail.ru

В работе рассматривается осесимметричное опорожнение емкости формы параболоида вращения, предварительно заполненной невязкой жидкостью. Доказывается существование связи между физическим содержанием процесса истечения и геометрией резервуара, которая включает в себя экономическую составляющую.

Кроме того, исследовательский интерес представляет (наблюдаемая на практике и теоретически подтвержденная) особенность истечения: при опорожнении сосудов параболической формы уровень свободной поверхности снижается равномерно.

Для объяснения такой аномалии и получения аналитических зависимостей основных параметров истечения предложена гидродинамическая модель, в основе которой лежит представление о движении частиц жидкости по искривленным трубкам тока. Они полностью заполняют осесимметричный поток в параболоиде, имеют кривизну, увеличивающуюся от оси симметрии к стенке сосуда, и ограничены свободной поверхностью и плоскостью донного отверстия.

Установлено, что в результате такого представления на частицу жидкости в месте искривления трубки тока действует сила, расположенная в плоскости закругления, перпендикулярная оси трубки и направленная к центру кривизны. Причиной возникновения этой силы может быть только разность давлений на противоположных сторонах трубки в плоскости закругления. Это приводит к тому, что осевая составляющая скорости течения жидкости распределяется по поперечному сечению резервуара неравномерно, увеличиваясь от стенки к оси симметрии, а свободная поверхность деформируется («прогибается»).

Получены аналитические зависимости основных гидродинамических характеристик истечения, в том числе формула скорости снижения уровня жидкости, а также алгебраическое уравнение деформированной свободной поверхности.

Ключевые слова: гидродинамическая модель, трубка тока, параболоид вращения, истечение.

Введение

Истечение жидкости из резервуара при переменном напоре представляет собой случай неустановившегося движения, когда изменяются параметры потока (расход, скорость, давление), а уравнение Бернулли в общем случае неприменимо. При этом

наиболее существенной технологической операцией является опорожнение, которое зачастую рассматривается как самостоятельная гидравлическая задача [1–3].

Традиционные и новые отрасли современного производства интенсивно развиваются, в связи с чем усиливается интерес к теоретическому исследованию задач истечения жидкости из резервуаров через отверстия и насадки [4–8]. Примером могут служить задачи безопасности энерго- и гидротехнического оборудования, интенсификации нефтедобычи, оптимизации процессов искусственного орошения, надежности работы водоочистительных сооружений и т. д.

Экспериментальное измерение гидродинамических характеристик большинства перечисленных технологических процессов является довольно сложным, поэтому необходимо искать аналитические решения и давать теоретические оценки различным стадиям процесса истечения. Так как резервуары являются наиболее распространенными хранилищами жидкости, в том числе воды и нефтепродуктов, то актуальной является проблема комплексного анализа их гидродинамического состояния. В современной литературе описаны различные физико-механические модели неустановившегося истечения и методы решения проблемы [4, 7, 9].

Так, при опорожнении резервуаров через донные отверстия, особенно при малых напорах, могут возникать воронки, создаваемые вращением жидкости вокруг оси, проходящей через центр сливного отверстия (интенсивная воронка) [5, 10–13]. Возможно, воронка образуется под давлением сил Кориолиса, разрушающих консервативность массовых сил, а также из-за вязкости и асимметричного подвода жидкости к отверстию.

Модель самопроизвольного воронкообразования подтверждается экспериментально, причем получена эмпирическая формула для определения критического напора, при котором происходит прорыв воздушного ядра воронки в донное отверстие [2, 13, 14]. Предложена гидродинамическая модель движения жидкости и газа по спирали на поворотном участке тракта. В этом случае векторы линейной и угловой скоростей совпадают, а частицы жидкости перемещаются по винтовым линиям тока, вращаясь вокруг них [15].

Однако все предложенные физико-математические модели в перечисленных работах носят описательный характер. Они могут быть использованы при решении основной задачи истечения – определении времени опорожнения, но не дает понять, как связано физическое содержание процесса истечения с геометрической формой резервуара. К примеру, сравнение результатов времени опорожнения сосудов конической и цилиндрических форм [1] при одних и тех же основных геометрических размерах (высоты, диаметра сосуда и донного отверстия) показывает, что время вытекания из конического сосуда в 5 раз меньше цилиндрического, хотя объем последнего больше конического в 3 раза.

Отсутствуют сведения о процессах истечения жидкости из емкостей параболической формы, хотя практика их использования в водяных часах [16] и теоретическое решение задачи [17] свидетельствуют о равномерном снижении уровня свободной поверхности, что говорит об аномальности процесса.

Цель работы и постановка задачи

Нашей целью было построение гидродинамической модели, которая позволила бы установить связь между физическим содержанием процесса истечения и геометрией резервуара, получить аналитические зависимости основных гидромеханических характеристик опорожнения, а также объяснить особенности процесса истечения из емкости формы параболоида вращения.

Для этого рассмотрим осесимметричный поток жидкости в объеме параболоида, плоское осевое сечение которого изображено на рис. 1. Выберем частицу жидкости с координатами (r, z) (точка M на рис. 1), движущуюся под действием двух сил в произвольной трубке тока, составляющей поток. Применим основное уравнение гидродинамики Эйлера для частицы идеальной жидкости, которая в проекции на ось Z имеет вид

$$g - a_z = \frac{v_\tau^2}{l} \cos \alpha = \frac{v_z^2}{r} \cos \alpha \cdot \sin \alpha \quad (1)$$

или

$$g - a_z = \frac{v_z^2}{r} \operatorname{ctg} \alpha, \quad (2)$$

где a_z – осевая составляющая ускорения частицы; g – ускорение свободного падения;

l – радиус кривизны оси трубки тока в т. M ; α – угол касательной в т. M с горизонталью; v_τ и v_z – соответственно касательная и осевая составляющие скорости.

Рис. 1. Принципиальная схема движения частицы с координатой z в произвольно выбранной трубке тока из осесимметричного потока жидкости в параболоиде вращения под действием внешних сил. $d\vec{F}_T$ – сила тяжести; $d\vec{F}$ – сила, вызывающая центростремительное ускорение частицы; $\vec{v}_\tau$ – тангенциальная скорость частицы; $\vec{v}_z$ – осевая составляющая скорости; H_0 , R_0 , $2r_0$ – основные геометрические размеры параболоида: высота, радиус и диаметр донного отверстия соответственно. Пунктирными линиями изображены трубки тока

Так как $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dr}$ – производная параболической функции в т. M , формула (2) примет вид дифференциального уравнения

$$g - a_z = \frac{v_z^2}{r} \frac{dr}{dz} \quad (3)$$

Рис. 2. Схема движения частицы жидкости объемом $b \times k \times dL$ в криволинейной трубке тока прямоугольного поперечного сечения. $|\overline{a_y}| = \frac{v_t^2}{l}$ – центростремительное ускорение; v_t и l – связанные с частицей тангенциальная скорость и радиус кривизны соответственно

Для решения (3) воспользуемся гидродинамической моделью, в основе которой лежит представление о течении жидкости в искривленных трубках тока, составляющих поток жидкости, с уменьшающейся кривизной от стенки к оси симметрии сосуда. Рассмотрим процесс в одной из них, предположив, что плоскость поперечного сечения прямоугольная (рис. 2).

Если осевая линия трубки тока представляет собой прямую, то частица жидкости может иметь ускорение только в направлении оси трубки [17], поэтому давление у противоположных стенок трубки должно быть одинаковым. В тех местах, где осевая линия искривляется, частица обладает центростремительным ускорением, поэтому на нее должна действовать сила dF , возникающая в плоскости закругления и направленная перпендикулярно к линии тока $dF = \rho b k \frac{v_t^2}{l} dL$, где dL – длина частицы жидкости; $b \times k$ – площадь поперечного сечения трубки; l – радиус кривизны; v_t – скорость, касательная к оси трубки тока.

Такую силу может создать только разность давлений на противоположных сторонах трубки в плоскости закругления, которая равна

$$(p_1 - p_2) k dL = \rho b k \frac{v_t^2}{l} dL. \quad (3)$$

Проведя сокращения в (3) и предполагая, что трубка тока достаточно тонка, получим

$$\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\rho v_{\tau}^2}{l}, \quad (4)$$

где $b = dl$ – толщина трубки тока.

Данное равенство означает, что при искривлении трубки тока давление изменяется поперек нее, причем падение давления $\frac{\partial p}{\partial l}$ происходит к центру кривизны.

Если заменить в (4) тангенциальную составляющую скорости частицы на угловую, получим выражение $\frac{\partial p}{\partial l} = \rho \omega^2 l$, которое можно проинтегрировать. Получим

$$p_1 - p_0 = \frac{\rho \omega^2}{2} l^2. \quad (5)$$

Выражение (5) показывает рост давления пропорционально квадрату радиуса кривизны, а это означает, что осевая составляющая скорости течения жидкости v_z распределяется по свободной поверхности неравномерно, уменьшаясь от оси симметрии к стенке сосуда. Это приводит к деформации свободной поверхности, которая принимает форму, подобную первой стадии воронки выпуска («прогиб») [18] (рис. 3).

Рис. 3. Плоская схема распределения осевых составляющих скорости $v_z(r)$ и ускорения $a_z(r)$ по деформированной поверхности жидкости

Это означает, что осевые компоненты скорости и ускорения в уравнении (3) зависят от радиуса деформированной свободной поверхности, уменьшаясь от центра к периферии.

Удовлетворить граничным условиям задачи ($a_z(0) = g$; $a_z(R) = 0$) можно, если представить ускорение a_z в виде

$$a_z = g \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (6)$$

что соответствует экспериментально установленному факту – снижению уровня жидкости с постоянной скоростью ($a_z|_{r=R} = 0$). Подставляя в (3) зависимость (6) и известное из кинематики выражение для v_z : $v_z^2 = 2a_z z$, получим дифференциальное уравнение свободной поверхности

$$\frac{dz}{z} = \frac{2(R^2 - r^2)}{r^2} dr, \quad (7)$$

которое можно проинтегрировать:

$$\ln(zr) = -\frac{R^2}{r^2} + C, \quad (8)$$

где постоянная интегрирования C находится из условия $z = H$ при $r = R$. Окончательно уравнение плоского осевого сечения свободной поверхности примет вид

$$z = H \frac{R^2}{r^2} \exp\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) \quad (9)$$

для всех $r_0 \leq r \leq R$, где r_0 – радиус донного отверстия; H и R – текущие геометрические размеры параболоида.

В практических расчетах, например, при определении объемного расхода жидкости, величина z приобретает смысл среднего значения, которое вычисляется по известной формуле

$$\langle z \rangle = \frac{1}{R - r_0} \int_{r_0}^R H \frac{R^2}{r^2} \exp\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) dr. \quad (10)$$

После интегрирования и последующих сокращений выражение (10) для $\langle z \rangle$ запишется в виде

$$\langle z \rangle = H \left(\frac{r_0}{R}\right)^2, \quad (11)$$

а объемный расход становится равным

$$Q = s_0 \frac{r_0}{R} \sqrt{2gH}, \quad (12)$$

где s_0 – площадь донного отверстия.

Кроме объемного расхода можно получить формулу для скорости снижения свободной поверхности [1]: $v_z = \frac{R^2}{r^2} \sqrt{2gZ}$, которая для емкости формы параболоида вращения ($v_z = \text{const}$) становится равной

$$v_z = \left(\frac{R_0}{r_0}\right)^2 \sqrt{2gH_0}. \quad (13)$$

С другой стороны, $v_z = \frac{H_0}{T_0}$, откуда время полного опорожнения резервуара равно

$$T_0 = \frac{H_0}{v_z} = \left(\frac{r_0}{R_0}\right)^2 \sqrt{\frac{H_0}{2g}}. \quad (14)$$

Следует заметить, что криволинейность поверхности вращения, как, например, у параболоида, влияет на длительность опорожнения. Так, если сравнить конический и параболический сосуды при равных основных геометрических размерах (H_0 , R_0 , r_0), то время истечения из конуса будет в 2,5 раза меньше, чем из параболоида, хотя объем конуса при этом меньше объема параболоида всего лишь в 1,5 раза.

Результатом исследования стала разработка гидродинамической модели движения частиц идеальной жидкости по искривленным трубкам тока, позволяющая:

- а) обнаружить эффект деформации свободной поверхности;
- б) выявить неравномерность распределения осевой скорости частиц жидкости по свободной поверхности;

в) объяснить причину равномерного снижения уровня жидкости в сосуде в процессе истечения;

г) получить аналитические зависимости основных гидродинамических характеристик истечения из донного отверстия сосудов типа параболоида вращения.

Предложенная гидродинамическая модель истечения жидкости может быть использована для решения прикладных и фундаментальных проблем, а также в учебном процессе при изучении курса механики жидкости и газа.

В ходе дальнейших исследований будет проведен эксперимент по формированию свободной поверхности параболоида.

Литература

1. Штеренлихт Д.В. Гидравлика. – М.: Колос, 2005. – 656 с.
2. Штарев А.А. Экспериментальное исследование расхода при нестационарном истечении жидкости из заполненной емкости // Известия РАН. МЖГ. – 2005. – № 2. – С. 114–122.
3. Китаев Д.Н., Русанов Н.А. Расчет времени самотечного слива светлых нефтепродуктов на автозаправочных станциях // Градостроительство. Инфраструктура. Коммуникации. – 2017. – № 2 (7). – С. 66–72.
4. Кумицкий Б.М., Тульская С.Г., Апарин М.А., Сарычев М.А. Реологическое моделирование истечения жидкости при переменном напоре из вертикального трубопровода // Градостроительство. Инфраструктура. Коммуникации. – 2017. – Вып. 4 (9). – С. 19–23.
5. Ищенко В.П., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Теоретическое и экспериментальное исследование воронкообразования при истечении жидкости из осесимметричных емкостей // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2008. – № 4. – С. 20–25.
6. Сабельников В.И. Определение времени опорожнения резервуара с жидкостью при образовании воронки // Теплоэнергетика. – 2000. – № 6. – С. 60–64.
7. Зонтов В.А. Инженерная и рудная геофизика. – М.: Наука, 2007. – С. 179–180.
8. Hirt C.W., Nicols B.D. Volume of Fluid method for the dynamics of free Boundaries // J. Comput. Physics. – 1981. – V. 39. – P. 201–225.
9. Кумицкий Б.М., Саврасова Н.А. Исследование вязкости аномальных жидкостей методом ротационной вискозиметрии // Инженерные системы и сооружения. – 2014. – Т. 3, № 4 (17). – С. 198–201.
10. Калашник М.В. Формирование вихревой воронки стоком массы в модели мелкой воды // Известия РАН. МЖГ. – 2004. – № 2. – С. 120–132.
11. Карликов В.П., Розин А.В., Толоконников С.Л. К проблеме воронкообразования при истечении жидкости из сосудов // Известия РАН. МЖГ. – 2008. – № 3. – С. 568–581.
12. Исамян С.М. О воронкообразовании при осесимметричном истечении жидкости из донных отверстий // Известия АН Армянской ССР. – 1969. – Т. 6. – С. 257–265.
13. Павельев А.А., Штарев А.А. Эксперимент по формированию вихря при вытекании жидкости из бака // Известия РАН. МЖГ. – 2001. – № 5. – С. 203–207.

14. Беляев И.М., Шандоров Г.С. К вопросу воронкообразования без вращения при сливе через донные отверстия // Гидромеханика. – 1965 – Вып. 2. – С. 171–188.
15. Мингалеева Г.Р. Механика движения жидкости и газа по спирали на участках крупного поворота тракта // Письма в ЖТФ. – 2002. – Т. 28, вып. 15. – С. 79–85.
16. Амелькин В.В. Дифференциальные уравнения в приложениях. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
17. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Механика. – М.: Наука, 1979. – 520 с.
18. Аладьев С.В. Классические однородные структуры. Клеточные автоматы. – Таллин: Fultus Books, 2009. – 535 с.

Поступила в редакцию 11 февраля 2019 г.

UDK 532.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-1-15-23

Hydrodynamic model of the axisymmetric flow of an ideal fluid from the bottom opening of a rotational paraboloid shape reservoir

B.M. Kumitsky¹, N.A. Savrasova², E.R. Likhacev²

¹ *Voronezh State Technical University; Russia, 394006, Voronezh, 20-Anniversary of October st., 84; boris-kum@mail.ru;*

² *Military Educational and Scientific Centre of Air Forces “N.E. Zhukovsky and Y.A. Gagarin Air Force academy”; Russia, 394064, Voronezh, Starykh Bolshevikov st., 54a; nataly-savrasova@mail.ru*

The work deals with the axisymmetric emptying of the cubical content of a paraboloid rotation shape, preliminary filled with inviscid flowfield. The importance of this problem is to establish a link between the contents of the outflow process and the reservoir geometry.

Besides, an interesting feature of the research was revealed: when emptying vessels of a parabolic shape, the level of the free surface decreases uniformly.

To explain this anomaly and to obtain analytical dependencies of the main parameters of the outflow, a hydrodynamic model is proposed, which is based on the idea of the movement of fluid particles along curved current tubes. They completely fill the paraboloid and are bounded by the free surface and the plane of the bottom hole.

As a result of such a representation, a force acting on the fluid particle at the site of curvature of the tube, being perpendicular to the axis of the tube and directed toward the center of curvature was established. The reason for the emergence of this force can only be the pressure difference on opposite sides of the tube in the plane of rounding. This leads to the fact that the axial component of the flow velocity of the fluid is distributed unevenly over the cross section of the

reservoir, increasing from the wall to the axis of symmetry, and the free surface is deformed ("bends").

The analytical dependences of the main hydrodynamic characteristics of the outflow, including the formula for the rate of decrease in the level of a liquid, as well as the algebraic equation of the deformed free surface were obtained.

Keywords: *hydrodynamic model, current tube, rotation paraboloid, flowing.*

Received 11 February, 2019