УДК 517.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-4-84-88

Р.Х. Макаова**Аналог задачи Гурса для обобщенного уравнения Аллера**

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН; Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а; makaova.ruzanna@mail.ru

В работе исследован аналог задачи Гурса для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля. Путем введения новой искомой функции, исследуемая задача сводится к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Далее, относительно искомой функции исследуемая задача редуцируется к уравнению Вольтерра второго рода с ядром, имеющим слабую особенность, и с непрерывной внутри области правой частью. Согласно общей теории линейных интегральных уравнений второго рода, полученное уравнение разрешимо единственным образом в классе регулярных функций. Стало быть, доказано существование единственного регулярного решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: обобщенное уравнение Аллера, задача Гурса, оператор дробного интегро-дифференцирования.

Введение

В области $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < T\}$ рассматривается уравнение вида

$$D_{0,y}^{\alpha} u(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} [a u(x, y) + b D_{0,y}^{\alpha} u(x, y)] + f(x, y), \quad 0 < \alpha < 1, \quad (1)$$

где a, b – заданные положительные числа; $f = f(x, y)$ – заданная функция из класса $C(\overline{\Omega})$; $u = u(x, y)$ – искомая действительная функция.

Здесь $D_{0,y}^{\alpha}$ – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана–Лиувилля по переменной y порядка α с началом в точке 0 и с концом в точке y , определяемый следующим образом [1, с. 9]:

$$D_{0,y}^{\alpha} v(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^y \frac{v(t)}{(y-t)^{\alpha+1}} dt, \quad \text{если } \alpha < 0,$$

$$D_{0,y}^{\alpha} v(t) = v(y), \quad \text{если } \alpha = 0,$$

$$D_{0,y}^{\alpha} v(t) = \frac{\partial^{[\alpha]+1}}{\partial y^{[\alpha]+1}} D_{0,y}^{\alpha-[\alpha]-1} v(t), \quad \text{если } \alpha > 0,$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера; $[\alpha]$ – целая часть числа α , так что $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$.

Уравнение (1) при $\alpha = 1$ и $f(x, y) = 0$ совпадает с уравнением Аллера [2]

$$\frac{\partial u}{\partial y} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2}, \quad (2)$$

которое лежит в основе математического моделирования почвенной влаги [3, с. 136]. Уравнение (2) относят к уравнениям псевдопараболического типа [4, 5], хотя оно является уравнением гиперболического типа. Исследованию различных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка и, в частности, для уравнения Аллера посвящены работы [6–11]. В работе [12] исследована вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера вида (1) и найдено явное представление регулярного решения.

В данной работе исследуется аналог задачи Гурса для уравнения (1). Методом редукции исследуемой задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода доказана теорема о существовании единственного регулярного решения исследуемой задачи.

Постановка задачи и полученный результат

Под регулярным решением уравнения (1) будем понимать функцию $u = u(x, y)$ такую, что $y^{1-\alpha}u \in C(\overline{\Omega})$, $D_{0y}^\alpha u$, $D_{0y}^\alpha u_{xx} \in C(\Omega)$, и удовлетворяющую уравнению (1).

Исследуется следующая

Задача. Найти регулярное в области Ω решение $u = u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_{0y}^{\alpha-1} u(x, y) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq r \quad (3)$$

и граничным условиям

$$u(r, y) = \tau_r(y), \quad u_x(r, y) = \nu_r(y), \quad 0 < y \leq T, \quad (4)$$

где $\varphi(x) \in C^2[0, r]$ и $\tau_r(y), \nu_r(y) \in C^1[0, T]$.

Справедлива следующая

Теорема. Задача (3), (4) для уравнения (1) имеет, и притом единственное регулярное решение.

Действительно, в уравнение (1) введем новую искомую функцию $v = v(x, y)$ по формуле

$$v(x, y) = D_{0y}^\alpha u(x, y) + \frac{a}{b} u(x, y). \quad (5)$$

Решение нелокальной задачи Коши (3) для уравнения вида (5) выписывается в виде [1, с. 92]:

$$u(x, y) = \varphi(x) y^{\alpha-1} E_{1/\alpha} \left[-\frac{a}{b} y^\alpha; \alpha \right] + \int_0^y (y-\eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha} \left[-\frac{a}{b} (y-\eta)^\alpha; \alpha \right] v(x, \eta) d\eta, \quad (6)$$

где

$$E_{1/\alpha}[z, \mu] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu)}$$

– функция типа Миттаг–Леффлера переменной z порядка $1/\alpha > 0$ и при $\mu = 1$ совпадает с функцией Миттаг–Леффлера [13, с. 117].

Известно [1, с. 97], что условие (3) эквивалентно условию

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{1-\alpha} u(x, y) = \frac{\varphi(x)}{\Gamma(\alpha)}, \quad 0 \leq x \leq r. \quad (7)$$

Из (5) и (6) получим, что

$$D_{0y}^{\alpha} u(x, \eta) = v(x, y) - \frac{a}{b} u(x, y) = v(x, y) - \frac{a}{b} \varphi(x) y^{\alpha-1} E_{1/\alpha} \left[-\frac{a}{b} y^{\alpha}; \alpha \right] - \\ - \frac{a}{b} \int_0^y (y-\eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha} \left[-\frac{a}{b} (y-\eta)^{\alpha}; \alpha \right] v(x, \eta) d\eta. \quad (8)$$

Подставляя (5) и (8) в уравнение (1), приходим относительно функции $v = v(x, y)$ к уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{b} v = g(x, y), \quad (9)$$

где

$$g(x, y) = -\frac{a}{b^2} \int_0^y (y-\eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha} \left[-\frac{a}{b} (y-\eta)^{\alpha}; \alpha \right] v(x, \eta) d\eta - \\ - \frac{a}{b^2} \varphi(x) y^{\alpha-1} E_{1/\alpha} \left[-\frac{a}{b} y^{\alpha}; \alpha \right] - \frac{1}{b} f(x, y).$$

Решение уравнения (9) представимо в виде

$$v(x, y) = C_1(y) e^{\frac{x}{\sqrt{b}}} + C_2(y) e^{-\frac{x}{\sqrt{b}}} + \sqrt{b} \int_x^r sh \left[\frac{1}{\sqrt{b}} (x-\xi) \right] g(\xi, y) d\xi, \quad (10)$$

где $C_1(y), C_2(y) \in C[0, T] \cap L[0, T]$.

Из (5) в силу условий (4) имеем, что

$$v(r, y) = D_{0y}^{\alpha} \tau_r(\eta) + \frac{a}{b} \tau_r(y) = \tau_r^*(y), \quad 0 < y \leq T, \quad (11)$$

$$v_x(r, y) = D_{0y}^{\alpha} v_r(\eta) + \frac{a}{b} v_r(y) = v_r^*(y), \quad 0 < y \leq T. \quad (12)$$

Согласно (11) и (12) должны выполняться следующие равенства:

$$C_1(y) e^{\frac{r}{\sqrt{b}}} + C_2(y) e^{-\frac{r}{\sqrt{b}}} = \tau_r^*(y),$$

$$C_1(y) e^{\frac{r}{\sqrt{b}}} - C_2(y) e^{-\frac{r}{\sqrt{b}}} = \sqrt{b} v_r^*(y),$$

с учетом которых (10) примет вид

$$v(x, y) = ch \left[\frac{1}{\sqrt{b}} (x-r) \right] \tau_r^*(y) + \sqrt{b} sh \left[\frac{1}{\sqrt{b}} (x-r) \right] v_r^*(y) + \sqrt{b} \int_x^r sh \left[\frac{1}{\sqrt{b}} (x-\xi) \right] g(\xi, y) d\xi.$$

Введя следующие обозначения

$$f^*(x, y) = ch \left[\frac{1}{\sqrt{b}} (x-r) \right] \tau_r^*(y) + \sqrt{b} sh \left[\frac{1}{\sqrt{b}} (x-r) \right] v_r^*(y) - \\ - \frac{a}{b^{3/2}} y^{\alpha-1} E_{1/\alpha} \left[-\frac{a}{b} y^{\alpha}; \alpha \right] \int_x^r sh \left[\frac{1}{\sqrt{b}} (x-\xi) \right] \varphi(\xi) d\xi - \frac{1}{\sqrt{b}} \int_x^r sh \left[\frac{1}{\sqrt{b}} (x-\xi) \right] f(\xi, y) d\xi, \\ K(x, y; \xi, \eta) = (y-\eta)^{\alpha-1} E_{1/\alpha} \left[-\frac{a}{b} (y-\eta)^{\alpha}; \alpha \right] sh \left[\frac{1}{\sqrt{b}} (x-\xi) \right], \quad (13)$$

последнее равенство перепишем следующим образом:

$$v(x, y) + \frac{a}{b^{3/2}} \int_{x_0}^{x,y} K(x, y; \xi, \eta) v(\xi, \eta) d\eta d\xi = f^*(x, y). \quad (14)$$

Таким образом, решение задачи (7), (11), (12) для уравнения (1) в области Ω редуцировано к решению уравнения (14). Уравнение (14) является интегральным уравнением с ядром $K(x, y; \xi, \eta)$, имеющим слабую особенность. Уравнение (14) всегда имеет, и притом единственное решение $v = v(x, y) \in C_\alpha(\overline{\Omega})$, которое может быть построено итерационным методом. Здесь $C_\alpha(\overline{\Omega})$ есть полное метрическое пространство с нормой $\|v\| = \max_{\overline{\Omega}} y^{1-\alpha} |v(x, y)|$. После того как найдена функция $v = v(x, y)$, решение $u = u(x, y)$ задачи (3), (4) для уравнения (1) выписывается по формуле (6).

Литература

1. *Нахушев А.М.* Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
2. *Hallaire M.* L'eau et la productions vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique. – 1964. – № 9.
3. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
4. *Нахушев А.М.* Об одном классе нагруженных уравнений в частных производных дробного порядка // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2012. – Т. 14, № 1. – С. 51–57.
5. *Showalter R.E., Ting T.W.* Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. – 1970. – Vol. 1, № 1. – P. 1–26.
6. *Barenblatt G.I., Zheltov Iu.P., Kochina I.N.* Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks [strata] // PMM. – 1960. – Vol. 24, № 5. – P. 852–864.
7. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in one space variable // Differ. Equations. – 1972. – Vol. 12, № 3. – P. 559–565.
8. *Yangarber V.A.* The mixed problem for a modified moisture-transfer equation // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1967. – Vol. 8, № 1. – P. 62–64.
9. *Шхануков М.Х.* О некоторых краевых задачах для уравнений третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 4. – С. 689–699.
10. *Кожанов А.И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 6. – С. 815–826.
11. *Макаова Р.Х.* Задача Трикоми для одного уравнения смешанного типа // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2015. – Т. 17, № 1. – С. 22–24.
12. *Макаова Р.Х.* Вторая краевая задача для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2015. – Т. 17, № 3. – С. 35–38.
13. *Джрбабян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной плоскости. – М.: Наука, 1966. – 671 с.

Поступила в редакцию 25 сентября 2018 г.

UDC 517.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-4-84-88

The analogue to the Goursat problem for the generalized Hallaire equation

R.Kh. Makaova

Institute of Applied Mathematics and Automation of KBSC RAS; Russia, 360000, Nalchik, Shortanov st., 89a; makaova.ruzanna@mail.ru

The analogue to the Goursat problem for the generalized Hallaire equation with fractional Riemann–Liouville derivative is analysed in the article. Introducing a new unknown function, the problem under consideration reduces to solving the Cauchy problem for an ordinary second-order differential equation. Further, with respect to the unknown function, the problem under consideration is reduced to a Volterra equation of the second kind with a kernel having a weak singularity and with a right-hand side that is continuous inside the domain. According to the general theory of linear integral equations of the second kind, the equation obtained is uniquely solvable in the class of regular functions. Hence, the existence of a unique regular solution to the problem under study has been proved.

Keywords: *generalized Hallaire equation, Goursat problem, fractional integro-differential operator.*

Received 25 September, 2018