УДК 517.946

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-4-95-101

М.М. Сиражудинов^{1, 2, 3}

Оценки погрешности усреднения периодической задачи для уравнения Бельтрами¹

¹ Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43 а; dzh-saida2012@yandex.ru;

² Дагестанский научный центр РАН; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45; sirazhmagomed@yandex.ru;

³ Дагестанский государственный институт народного хозяйства; Россия, 367008, г. Махачкала, ул. Д. Атаева, 5

В литературе известны два метода изучения различных аспектов усреднения недивергентных эллиптических операторов: метод интегрального тождества и метод асимптотических разложений. Эти методы различаются по математической технике и опираются на оценки типа оценок острого угла. При изучении скорости сходимости решения исходной задачи (зависящей от малого параметра ε) к решению усредненной задачи предпочтительней второй метод. В работе асимптотическими методами получены оценки погрешности усреднения порядка $O(\varepsilon)$, где ε – малый параметр периодической задачи для уравнения Бельтрами.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, усреднение, асимптотическое разложение.

Теория усреднения и G-сходимости дифференциальных операторов бурно развивается, с 70-х годов прошлого столетия. Этот новый раздел уравнений в частных производных имеет многочисленные приложения в физике, механике и других областях. Теории усреднения и G-сходимости посвящена обширная литература (см. монографии [1]–[4] и имеющуюся в них литературу).

Операторные оценки погрешности усреднения дивергентных эллиптических операторов второго порядка впервые были получены в работе М.Ш. Бирмана и Т.А. Суслиной [5], В.В. Жикова [6] (см. также обзорную работу [7]). В отмеченных работах получены оценки порядка $O(\varepsilon)$ для задач во всем пространстве и порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ для краевых задач (Дирихле, Неймана) в ограниченной области. Получены оценки как для одного уравнения, так и для систем уравнений. Операторные оценки локально-периодического усреднения и повторного усреднения (скалярных) дивергентных операторов второго порядка получены в работе С.Е. Пастуховой, Р.Н. Тихомирова [8].

Значительно менее изучены аналогичные оценки погрешности усреднения для недивергентных эллиптических операторов. Аналогичные оценки порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ были получены для краевых задач Дирихле и Римана–Гильберта. Для недивергентных эллиптических операторов второго порядка, удовлетворяющих условию Кордеса, получены оценки погрешности усреднения порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ для задачи Дирихле в ограниченной

---

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Грант № 16-01-00508-а).

области. Такого же порядка малости оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для обобщенных операторов Бельтрами, которые являются недивергентными эллиптическими операторами первого порядка, получены при минимальных условиях на коэффициенты (они измеримые, ограниченные, периодические, комплекснозначные функции) см. [9], [10]. Прорыв в изучении различных аспектов усреднения (получение нулевого и первого приближения, а для параболических уравнений также – стабилизация и центральная предельная теорема) недивергентных уравнений второго порядка с условием Кордеса в последние 30–35 лет был совершен в работах В.В. Жикова и М.М. Сиражудинова (см. [4] и имеющуюся там литературу). Связано это с искусственным использованием неравенств типа «неравенств острого угла». Для получения оценок усреднения для других краевых задач (в частности, периодической задачи), для недивергентных эллиптических уравнений эту технику еще предстоит приспособить. В работе при помощи асимптотических методов получены оценки погрешности усреднения порядка $O(\varepsilon)$ периодической задачи для уравнения Бельтрами с коэффициентом, зависящим от малого параметра ε .

Обозначения

$\mathbb{R}^2$ – плоскость, $Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область с кусочно–гладкой границей.

$$\partial_{\bar{z}} = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 + i\mathcal{D}_2), \partial_z = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 - i\mathcal{D}_2), \mathcal{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, j = 1, 2.$$

i – мнимая единица. $L_2(Q)$ – пространство Лебега комплекснозначных квадратично суммируемых функций. Скалярное произведение в $L_2(Q)$ дается равенством $(u, v)_{L_2(Q)} = \int_Q u \bar{v} dx$, $u, v \in L_2(Q)$, где $\bar{v}$ – функция, комплексно сопряженная функции v . $W_p^k(Q)$ – пространство Соболева комплекснозначных функций.

$\square_T$ – квадрат со стороной (длины T), параллельной оси координат (ячейка периодов). $\square = \square_1$ – единичный квадрат. Периодической будем называть функцию периода T по каждой переменной. $\langle u \rangle$ – среднее значение периодической функции u , т. е. $\langle u \rangle = T^{-2} \int_{\square_T} u(x) dx$. $L_p(\square_T)$, $W_p^1(\square_T)$, $p \geq 1$, – пространства Лебега и Соболева периодических функций. Скалярное произведение в $L_2(\square_T)$ задает равенство $(u, v)_{L_2(\square_T)} = \langle u \bar{v} \rangle$, $u, v \in L_2(\square_T)$. $W_2^{-1}(\square_T)$ – пространство, сопряженное $W_2^1(\square_T)$. Пространство, сопряженное $L_2(\square_T)$, отождествляем с $L_2(\square_T)$, что возможно в силу теоремы Рисса.

$\rightharpoonup$ – знак слабой сходимости в соответствующем пространстве.

Как известно, если $g(x)$ – периодическая функция, $g \in L_p(\square_T)$, $p \geq 1$, то тогда $g(\varepsilon^{-1}x) \rightharpoonup \langle g \rangle$ в $L_p(Q)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где Q – произвольная ограниченная область плоскости.

$W_0(Q)$ – подпространство $W_2^1(Q)$, элементы которого удовлетворяют соотношениям

$$u|_{\partial Q} = 0, \int_Q \operatorname{Im} u dx = 0.$$

В случае, когда это не вызывает недоразумений, как уравнение, так и оператор соответствующей краевой задачи обозначаем одним и тем же символом.

1. Предварительные сведения

В этом параграфе мы напомним известные результаты (необходимые в дальнейшем) по усреднению задачи Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами из работы [9].

1.1. Задача Римана–Гильберта

Рассмотрим следующую задачу Римана–Гильберта:

$$\begin{cases} A u \equiv \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u = f \in L_2(Q), \\ u \in W_0(Q), \end{cases} \quad (1.1)$$

где коэффициент $\mu = \mu(x)$ – измеримая ограниченная комплекснозначная функция, удовлетворяющая условию

$$\operatorname{vrai} \sup_{x \in Q} |\mu(x)| \leq k_0 < 1, \quad (1.2)$$

$k_0 > 0$ – постоянная (константа эллиптичности).

Задача Римана–Гильберта (1.1) однозначно разрешима для любой правой части из $L_2(Q)$, причем имеют место априорные оценки:

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q)}^2 \leq \operatorname{Re} \int_Q A u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u} \, dx, \quad (1.3)$$

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q)} \leq \|A u\|_{L_2(Q)} \leq (1 + k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q)}. \quad (1.4)$$

Оценки (1.3), (1.4) справедливы для любого элемента $u \in W_2^1(Q)$, удовлетворяющего условию $\operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0$; условие на мнимую часть не требуется, более того область Q здесь может быть и многосвязной. Первую из этих оценок называют *оценкой типа оценки острого угла*. Эта оценка позволяет применить лемму Лакса–Мильграма к задаче Римана–Гильберта и получить ее однозначную разрешимость.

В односвязной области с кусочно-гладкой границей выражение

$$\|u\|_{W_0(Q)} = \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q)}, \quad u \in W_0(Q),$$

задает в подпространстве $W_0(Q)$ норму, эквивалентную норме исходного пространства $W_2^1(Q)$, поэтому имеют место оценки

$$c_1 \|u\|_{W_2^1(Q)} \leq \|A u\|_{L_2(Q)} \leq c_2 \|u\|_{W_2^1(Q)}, \quad u \in W_0(Q), \quad (1.6)$$

где $c_1, c_2 > 0$ – постоянные, зависящие только от области Q и постоянной эллиптичности k_0 .

1.2. G-сходимость

Обозначим через $\mathcal{A}(k_0; Q)$ множество операторов Бельтрами (1.1).

Определение. Скажем, что последовательность операторов A_k из класса $\mathcal{A}(k_0; Q)$ *G-сходится* в области Q к оператору $A \in \mathcal{A}(k_0; Q)$ (и будем писать $A_k \xrightarrow{G} A$), если для любого $f \in L_2(Q)$ последовательность u_k решений задачи Римана–Гильберта $A_k u_k = f$, $u_k \in W_0(Q)$ сходится в $L_2(Q)^2$ к решению задачи Р-Г: $A u = f$, $u \in W_0(Q)$. *G-предел* определен единственным образом.

Как известно, класс $\mathcal{A}(k_0; Q)$ операторов Бельтрами компактен.

G-сходимость обладает следующим свойством сходимости «произвольных» решений: пусть $A_k \xrightarrow{G} A$, $u_k \rightarrow u$ в $W_2^1(Q)$, $f_k \rightarrow f$ в $L_2(Q)$

$A_k u_k = f_k$, тогда $A u = f$.

1.3. Усреднение задачи Римана–Гильберта

Рассмотрим задачу Римана–Гильберта:

² Сходимость в $L_2(Q)$ можно заменить на слабую сходимость в $W_2^1(Q)$. Эквивалентность полученных при этом определений следует из оценок (1.5) и компактности вложения $W_2^1(Q) \subset L_2(Q)$.

$$\begin{cases} A_\varepsilon \equiv \partial_{\bar{z}} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z u_\varepsilon = f \in L_2(Q), \\ u_\varepsilon \in W_0(Q) \end{cases} \quad (1.6)$$

где $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ – малый параметр $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$; $\mu(x) = \mu(x_1, x_2)$ – измеримая ограниченная комплекснозначная периодическая (периода T по каждой переменной) функция, удовлетворяющая условию эллиптичности (1.2) на всей плоскости. Очевидно, что оператор A_ε принадлежит классу $\mathcal{A}(k_0; Q)$. Скажем, что семейство $\{A_\varepsilon\}$ допускает усреднение, если $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В вопросах усреднения недивергентных уравнений важную роль играет ядро оператора A^* , сопряженного оператору периодической задачи:

$$\mathcal{A}u \equiv \partial_{\bar{z}} u + \mu(x) \partial_z u = f \in L_2(\square_T), \quad u \in W_2^1(\square_T). \quad (1.7)$$

Сформулируем результаты по периодической задаче.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Для периодической задачи имеет место «неравенство острого угла»

$$(1 - k_0) \langle |\partial_{\bar{z}} u|^2 \rangle \leq \operatorname{Re} \langle \mathcal{A}u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u} \rangle, u \in W_2^1(\square_T). \quad (1.8)$$

2) Периодическая задача (1.7) фредгольмова, причем ядро оператора $\mathcal{A}$ и ядро сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$ одномерны.

3) Один из базисных векторов p ядра $\mathcal{A}^*$ обладает свойством $\langle p \rangle = 1$.

4) Сопряженный оператор $\mathcal{A}^*: L_2(\square_T) \rightarrow W_2^{-1}(\square_T)$ определяется формулой

$$\mathcal{A}^* p = -\partial_z p - \partial_{\bar{z}}(\bar{\mu} p), \quad p \in L_2(\square_T), \quad (1.9)$$

где производные понимаются в смысле распределений.

Отметим, что утверждения 2) и 3) теоремы 1 есть следствия оценки острого угла (1.8).

Напомним теперь теорему об усреднении для задачи Римана–Гильберта.

Теорема 2. *Для семейства $A_\varepsilon = \partial_{\bar{z}} + \mu^\varepsilon \partial_z$ операторов (1.6), где $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, имеет место усреднение, причем коэффициент усредненного оператора*

$$A_0 = \partial_{\bar{z}} + \mu^0 \partial_z,$$

$\mu^0 = \langle \mu \bar{p} \rangle$ – постоянная, где p – базисный вектор из теоремы 1.

1.4. Задача на ячейке

Для применения асимптотических методов при усреднении операторов Бельтрами нам потребуются периодические решения следующей задачи:

$$\begin{cases} \mathcal{A} N \equiv \partial_{\bar{z}} N + \mu \partial_z N = \mu^0 - \mu, \\ N \in W_2^1(\square_T), \end{cases} \quad (1.10)$$

где $\mu^0 = \langle \mu \bar{p} \rangle$ – коэффициент усредненного уравнения. Справедлива следующая

Теорема 3. *Периодическая задача (1.10) разрешима, и решения представляются в виде суммы $N + c$, где $c \in \mathbb{C}$ – произвольная постоянная, $N \in W_2^1(\square_T)$ – решение (1.9) со средним, равным нулю $\langle N \rangle = 0$.*

Более того, найдется показатель повышенной суммируемости $q = q(k_0) > 2$, зависящий только от константы эллиптичности k_0 , такой, что

$$\begin{aligned} N &\in W_q^1(\square), \\ \max_{x \in \square_T} |N(x)| &\leq c(k_0), \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $c(k_0) > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0

2. Оценки погрешности усреднения периодической задачи

В этом параграфе изложены основные результаты работы.

2.1. Усреднение периодической задачи. Рассмотрим периодическую задачу:

$$\begin{cases} \mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \partial_{\bar{z}} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z u_\varepsilon = f - c_\varepsilon, & f \in L_2(\square), \\ u_\varepsilon \in W_2^1(\square), \langle u_\varepsilon \rangle = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\square$ – ячейка периодов с $T = 1$, $\varepsilon = n^{-1}$, $n \in \mathbb{N}$, – малый параметр, $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$; $\mu(x) = \mu(x_1, x_2)$ – измеримая ограниченная комплекснозначная периодическая (периода 1 по каждой переменной) функция, удовлетворяющая условию эллиптичности (1.2) на всей плоскости; $c_\varepsilon = \langle f \overline{p^\varepsilon} \rangle$ – постоянная, подобранная так, чтобы правая часть уравнения (2.1) была ортогональна ядру сопряженного оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^*: L_2(\square) \rightarrow W_2^{-1}(\square)$, $\mathcal{A}_\varepsilon^* P = -\partial_z P - \partial_{\bar{z}}(\overline{\mu^\varepsilon} P)$, $P \in L_2(\square)$ (см. (1.9), где $T = 1$). (Здесь мы учли, что одним из периодов функции $\mu^\varepsilon(x) = \mu(\varepsilon^{-1}x)$ является 1, так как $\mu(\varepsilon^{-1}x)$ функция $\varepsilon = n^{-1}$ периодическая.) Для того чтобы задача (2.1) имела периодические решения (периода 1) для всех правых частей, необходимо считать $\varepsilon = 1/n$, n – натуральное число. Легко видеть, что сопряженному однородному уравнению

$$\mathcal{A}_\varepsilon^* P = -\partial_z P - \partial_{\bar{z}}(\overline{\mu^\varepsilon} P) = 0, P \in L_2(\square),$$

удовлетворяет функция $P = p(\varepsilon^{-1}x)$, $x \in \square$, где $p(x)$ – базисный вектор из теоремы 1, где $T = 1$. Поэтому $c_\varepsilon = \langle f \overline{p^\varepsilon} \rangle$. Имеет место

Теорема 4. *Периодическая задача (2.1) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(\square)$, и имеет место априорная оценка*

$$c_1 \|u\|_{W_2^1(\square)} \leq \|\mathcal{A}_\varepsilon u\|_{L_2(\square)}, u \in W_2^1(\square), \langle u \rangle = 0, \quad (2.2)$$

где $c_1 > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 .

Доказательство следует из неравенства острого угла (1.8) и леммы Лакса–Мильграма.

Теорема 5 (Усреднение). *Семейство $u_\varepsilon \in W_2^1(\square)$, $\langle u_\varepsilon \rangle = 0$, решений периодической задачи (2.1) сходится в $L_2(\square)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению u_0 усредненной задачи*

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0 u_0 \equiv \partial_{\bar{z}} u_0 + \mu^0 \partial_z u_0 = f - \langle f \rangle, & f \in L_2(\square), \\ u_0 \in W_2^1(\square), \langle u_0 \rangle = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $\mu^0 = \langle \mu \overline{p} \rangle = \int_{\square} \mu(x) \overline{p(x)} dx$.

Доказательство. Из оценки (2.2) ввиду сходимости $c_\varepsilon \rightarrow \langle f \rangle$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует, что последовательность u_ε слабо сходится в $W_2^1(\square)$ к функции $u_0 \in W_2^1(\square)$, $\langle u_0 \rangle = 0$. Следовательно, имеет место и сходимость в $L_2(\square)$ (переход к подпоследовательности не требуется ввиду единственности усредненного оператора). Отсюда ввиду свойства сходимости «произвольных решений» (см. выше пункт 1.2), ввиду сходимости $c_\varepsilon \rightarrow \langle f \rangle$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и теоремы 2 об усреднении задачи Римана–Гильберта u_0 является решением усредненной периодической задачи (2.3).

2.2. Оценки усреднения. Пусть правая часть f задачи (2.1) принадлежит пространству $W_2^1(\square)$, и пусть u_ε – решение задачи (2.1). В качестве первого приближения к решению u_ε задачи (2.1) возьмем функцию

$$u_1^\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon N(\varepsilon^{-1}x) \partial_z u_0(x),$$

где $N(x)$ – решение задачи на ячейке (1.10), где $T = 1$, u_0 – решение усредненной задачи (2.3). Согласно свойству регулярности решений эллиптических операторов решение u_0 усредненной задачи (2.3) принадлежит пространству $W_2^2(\square)$. Очевидно, что функция u_1^ε принадлежит $W_2^1(\square)$.

Рассмотрим разность

$$v_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} u_\varepsilon - (u_1^\varepsilon - \varepsilon a_\varepsilon), a_\varepsilon = \int_{\square} N(\varepsilon^{-1}x) \partial_z u_0(x) dx.$$

Очевидно, что $v_\varepsilon \in W_2^1(\square)$, $\langle v_\varepsilon \rangle = 0$, и

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\varepsilon v_\varepsilon &= \langle f \rangle - \langle f p^\varepsilon \rangle + \\ &+ \varepsilon N(\varepsilon^{-1}x) \left(\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 u_0(x) + \mu(\varepsilon^{-1}x) \partial_{zz}^2 u_0(x) \right) \equiv \mathfrak{A}_\varepsilon + \varepsilon \mathfrak{B}_\varepsilon, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\mathfrak{A}_\varepsilon = \langle f \rangle - \langle f p^\varepsilon \rangle, \mathfrak{B}_\varepsilon = N(\varepsilon^{-1}x) \left(\partial_{\bar{z}\bar{z}}^2 u_0(x) + \mu(\varepsilon^{-1}x) \partial_{zz}^2 u_0(x) \right).$$

Отсюда, согласно неравенству острого угла (см. выше неравенство (1.8)), имеем

$$(1 - k_0) \langle |\partial_{\bar{z}} v_\varepsilon|^2 \rangle \leq \operatorname{Re} \langle \mathcal{A}_\varepsilon v_\varepsilon \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} v_\varepsilon} \rangle = \varepsilon \operatorname{Re} \langle \mathfrak{B}_\varepsilon \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} v_\varepsilon} \rangle.$$

(Здесь мы учли, что $\langle \mathfrak{A}_\varepsilon \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} v_\varepsilon} \rangle = 0$ ввиду $\mathfrak{A}_\varepsilon = \text{const}$). Следовательно, с учетом неравенства Пуанкаре отсюда легко получим

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon + \varepsilon a_\varepsilon\|_{W_2^1(\square)} \leq c\varepsilon \|\mathfrak{B}_\varepsilon\|_{L_2(\square)}, \quad (2.5)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 .

С учетом ограниченности N (см. (1.11)) получим

$$\|\mathfrak{B}_\varepsilon\|_{L_2(\square)} \leq c \|u_0\|_{W_2^2(\square)},$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 .

Отсюда и (2.5) вытекает

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon(x) + \varepsilon a_\varepsilon\|_{W_2^1(\square)} \leq c\varepsilon \|u_0\|_{W_2^2(\square)}$$

с постоянной $c > 0$, зависящей только от k_0 . Следовательно, ввиду очевидной оценки для постоянной a_ε : $|a_\varepsilon| \leq c \|u_0\|_{W_2^2(\square)}$ отсюда следует

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^1(\square)} \leq c\varepsilon \|u_0\|_{W_2^2(\square)} \quad (2.6)$$

с постоянной $c > 0$, зависящей только от k_0 . Из ограниченности N следует также оценка

$$\|u_1^\varepsilon - u_0\|_{L_2(\square)} \leq c\varepsilon \|u_0\|_{W_2^2(\square)},$$

из которой, согласно (2.6), получим

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\square)} \leq c\varepsilon \|u_0\|_{W_2^2(\square)} \quad (2.7)$$

с постоянной $c > 0$, зависящей только от k_0 .

Главным результатом по оценкам погрешности усреднения периодической задачи для уравнения Бельтрами является следующая

Теорема 6. Пусть правая часть f периодической задачи (2.1) для уравнения Бельтрами принадлежит пространству $W_2^1(\square)$, тогда имеют место оценки

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^1(\square)} &\leq c\varepsilon \|f\|_{W_2^1(\square)}, \\ \|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\square)} &\leq c\varepsilon \|f\|_{W_2^1(\square)}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 .

Так как u_0 – решение усредненной задачи (2.3), согласно эллиптическим оценкам [11] получим $\|u_0\|_{W_2^2(\square)} \leq c \|f\|_{W_2^1(\square)}$. Поэтому оценки (2.8) есть следствия оценок (2.6) и (2.7). Первая из оценок (2.8) – оценка разности точного решения задачи (2.1) и первого приближения, а вторая есть оценка скорости сходимости точного решения к решению усредненной задачи.

Литература

1. Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structure. – Amsterdam: North Holland, 1978.
2. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984.
3. Санчес-Паленсия Э. Неоднородные среды и теория колебаний. – М.: Мир, 1984.

4. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит, 1993.
5. Бирман М.Ш., Суслина Т.А. Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, № 5. – С. 1–108.
6. Жиков В.В. Об операторных оценках в теории усреднения // Докл. РАН. – 2005. – Т. 403, № 3. – С. 305–308.
7. Жиков В.В., Пастухова С.Е. Об операторных оценках в теории усреднения // УМН. – 2016. – Т. 71, № 3. – С. 27–122.
8. Пастухова С.Е., Тихомиров Р.Н. Операторные оценки повторного и локально-периодического усреднения // Доклады РАН. – 2017. – Т. 415, № 3. – С. 304–309.
9. Сиражудинов М.М. Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами // Матем. сб. – 2017. – Т. 208, № 4. – С. 87–110.
10. Сиражудинов М.М. Операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами // Даг. электр. матем. известия. – 2017. – Вып. 7. – С. 40–46.
11. Солонников В.А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дагласа–Л. Ниренберга. II // Тр. МИАН СССР. – 1966. – Т. 92. – С. 233–297.

Поступила в редакцию 4 октября 2018 г.

UDC 517.946

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-4-95-101

Estimates of the error of averaging periodic problems for the Beltrami equation

M.M. Sirazhudinov^{1, 2, 3}

¹ *Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; dzh-saida2012@yandex.ru;*

² *Dagestan Scientific Centre of Russian Academy of Sciences; Russia, 367001, Makhachkala, Gadzhiev st., 45; sirazhmagomed@yandex.ru;*

³ *Dagestan State University of National Economy; Russia, 367008, Makhachkala, Д. Атаев st., 5*

Two methods of studying various aspects of homogenization of non-divergent elliptic operators are known in the literature: the method of integral identity and the method of asymptotic expansions. These methods differ in mathematical techniques and are based on estimates of the type of acute angle estimates. In the study of the rate of convergence of the solution of the initial problem (depending on the small parameter ε) to the solution of the homogenized problem, the second method is preferable. In this paper, asymptotic methods are used to estimate the homogenization error of the order $O(\varepsilon)$, where ε is a small parameter, of the periodic problem for the Beltrami equation.

Keywords: *Beltrami equation, homogenization, asymptotic expansion.*

Received 4 October, 2018