МАТЕМАТИКА

УДК 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-4-80-83

М.С. Алиев

Об одной системе функций Маркова

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; aliev.mingazhudin@yandex.ru

Известно, что система натуральных степеней аргумента образует систему Маркова на любом сегменте, расположенном строго правее начала координат. В данной заметке доказывается следующее: чтобы система натуральных степеней образовала систему Маркова на сегменте, содержащем внутри начало координат, необходимо и достаточно, была первая функция была тождественно равна единице и разности между соседними степенями были равны нечетным числам.

Ключевые слова: определитель, система Чебышева, система Маркова, Стилтес.

Систему [1] вещественных функций $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$, определенных на $[a, b]$, называют системой Чебышева (T_n -системой) порядка n , если каждый полином $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \alpha_k u_k(x)$ ($\sum_{k=0}^n \alpha_k^2 > 0$) имеет на $[a, b]$ не более n корней.

Требование на количество корней полинома в определении системы Чебышева равносильно условию: определитель

$$D \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & \dots & u_n \\ x_0 & x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \det[u_i(x_j)]_{i,j=0}^n \neq 0 \text{ при любых } a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b.$$

Систему функций $u_0(x), u_1(x), \dots, u_n(x)$ определенных на $[a, b]$, называют системой Маркова (M_n -системой) порядка n , если каждая из систем $u_0(x), u_1(x), \dots, u_m(x)$ ($m = 0, 1, \dots, n$) будет T_m -системой на $[a, b]$.

Классическим примером M_n -системы является система функций $1, x, x^2, \dots, x^n$. Определитель Вандермонда-

$$D \begin{pmatrix} 1, x, \dots, x^n \\ x_0, x_1, \dots, x_n \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) > 0$$

далее подобное произведение обозначим через $\Pi(0, 1, \dots, n)$ при $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$ или по основной теореме алгебры любой нетривиальный многочлен $\sum_{k=0}^n \alpha_k x^k$ имеет на $[a, b]$ не более n корней. Функции $x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n}$ образуют M_n -систему на любом интервале $[a, b]$ при условии

$$0 < a < b \text{ и } 0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n.$$

В настоящей заметке найдены условия, которые нужно наложить на функции $x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n}$, чтобы они образовали M_n -систему на $[a, b]$ при $a < 0 < b$.

Доказательство проводим двумя способами: определяя знаки соответствующих определителей и опираясь на структуру систем Маркова [1]. Ввиду громоздкости вычислений первым способом доказываем положительность определителей в частных случаях: $\alpha_{k+1} - \alpha_k = 3, 5, 7, \dots$ и фиксированном k .

Теорема. Для того чтобы функции $x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n}$ ($\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n$) образовали M_n -систему на $[a, b]$ ($a < 0 < b$), необходимо и достаточно:

1) $\alpha_0 = 0$,

2) каждая разность $\alpha_{k+1} - \alpha_k = 2i + 1, k = 1, 2, \dots, n-1; i = 0, 1, 2, \dots$

Достаточность. Функция x^{α_0} должна образовать M_0 -систему.

Следовательно, $\alpha_0 = 0$ и $x^{\alpha_0} \equiv 1$.

Пусть $\alpha_1 - \alpha_0 = 3 - 0 = 3, \alpha_{k+1} - \alpha_k = 1, k = 1, 2, \dots, n-1$, то есть рассмотрим систему функций $1, x^3, x^4, \dots, x^n$. Определитель

$$D \begin{pmatrix} 1, x^3, & x^4, \dots, & x^n \\ x_1, & x_2, \dots, & x_{n-1} \end{pmatrix} = \prod (1, 2, \dots, n-1) \left[\sum_1^{n-1} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{n-2}}^2 + \right. \\ \left. + \sum_1^{n-1} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{n-3}}^2 x_{i_{n-2}} x_{i_{n-1}} \right] \quad [7],$$

где в первой сумме $C_{n-1}^{n-2} = n-1$ слагаемых, во второй $C_{n-1}^2 \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ слагаемых. Каждый индекс i_k принимает значения от 1 до $n-1$, и слагаемые отличаются друг от друга хотя бы одним индексом.

$$D \begin{pmatrix} 1 & x^3 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = \prod(1, 2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) = \prod(1, 2) \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2) > 0;$$

$$D \begin{pmatrix} 1 & x^3 & x^4 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} = \prod(1, 2, 3)(\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3}) = \\ = \prod(1, 2, 3) \sum_1^3 x_{i_1}^2 (x_{i_2} + x_{i_3})^2.$$

В общем случае $4 \leq m \leq n$ для определения знака определителя воспользуемся непрерывностью функций x^i и тем, что $a < 0 < b$.

Пусть $a = x_0 \leq x_1 < \dots < x_{m-1} \leq x_m = b$ – произвольные точки и $x_{k-1} < 0 < x_{k+1}, k = 1, 2, \dots, m-1$.

$$\text{Sign } D \begin{pmatrix} 1 & x^3 \dots & x^m \\ x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, & x_{k+1}, \dots & x_{m-1} \end{pmatrix} = \\ = \text{sign } D \begin{pmatrix} 1 & x^3 \dots & x^m \\ x_1, \dots, x_{k-1}, 0, & x_{k+1}, \dots & x_{m-1} \end{pmatrix} = \\ = \text{sign} |x_1^3| \dots |x_{k-1}^3| x_{k+1}^3 \dots x_{m-1}^3 D \begin{pmatrix} 1 & x \dots & x^{m-3} \\ x_1 \dots & x_{k-1}, x_{k+1} \dots & x_{m-1} \end{pmatrix} = \\ = \text{sign} |x_1^3| \dots |x_{k-1}^3| x_{k+1}^3 \dots x_{m-1}^3 \prod (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_{m-1}) > 0.$$

Рассмотрим теперь систему функций $1, x, x^4, x^5, \dots, x^n$. Для любого $4 \leq m \leq n$ при $x_{k-1} < 0 < x_{k+1}$ имеем

$$\text{sign } D \begin{pmatrix} 1 & x & x^4 \dots & x^m \\ x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, & x_{m-1} \end{pmatrix} = \text{sign} |x_1| \dots |x_{k-1}| x_{k+1} \dots x_{m-1}; \\ D \begin{pmatrix} 1 & x^3 x^4 \dots & x^{m-1} \\ x_1 \dots & x_{k-1}, x_{k+1}, \dots & x_{m-1} \end{pmatrix} > 0, \text{ учитывая результат предыдущего случая.}$$

Далее методом математической индукции получаем, что функции $1, x, x^2, \dots, x^p, x^{p+3}, x^{p+4}, \dots, x^n$ образуют систему Маркова при $0 \leq p \leq n-3$.

По этой схеме рассуждений доказываем теорему при $\alpha_1 - \alpha_0 = 5; \alpha_1 - \alpha_0 = 7; \dots$

Рассмотрим другие случаи, когда пропущенные функции расположены в разных местах ввиду громоздкости.

Необходимость. Допустим $\alpha_p - \alpha_{p-1} = 2$, остальные разности равны единице.
 $D \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^{p-2} & x^p \\ & x_1 & x_2 & \dots & x_p \end{pmatrix} = \prod (x_1, x_2, \dots, x_p)(x_1 + x_2 + \dots + x_p) = 0$ на $[a, b]$ при $a < 0 < b$.
 $D \begin{pmatrix} 1 & x^4 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(x_2^3 + x_2^2 x_1 + x_2 x_1^2 + x_1^3) = 0$ на $[a, b]$ при $a < 0 < b$.

Докажем теорему для произвольных степеней, удовлетворяющих условиям теоремы, опираясь на структуру систем Маркова [1]:

Функции $1, u_1(x) = \int_0^x d\sigma_1(t_1), u_2(x) = \int_0^x d\sigma_1(t_1) \int_0^{t_1} d\sigma_2(t_2), \dots, u_n(x) = \int_0^x d\sigma_1(t_1) \int_0^{t_1} d\sigma_2(t_2) \dots \int_0^{t_{n-1}} d\sigma_n(t_n)$ образуют систему Маркова на $[a, b]$, только тогда, когда $\sigma_1(t), \sigma_2(t), \dots, \sigma_n(t)$ непрерывны справа в каждой точке $[a, b]$ ($\sigma_1(t)$ – непрерывна), т. е. строго возрастающие функции.

Это достаточная в нашем случае, более простая формулировка критерия, и вычисления облегчаются наличием в $[a, b]$ точки $x = 0$.

Чтобы показать, что функции $1, x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_n}$ образуют систему Маркова, положим $\sigma_k(x) = c_k x^{\alpha_k - \alpha_{k-1}}$, $k = 1, 2, \dots, n$ и последовательно определим значения c_k . Эти функции непрерывны и при $\alpha_k - \alpha_{k-1}$ – нечетном числе монотонно возрастают на $[a, b]$. Рассмотрим пример системы функций, который не удастся решить определением знака определителей:

$$\begin{aligned} 1, x^3, x^8, x^9, x^{12}, x^{19}. \int_0^x d(t^3) &= x^3, \int_0^x d(t_1) \int_0^{t_1} d(c_2 t_2^5) = c_2 \int_0^x 3t_1^2 t_1^5 dt_1 = \\ &= 3c_2 \frac{x^8}{8} = x^8 \text{ при } c_2 = \frac{8}{3}. \sigma_3(x) = \frac{27}{20}x, \sigma_4(x) = 8x^3 \\ \int_0^x d(t_1) \int_0^{t_1} d\left(\frac{8}{3}t_2^5\right) \int_0^{t_2} d\left(\frac{27}{20}t_3\right) \int_0^{t_3} d(8t_4^3) \int_0^{t_4} d(c_5 t_5^7) &= \frac{81c_5}{2090} x^{19} = x^{19} \\ \text{при } c_5 = \frac{2090}{81}. \end{aligned}$$

Найдем $\sigma_k(x)$ нескольких систем функций:

$$\begin{aligned} 1, x^3, x^4, x^5, x^6, \dots &\leftrightarrow \sigma_1(x) = x^3, \sigma_2(x) = \frac{4}{3}x, \sigma_3(x) = \frac{5}{2}x, \sigma_4(x) = \frac{18}{5}x, \dots \\ 1, x, x^4, x^5, x^6, \dots &\leftrightarrow \sigma_1(x) = x, \sigma_2(x) = 4x^3, \sigma_3(x) = \frac{5}{3}x, \sigma_4(x) = 3x, \dots \\ 1, x^5, x^6, x^7, x^8, \dots &\leftrightarrow \sigma_1(x) = x^5, \sigma_2(x) = \frac{6}{5}x, \sigma_3(x) = \frac{7}{3}x, \sigma_4(x) = \frac{24}{7}x, \dots \end{aligned}$$

Из доказательства следует, что для системы функций, удовлетворяющих условиям теоремы, определители $D \begin{pmatrix} 1, & x^{\alpha_1} & \dots & x^{\alpha_m} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{m-1} \end{pmatrix} > 0$ для любых $a, b, 1 \leq m \leq n$, $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{m-1} \leq b$.

Литература

1. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 551 с.
2. Алиев М.С. Об определителях Вандермонда с двумя вычеркнутыми степенями // Вестник ДГУ. – 2017. – Т. 32, вып. 3. – С. 67–73.
3. Ramazanov A.-R.K. Polynomial approximation of continuous functions with unbounded sign-sensitive weight // Journal of mathematical sciences. – 2006. – Vol. 139, № 6. – P. 7185–7183.
4. Рамазанов А.-Р.К. Характеризация полинома наилучшего приближения со знакочувствительным весом // Мат. сборник. – 2005. – Т. 196, № 3. – С. 89–118.

5. Алиев М.С. О наилучшем приближении в пространстве $S_{[a,b]}$ // Вестник ДГУ. – 2018. – Т. 33, вып. 2. – С. 17–21.
6. Дубинин В.Н. Методы геометрической теории функций в классических и современных задачах для полиномов // УМН. – 2012. – Т. 67, вып. 4 (406). – С. 3–88.
7. Севастьянов Е.А., Долгобродов А.А. Нули функций в весовых пространствах со смешанной нормой // Мат. заметки. – 2013. – Т. 94, вып. 2. – С. 249–258.
8. Алиев М.С. О приближении функций слабой системой Чебышева // Вестник ДГУ. – 2011. – Вып. 6. – С. 120–123.
9. Алиев М.С. К вопросу реализации нормы одного функционала // Вестник ДГУ. – 2013. – Вып. 1. – С. 85–88.
10. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценка наилучших приближений ограниченных функций со знакочувствительным весом // Вестник ДГУ. – 2015. – Т. 30, вып. 6. – С. 105–111.
11. Загиров Н.Ш., Пашаева З.Ш. Оценка значений многочленов внутри отрезка // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 67–74.

Поступила в редакцию 14 ноября 2018 г.

UDC 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-4-80-83

On one system of Markov functions

M.S. Aliyev

*Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a;
aliev.mingazhudin@yandex.ru*

It is known that the system of natural powers of the argument forms Markov system on any segment located strictly to the right of the origin of coordinates. The study proves that in order for the system of natural degrees to form a Markov system on a segment containing inside the origin, it is necessary and sufficient that the first function is identically equal to one, the differences between adjacent powers are equal to odd numbers.

Keywords: *determinant, Chebyshev system, the system is Markov, Stiltjes.*

Received 14 November, 2018