УДК 517.946

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-4-89-94

З.Г. Меджидов^{1, 2}, Л.М. Джабраилова¹

Восстановление финитной функции в полосе по ее интегралам вдоль гипербол одного семейства

¹ Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; ziyaudinmedzhidov@yandex.ru;

² Дагестанский научный центр РАН; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45

Решается задача восстановления функции, заданной своими интегралами с весами по кривым второго порядка на плоскости, образующим двухпараметрическое семейство. Эта задача относится к задачам интегральной геометрии. В качестве кривых рассматриваются гиперболы на плоскости, а в качестве весовой функции – многочлен. Решение данной задачи сведено к решению интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода. Доказана единственность восстановления функции, получены также явные формулы обращения.

Ключевые слова: двухпараметрическое семейство гипербол, единственность восстановления функции, формула обращения, преобразование Фурье, интегральное уравнение Вольтерра.

1. Теорема единственности

Рассмотрим двухпараметрическое семейство равнобоковых гипербол

$$\Gamma(x, y) = \{(\xi, \eta): (\eta - c)^2 - (\xi - x)^2 = (c - y)^2, 0 \leq \eta \leq y \leq h\}, c > h > 0$$

на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$, параметризованных абсциссами центров x и полуосями $c - y$. Центры гипербол лежат на прямой $\eta = c$. В полосе

$$\Omega_h = \{(\xi, \eta): -\infty < \xi < \infty, 0 \leq \eta \leq h\}$$

попадает лишь часть нижней ветви $\eta = c - \sqrt{(c - y)^2 - (\xi - x)^2}$ каждой гиперболы.

Мы решаем задачу определения неизвестной функции $f(x, y)$ по заданным интегралам вдоль частей нижних ветвей гипербол семейства $\Gamma(x, y)$, попадающих в полосу Ω_h :

$$\int_{\Gamma(x, y) \cap \Omega_h} (c - \eta)^n f(\xi, \eta) d\xi = g(x, y), n \geq 1. \quad (1)$$

Аналогичные задачи с параболой, окружностями и кривыми эллиптического типа вместо гипербол и единичными весовыми функциями решены в работах [1]–[3]. В статье [4] доказана единственность решения задачи интегральной геометрии на семействе парабол с возмущением. В недавней работе В.П. Паламодова [5] описан метод получения формул обращения интегральных преобразований с весовыми функциями на поверхностях на многообразиях, основанный на порождающих функциях. В статье [6] доказана единственность задачи восстановления абсолютно интегрируемой в полосе функции по ее интегралам с весовой функцией $a(x, y, \xi, \eta)$ по гиперболам семейства $\Gamma(x, y)$. Функция a предполагается ограниченной в полосе Ω_h и аналитической по части переменных.

Функцию $f(x, y)$ мы будем искать в классе непрерывных финитных функций, носители которых лежат в полосе Ω_h . Для таких функций имеем

$$\int_{\Gamma(x,y) \cap \Omega_h} (c - \eta)^n f(\xi, \eta) d\xi = \int_{\Gamma(x,y)} (c - \eta)^n f(\xi, \eta) d\xi.$$

Из уравнения гиперболы $(\eta - c)^2 - (\xi - x)^2 = (c - y)^2$ находим $\xi = x \pm \delta$, где $\delta = \sqrt{(c - \eta)^2 - (c - y)^2}$. Имеем $d\xi = \frac{c - \eta}{\delta} d\eta$, на участке, где $\xi < x$ и $d\xi = -\frac{c - \eta}{\delta} d\eta$ на участке, где $\xi > x$. Переходя к интегралу по переменной η , запишем формулу (1) в виде

$$\int_0^y \frac{f(x - \delta, \eta) + f(x + \delta, \eta)}{\delta} (c - \eta)^{n+1} d\eta = g(x, y).$$

Применим к обеим частям полученного уравнения преобразование Фурье по переменной x :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-i\lambda x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \left[\int_0^y \frac{f(x - \delta, \eta) + f(x + \delta, \eta)}{\delta} (c - \eta)^{n+1} d\eta \right] dx = \\ &= \int_0^y \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} \frac{f(x - \delta, \eta) + f(x + \delta, \eta)}{\delta} (c - \eta)^{n+1} dx d\eta. \end{aligned}$$

Последнюю формулу можно записать в следующем виде:

$$\hat{g}(\lambda, y) = 2 \int_0^y \hat{f}(\lambda, \eta) \frac{(c - \eta)^{n+1} \cos(\lambda \sqrt{(c - \eta)^2 - (c - y)^2})}{\sqrt{(c - \eta)^2 - (c - y)^2}} d\eta; \quad (2)$$

здесь крышкой обозначены одномерные преобразования Фурье по первому аргументу. Уравнение (2) – это уравнение Вольтерра первого рода относительно переменной y с неизвестной функцией $\hat{f}(\lambda, \eta)$. В некоторых случаях такое уравнение может быть сведено к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, для которого известны теорема единственности и методы решения (см. [7], [8]). Мы сейчас проверим свойства функции ядра, при выполнении которых такое сведение оказывается возможным.

Заменим в формуле (2) y на t , затем проинтегрируем обе части полученного уравнения с ядром $(y - t)^{-\frac{1}{2}}$ по переменной t в пределах от 0 до y :

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{\hat{g}(\lambda, t)}{2\sqrt{y - t}} dt &= \int_0^y \int_0^t \hat{f}(\lambda, \eta) \frac{(c - \eta)^{n+1} \cos(\lambda \sqrt{(c - \eta)^2 - (c - t)^2})}{\sqrt{y - t} \sqrt{(c - \eta)^2 - (c - t)^2}} d\eta dt = \\ &= \int_0^y \hat{f}(\lambda, \eta) \int_{\eta}^y \frac{(c - \eta)^{n+1} \cos(\lambda \sqrt{(c - \eta)^2 - (c - t)^2})}{\sqrt{y - t} \sqrt{(c - \eta)^2 - (c - t)^2}} dt d\eta. \quad (3) \end{aligned}$$

При получении последней формулы мы поменяли порядок интегрирования.

Обозначим внутренний интеграл буквой K :

$$K(y, \eta, \lambda) = \int_{\eta}^y \frac{(c - \eta)^{n+1} \cos(\lambda \sqrt{(c - \eta)^2 - (c - t)^2})}{\sqrt{y - t} \sqrt{(c - \eta)^2 - (c - t)^2}} dt$$

– и покажем, что этот интеграл принимает конечное отличное от нуля значение при $\eta = y$. С этой целью сделаем замену переменной $t \rightarrow s$ по формуле

$$t = (y - \eta)s + \eta, 0 \leq s \leq 1.$$

В результате получим

$$K(y, \eta, \lambda) = \int_0^1 \frac{(c - \eta)^{n+1} \cos(\lambda \sqrt{(y - \eta)s} \sqrt{2(c - \eta) - (y - \eta)s})}{\sqrt{(1 - s)} \sqrt{s} \sqrt{2(c - \eta) - (y - \eta)s}} ds.$$

Положим здесь $\eta = y$:

$$K(y, y, \lambda) = \frac{(c - y)^{n+1}}{\sqrt{2(c - y)}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(1 - s)}} = \frac{\pi(c - y)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}} \neq 0.$$

Из последней формулы для $K(y, \eta, \lambda)$ видно, что производная по y этой функции имеет интегрируемую особенность вида $(y - \eta)^{-\frac{1}{2}}$ при $\eta = y$.

Продифференцируем обе части уравнения (3) по переменной y :

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{\hat{g}(\lambda, t)}{2\sqrt{y - t}} dt = \hat{f}(\lambda, y) \cdot K(y, y, \lambda) + \int_0^y \hat{f}(\lambda, \eta) K_y(y, \eta, \lambda) d\eta.$$

Поделим обе части на $K(y, y, \lambda) = \frac{\pi(c - y)^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}}$:

$$\hat{f}(\lambda, y) + \frac{\sqrt{2}}{\pi(c - y)^{n+\frac{1}{2}}} \int_0^y K_y(y, \eta, \lambda) \hat{f}(\lambda, \eta) d\eta = \frac{\sqrt{2}}{2\pi(c - y)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{\hat{g}(\lambda, t)}{\sqrt{y - t}} dt.$$

Получилось интегральное уравнение Вольтерра второго рода при каждом фиксированном λ , которое в классе непрерывных функций имеет единственное решение, причем это решение может быть найдено методом последовательных приближений или методом резольвент (см. [7; 8]).

Доказана следующая

Теорема. Пусть функция $g(x, y)$ известна для всех (x, y) из полосы Ω_h . Тогда уравнение (1) в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций с носителем в полосе Ω_h имеет единственное решение.

2. Формула обращения

Выведем другим методом явную формулу для преобразования Фурье $\hat{f}(\lambda, y)$ искомой функции. Для этого заменим в формуле (2) y на η , η на t и проинтегрируем полученное уравнение с ядром

$$\frac{(c - \eta) \operatorname{ch}(\lambda \sqrt{(c - \eta)^2 - (c - y)^2})}{\sqrt{(c - \eta)^2 - (c - y)^2}}$$

по переменной η от 0 до y :

$$\begin{aligned} & \int_0^y \frac{(c - \eta) \operatorname{ch}(\lambda \sqrt{(c - \eta)^2 - (c - y)^2})}{2\sqrt{(c - \eta)^2 - (c - y)^2}} \hat{g}(\lambda, \eta) d\eta = \\ & = \int_0^y \left(\int_0^\eta \hat{f}(\lambda, t) \frac{(c - t)^{n+1} \cos(\lambda \sqrt{(c - t)^2 - (c - \eta)^2})}{\sqrt{(c - t)^2 - (c - \eta)^2}} dt \right) \frac{(c - \eta) \operatorname{ch}(\lambda \sqrt{(c - \eta)^2 - (c - y)^2})}{\sqrt{(c - \eta)^2 - (c - y)^2}} d\eta. \end{aligned}$$

Поменяем в последнем интеграле порядок интегрирования:

$$\int_0^y \frac{(c - \eta) \operatorname{ch}(\lambda \sqrt{(c - \eta)^2 - (c - y)^2})}{2\sqrt{(c - \eta)^2 - (c - y)^2}} \hat{g}(\lambda, \eta) d\eta =$$

$$= \int_0^y (c-t)^{n+1} K_1(\lambda, y, t) \hat{f}(\lambda, t) dt; \quad (4)$$

здесь

$$K_1(\lambda, y, t) = \int_t^y \frac{(c-\eta) \operatorname{ch}(\lambda \sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2}) \cdot \cos(\lambda \sqrt{(c-t)^2 - (c-\eta)^2})}{\sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2} \cdot \sqrt{(c-t)^2 - (c-\eta)^2}} d\eta.$$

Вычислим последний интеграл. Для этого совершим замену переменной $\eta \rightarrow s$ по формуле

$$(c-\eta)^2 = (c-t)^2 + s^2((c-y)^2 - (c-t)^2), \quad 0 \leq s \leq 1$$

и заметим, что

$$\begin{aligned} (c-\eta) d\eta &= ((c-t)^2 - (c-y)^2) s ds, \\ (c-\eta)^2 - (c-y)^2 &= (1-s^2)((c-t)^2 - (c-y)^2) \\ (c-t)^2 - (c-\eta)^2 &= s^2((c-t)^2 - (c-y)^2). \end{aligned}$$

Получим

$$K_1(\lambda, y, t) = \int_0^1 \frac{\operatorname{ch}(\lambda \sqrt{(c-t)^2 - (c-y)^2} \sqrt{1-s^2}) \cdot \cos(\lambda \sqrt{(c-t)^2 - (c-y)^2}) s}{\sqrt{1-s^2}} ds.$$

Воспользуемся известной формулой (см., например, [9])

$$\int_0^a \frac{\operatorname{ch}(c\sqrt{a^2 - x^2})}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos bx \, dx = \frac{\pi}{2}, \quad b = c > 0, a > 0.$$

Согласно этой формуле

$$K_1(\lambda, y, t) = \frac{\pi}{2}.$$

Подставим в (4)

$$\pi \int_0^y (c-t)^{n+1} \hat{f}(\lambda, t) dt = \int_0^y \frac{(c-\eta) \operatorname{ch}(\lambda \sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2})}{\sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2}} \hat{g}(\lambda, \eta) d\eta.$$

Продифференцируем обе части по y и получим искомую формулу обращения:

$$\hat{f}(\lambda, y) = \frac{1}{\pi(c-y)^{n+1}} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{(c-\eta) \operatorname{ch}(\lambda \sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2})}{\sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2}} \hat{g}(\lambda, \eta) d\eta. \quad (5)$$

Придадим этой формуле другой вид, представив подынтегральную функцию в виде $\hat{g}(\lambda, \eta) = \int_0^\eta \hat{g}'_\tau(\lambda, \tau) d\tau$, ($\hat{g}(\lambda, 0) = 0$ в силу формулы (2)) и произведем выкладки, используя перемену порядка интегрирования и интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} & \int_0^y \frac{(c-\eta) \operatorname{ch}(\lambda \sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2})}{\sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2}} \hat{g}(\lambda, \eta) d\eta = \\ &= \int_0^y \hat{g}'_\tau(\lambda, \tau) d\tau \int_\tau^y \frac{(c-\eta) \operatorname{ch}(\lambda \sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2})}{\sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2}} d\eta = \\ &= - \int_0^y \hat{g}'_\tau(\lambda, \tau) d\tau \int_\tau^y \operatorname{ch}(\lambda \sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2}) d\sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^y \hat{g}'_\tau(\lambda, \tau) \frac{\text{sh}(\lambda \sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2})}{\lambda} \Big|_{\eta=\tau}^{\eta=y} d\tau = \\
 &= \int_0^y \frac{\text{sh}(\lambda \sqrt{(c-\tau)^2 - (c-y)^2})}{\lambda} \hat{g}'_\tau(\lambda, \tau) d\tau; \\
 &\frac{\partial}{\partial y} \int_0^y \frac{(c-\eta) \text{ch}(\lambda \sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2})}{\sqrt{(c-\eta)^2 - (c-y)^2}} \hat{g}(\lambda, \eta) d\eta = \\
 &= \int_0^y \frac{(c-y) \text{ch}(\lambda \sqrt{(c-\tau)^2 - (c-y)^2})}{\sqrt{(c-\tau)^2 - (c-y)^2}} \hat{g}'_\tau(\lambda, \tau) d\tau.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\hat{f}(\lambda, y) = \frac{1}{\pi(c-y)^n} \int_0^y \frac{\text{ch}(\lambda \sqrt{(c-\tau)^2 - (c-y)^2})}{\sqrt{(c-\tau)^2 - (c-y)^2}} \hat{g}'_\tau(\lambda, \tau) d\tau. \quad (6)$$

Легко заметить, что приведенные выше преобразования интегралов, приведшие к формуле (6), законны при условии, что функция $\hat{g}(\lambda, \tau)$ абсолютно непрерывна по переменной τ при всех значениях λ .

Литература

1. Бегматов А.Х., Сеидуллаев А.К., Пиримбетов А.О. Задачи интегральной геометрии в полосе на семействах параболических кривых // Докл. АН ВШ РФ. – 2012. – № 2 (19). – С. 6–15.
2. Бегматов А.Х., Джайков Г.М. О восстановлении функции по сферическим средним // Докл. АН ВШ РФ. – 2013. – № 1 (20). – С. 6–15.
3. Бегматов А.Х., Петрова Н.Н. Задача интегральной геометрии с возмущением на кривых эллиптического типа в полосе // Докл. АН ВШ РФ. – 2011. – Т. 436, № 2. – С. 151–154.
4. Лаврентьев М.М. Задача интегральной геометрии на плоскости с возмущением // СМЖ. – 1996. – Т. 37, № 4. – С. 851–857.
5. Паламодов В.П. Новые подходы к обратным задачам рассеяния // УМН. – 2016. – Т. 71, вып. 3 (429). – С. 123–148.
6. Меджидов З.Г. О единственности восстановления суммируемой в полосе функции, заданной интегралами вдоль дуг одного двухпараметрического семейства гипербола // ДЭМИ. – 2016. – Вып. 6. – С. 83–89.
7. Краснов М.Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – М.: Наука, 1975. – 304 с.
8. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – М.: ИЛ, 1960. – 300 с.
9. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1993. – 753 с.
10. Романов В.Г. Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа. – Новосибирск: Наука, 1972. – 163 с.

Поступила в редакцию 1 октября 2018 г.

UDC 517.946

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-4-89-94

Reconstruction of a finite function in a strip by its integrals along hyperbolas in the same family

Z.G. Medzhidov^{1,2}, L.M. Dzhabrailova¹

¹ *Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; ziyaudinmedzhidov@yandex.ru;*

² *Dagestan Scientific Centre of RAS; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45*

The problem of reconstruction of the function given by its integrals with weights on the second order curves on a plane forming a two-parameter family is solved. This problem is related to the problems of integral geometry. Hyperbolas on the plane are considered as curves, and a polynomial is considered as a weight function. The solution of this problem is reduced to the solution of the Volterra integral equation of the second kind. The uniqueness of the function reconstruction is proved, and explicit inversion formulas are obtained.

Keywords: *the two-parameter family of hyperbole, uniqueness of reconstruction of function, inversion formula, Fourier transform, integral equation of Volterra.*

Received 1 October, 2018