УДК 517.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-3-80-93

А.Р. Хаиров

О различных формах представления многочленов Лежандра

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; chairov@yandex.ru

В статье метод параметрических преобразований, разработанный автором, используется для построения основ теории многочленов Лежандра. Различные формы представления многочленов Лежандра получены из двупараметрических преобразований формулы бинома. Такие представления лучшим образом заменяют формулу Родрига, которая является одним из основных свойств многочленов Лежандра. Интегральное представление многочлена Лежандра через многочлен Лагерра использован при получении производящей функции. Найден способ решения уравнения Лежандра, заключающийся в подборе параметров преобразования бинома в алгебраический многочлен так, чтобы он удовлетворял уравнению Лежандра. Приведены характерные примеры разложения функций в ряды Фурье–Лежандра, показывающие насколько удобны новые формы представления многочленов Лежандра при вычислении коэффициентов разложения.

Ключевые слова: *уравнение, преобразование, двупараметрический, функции, интеграл.*

1. Исторически первой системой ортогональных многочленов являются многочлены Лежандра. Исторические сведения о многочленах Лежандра имеются в [1–6], а подробное изложение теории – в монографиях [1, 3, 5, 8, 9]. Лежандр пришел к ним в 1784 году при исследованиях притяжения сфероидов [6]. При этом он получил многочлены как коэффициенты разложения функции $(1 - 2xt + t^2)^{-\frac{1}{2}}$ (производящая функция Лежандра) по степеням t . Пользуясь этим разложением, он доказал основные свойства полученных при этом многочленов.

В 1814 г. Родриг для многочленов Лежандра получил формулу

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^n.$$

Теперь известны и другие ортогональные многочлены, которые имеют аналогичные формулы. В 1814 г. при построении формулы приближенного вычисления интеграла Гаусс пришел к многочленам, которые, как позже обнаружил Якоби, числовым множителем отличаются от многочленов Лежандра. Таким образом, решение двух совершенно различных задач привело к одной и той же системе многочленов. Впоследствии эти же многочлены появлялись при решении самых различных задач математики, физики, механики, математической статистики и др.

В указанной выше литературе многочлены Лежандра определяются различными способами. Мы многочлены Лежандра определяем через биномы $(\xi + \eta)^n$ и $(1 + \lambda \xi)^n$.

2. Параметрические преобразования. Приведем определения параметрических преобразований и некоторые необходимые для нашей работы свойства [10].

Если в

$$f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n \quad (1)$$

ξ^n заменить на $\frac{\xi^n}{(a)_n}$, $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1)$, то получим новую функцию

$$f\left(\frac{\xi}{(a)_\cdot}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{\xi^n}{(a)_n}, \quad (2)$$

которая называется однопараметрическим преобразованием функции $f(\xi)$.

Аналогично определяется двухпараметрическое преобразование функции $f(\xi)$ [10]:

$$f\left(\frac{(b)_\cdot}{(a)_\cdot} \xi\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(a)_n}{(b)_n} \xi^n \quad (3)$$

Если в ряде (1) ξ^n заменить на $(a)_n \xi^n$, то получим новую функцию

$$f((a)_\cdot \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (a)_n \xi^n, \quad (4)$$

которая является обратным преобразованием для преобразования (2), ибо

$$f\left(\frac{\xi}{(a)_\cdot}\right) = \varphi(\xi), \quad \varphi((a)_\cdot \xi) = f(\xi).$$

Условия на параметры a и b будут выясняться по ходу применения преобразований (2), (3) и (4).

Если преобразования (2) и (3) применить соответственно к биномам

$$(1 + \lambda \xi)^n \quad \text{и} \quad (\xi + \eta)^n,$$

то получим формулы [11]

$$\left(1 + \lambda \frac{(a)_\cdot}{(b)_\cdot} \xi\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \lambda^k \frac{(a)_k}{(b)_k} \xi^k, \quad (5)$$

$$\left(\frac{\xi}{(a)_\cdot} + \frac{\eta}{(b)_\cdot}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\xi^k}{(a)_k} \frac{\eta^{n-k}}{(b)_{n-k}}. \quad (6)$$

Легко можно проверить равенство [13]

$$\frac{1}{(b)_k} = (-1)^{n-k} = \frac{(-b-n+1)_{n-k}}{(b)_n}, \quad (7)$$

с помощью которого из (5) при $\lambda \xi = -1$ выводится важное равенство

$$\left(1 - \frac{(b)_\cdot}{(a)_\cdot}\right)^n = \frac{(a-b)_n}{(a)_n}. \quad (8)$$

3. Ортогональность и различные формы представления многочленов Лежандра.

В многочлене $Q_n(x) = \left(1 + \lambda \frac{(a)_\cdot}{(b)_\cdot} (1-x)\right)^n$, который понимается в смысле преобразова-

ния (3), параметры λ , a и b определим из условий ортогональности $Q_n(x)$ на $[-1, 1]$ по весу 1 всем многочленам степени меньше n . Для этого нам понадобится следующая

Лемма 1. Если $P(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k$, то

$$\int_{-1}^1 P(a(1-x))(1+x)^m dx = \frac{2^{m+1}}{m+1} P\left(\frac{2(1)_n}{(m+2)_n} \lambda\right).$$

Доказательство. Пользуясь свойствами эйлеровых интегралов

$$\int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q dx = 2^{p+q+1} B(p+1, q+1),$$

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

находим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(1-x)(1+x)^m dx &= \sum_{k=0}^n c_k 2^{k+m-1} \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+m+2)} = \\ &= \frac{2^{m+1}}{m+1} \sum_{k=0}^n c_k 2^k \frac{(1)_k}{(m+2)_k} = \frac{2^{m+1}}{m+1} P\left(2 \frac{(1)_n}{(m+2)_n}\right). \end{aligned}$$

Последнее равенство записано согласно определению (3).

Теорема 1. Многочлен

$$P_n(x) = \left(1 - \frac{(n+1)_n}{2(1)_n} (1-x)\right)^n \quad (9)$$

совпадает со стандартизованным многочленом Лежандра.

Доказательство. Согласно лемме при $P(\lambda) = \left(1 + \lambda \frac{(a)_n}{(b)_n}\right)^n$ имеем

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \int_{-1}^1 \left(1 + \lambda \frac{(a)_n}{(b)_n} (1-x)\right)^n (1+x)^m dx = \\ &= \frac{2^{m+1}}{m+1} \left(1 + 2\lambda \frac{(a)_n}{(b)_n} \frac{(1)_n}{(m+2)_n}\right)^n. \end{aligned}$$

К правой части этого равенства при $2\lambda = -1$, $b = 1$ применим формулу (8). В результате получим

$$A_{mn} = \frac{2^{m+1}}{(m+1)_{n+1}} (m+2-a)_n.$$

Так как $(m+2-a)_n = (-1)^n (a-n-1-m)_n$, то при $a = n+1$ имеем

$$A_{mn} = \frac{2^{m+1}}{(m+1)_{n+1}} (-m)_n = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Таким образом, мы доказали

$$\int_{-1}^1 \left(1 - \frac{(n+1)}{2(1)} (1-x) \right)^n (1+x)^m dx = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Эти равенства означают, что

$$Q_n(x) = \left(1 - \frac{(n+1)}{2(1)} (1-x) \right)^n$$

является ортогональным многочленом веса 1 и промежутка $[-1, 1]$. Следовательно, он числовым множителем γ_n отличается от стандартизованного многочлена Лежандра $P_n(x)$. Поскольку $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$; $Q_n(1) = 1$, $Q_n(-1) = (-1)^n$, то $\gamma_n = 1$ и $P_n(x)$ совпадает с $Q_n(x)$.

Следует отметить, что представление многочлена Лежандра в виде

$$P_n(x) = \left(1 - \frac{(n+1)}{2(1)} (1-x) \right)^n$$

во многом превосходит формулу Родрига

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n.$$

4. Формулы перехода от одной формы представления к другой.

Для перехода от одной формы представления многочлена Лежандра к другой нам понадобится следующая

Лемма 2. При любых ξ и η имеет место равенство

$$\left(\frac{\xi}{(1)} + \frac{\eta}{(1)} \right)^n = \frac{1}{n!} \left(\eta - \xi + \frac{(n+1)}{2(1)} \xi \right)^n. \quad (10)$$

Доказательство. Для удобства левую часть равенства (10) обозначим через A и перепишем в развернутой форме по формуле (6)

$$A = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{\xi^k}{(1)_k} \frac{\eta^{n-k}}{(1)_{n-k}}. \quad (11)$$

По формуле (7) найдем

$$\frac{1}{(1)_{n-k}} = (-1)^k \frac{(-n)_k}{n!}$$

и подставим в (11), затем воспользуемся формулой (5). В результате имеем

$$A = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{(-n)_k}{(1)_k} \xi^k \eta^{n-k} = \frac{1}{n!} \left(\eta - \frac{(-n)}{(1)} \xi \right)^n. \quad (12)$$

Теперь с помощью формулы (8) выражение (12) приведем к выражению в правой части (10).

Теорема 2. Для стандартизованного многочлена Лежандра имеет место следующая форма представления:

$$P_n(x) = \frac{n!}{2^n} \left(\frac{x-1}{(1)} + \frac{x+1}{(1)} \right)^n. \quad (13)$$

Доказательство. При замене переменных по формулам

$$\xi = \frac{x-1}{2}, \quad \eta = \frac{x+1}{2}$$

левая часть равенства (10) принимает вид

$$\frac{1}{2^n} \left(\frac{x-1}{(1)_\cdot} + \frac{x+1}{(1)_\cdot} \right)^n, \quad (14)$$

а правая в силу формулы (9) приводится к виду

$$\frac{1}{n!} \left(1 - \frac{(n+1)_\cdot}{2(1)_\cdot} (1-x) \right)^n = \frac{1}{n!} P_n(x). \quad (15)$$

Объединив (14) и (15), получим формулу (13).

5. Интегральное представление многочленов Лежандра.

В [12] мы стандартизованный многочлен Чебышёва–Лагерра представили в виде

$$L_n(x, \alpha) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \left(1 - \frac{x}{(\alpha+1)_\cdot} \right)^n, \quad (16)$$

важным частным случаем которого является многочлен Лагерра

$$L_n(x) = \left(1 - \frac{x}{(1)_\cdot} \right)^n.$$

Сравнивая этот многочлен с многочленом (9), заметим наличие между ними связи. Для установления этой связи нам понадобится следующая

Лемма 3. Если $P(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k$, то

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma+1)} \int_0^\infty e^{-t} t^\gamma P(\lambda t) dt = P((\gamma+1)_\cdot, \lambda). \quad (17)$$

Доказательство. Интеграл в равенстве (17) преобразуем с помощью формулы $\Gamma(a+k) = (a)_k \Gamma(a)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-t} t^\gamma \sum_{k=0}^n c_k t^k \lambda^k dt &= \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k \int_0^\infty e^{-t} t^{\gamma+k} dt = \\ &= \sum_{k=0}^n c_k t^k \Gamma(\gamma+1+k) = \Gamma(\gamma+1) \sum_{k=0}^n c_k (\gamma+1)_k t^k. \end{aligned}$$

Теперь остается воспользоваться определением преобразования (4).

Теорема 3. Стандартизованный многочлен Лежандра имеет интегральное представление

$$P_n(x) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-t} t^n L_n\left(\frac{t}{2}(1-x)\right) dt. \quad (18)$$

Доказательство. При $\gamma=n$, $2\lambda=1-x$, $P(\lambda)=L_n(\lambda)$ равенство (17) принимает вид

$$\int_0^\infty e^{-t} t^n L_n\left(\frac{t}{2}(1-x)\right) dt = n! L_n\left(\frac{1}{2}(n+1)_\cdot(1-x)\right). \quad (19)$$

В силу формул (9) и (16) имеем равенство

$$L_n\left(\frac{1}{2}(n+1)_{\cdot}(1-x)\right) = \left(1 - \frac{(n+1)_{\cdot}}{2(1)_{\cdot}}(1-x)\right)^n = P_n(x),$$

которое вместе с (19) приводит к интегральному представлению (18).

Некоторые результаты, относящиеся к формулам (9), (13) и (18), приведены в [11].

6. Формы представления четных и нечетных многочленов Лежандра.

Из формулы представления (13) непосредственно следует важное свойство $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, по которому $P_n(x)$ содержит члены одной четности с n . Поэтому мы для многочленов $P_{2n}(x)$ и $P_{2n+1}(x)$ формулы представления будем искать соответственно в виде

$$\left(1 + \lambda \frac{(a)_{\cdot}}{(b)_{\cdot}} x^2\right) \quad \text{и} \quad x \left(1 + \lambda \frac{(a)_{\cdot}}{(b)_{\cdot}} x^2\right)^n.$$

Лемма 4. Если $P(\lambda) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k$, то

$$\int_{-1}^1 P(\lambda x^2) (1-x^2)^m dx = \frac{m!}{(0,5)_{m+1}} P\left(\lambda \frac{(0,5)_{\cdot}}{(m+1,5)_{\cdot}}\right).$$

Доказательство. Интеграл представим в виде

$$\sum_{k=0}^n c_k \lambda^k \int_{-1}^1 x^{2k} (1-x^2)^m dx$$

и заменим x^2 на x . В результате имеем выражение

$$\sum_{k=0}^n c_k \lambda^k \int_0^1 x^k (1-x)^m dx,$$

которое после упрощения принимает вид

$$\frac{m!}{(0,5)_{m+1}} \sum_{k=0}^n c_k \lambda^k \frac{(0,5)_k}{(m+1,5)_k} = \frac{m!}{(0,5)_{m+1}} P\left(\lambda \frac{(0,5)_{\cdot}}{(m+0,5)_{\cdot}}\right).$$

Теорема 4. Стандартизованные многочлены Лежандра $P_{2n}(x)$ и $P_{2n+1}(x)$ имеют следующие формы представления:

$$P_{2n}(x) = (-1)^n \frac{(0,5)_n}{n!} \left(1 - \frac{(n+0,5)_{\cdot}}{(0,5)_{\cdot}} x^2\right)^n, \quad (20)$$

$$P_{2n+1}(x) = (-1)^n \frac{(1,5)_n}{n!} x \left(1 - \frac{(n+1,5)_{\cdot}}{(1,5)_{\cdot}} x^2\right)^n. \quad (21)$$

Доказательство. Докажем равенство (20), а равенство (21) доказывается точно таким же путем.

Если в лемме 4 полагать $P(\lambda) = \left(1 + \lambda \frac{(a)_{\cdot}}{(b)_{\cdot}}\right)^n$, то

$$A_{mn} = \int_{-1}^1 \left(1 + \lambda \frac{(a)_{\cdot}}{(b)_{\cdot}} x^2\right)^n (1-x^2)^m dx = \frac{m!}{(0,5)_{m+1}} \left(1 + \lambda \frac{(a)_{\cdot}}{(b)_{\cdot}} \frac{(0,5)_{\cdot}}{(m+1,5)_{\cdot}}\right)^n.$$

Отсюда при $\lambda = -1$, $b = 0,5$ получим

$$A_{mn} = \frac{m!}{(0,5)_{m+1}} \left(1 - \frac{(a)_\cdot}{(m+1,5)_\cdot} \right)^n$$

Это выражение с помощью формулы (8) приведем к равенству

$$A_{mn} = \frac{m!}{(0,5)_{m+1} (m+1,5)_n} (m+1,5-a)_n.$$

Так как $(m+1,5-a)_n = (-1)^n (a-n-0,5-m)_n$, то при $a = n+0,5$ имеем равенство

$$A_{mn} = \frac{m!(-m)_n}{(0,5)_{m+1} (m+1,5)_n},$$

из которого следует $A_{mn}=0$ при $m < n$. Таким образом, мы доказали

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^m \left(1 - \frac{(n+0,5)_\cdot}{(0,5)_\cdot} x^2 \right)^n dx = 0, \quad m < n.$$

Присоединив это равенство с очевидным равенством

$$\int_{-1}^1 \left(1 - \frac{(n+0,5)_\cdot}{(0,5)_\cdot} x^2 \right)^n Q(x) dx = 0$$

для любого нечетного многочлена $Q(x)$, получим

$$\int_{-1}^1 \left(1 - \frac{(n+0,5)_\cdot}{(0,5)_\cdot} x^2 \right)^n q(x) dx = 0$$

для любого многочлена $q(x)$ степени не выше $2n-1$. Следовательно, многочлен

$\left(1 - \frac{(n+0,5)_\cdot}{(0,5)_\cdot} x^2 \right)^n$ числовым множителем γ_n отличается от $P_{2n}(x)$, то есть

$$P_{2n}(x) = \gamma_n \left(1 - \frac{(n+0,5)_\cdot}{(0,5)_\cdot} x^2 \right)^n.$$

Множитель $\gamma_n = (-1)^n \frac{(0,5)_n}{n!}$ может быть определен с помощью формулы (8) по

условию стандартизации $P_{2n}(1)=1$.

Точно таким же путем могут быть получены следующие формы представления:

$$P_{2n}(x) = \left(1 - \frac{(n+0,5)_\cdot}{(1)_\cdot} (1-x^2) \right)^n, \quad P_{2n+1}(x) = x \left(1 - \frac{(n+1,5)_\cdot}{(1)_\cdot} (1-x^2) \right)^n.$$

7. Еще одна форма представления четных и нечетных многочленов Лежандра.

Точно таким же путем, как мы доказали равенство (10), доказываются равенства

$$\left(\frac{\xi}{(0,5)_\cdot} + \frac{\eta}{(1)_\cdot} \right)^n = \frac{1}{n!} \left(\eta - \xi + \frac{(n+0,5)_\cdot}{(0,5)_\cdot} \xi \right)^n, \quad (22)$$

$$\left(\frac{\xi}{(1,5).} + \frac{\eta}{(1).} \right)^n = \frac{1}{n!} \left(\eta - \xi + \frac{(n+1,5).}{(1,5).} \xi \right)^n. \quad (23)$$

Если в (22) полагать $\xi = x^2$, $\eta - \xi = -1$, то получим равенство

$$\left(\frac{x^2}{(0,5).} + \frac{x^2 - 1}{(1).} \right)^n = \frac{(-1)^n}{n!} \left(1 - \frac{(n+0,5).}{(0,5).} x^2 \right)^n,$$

из которого, в силу равенства (20) следует формула

$$P_{2n}(x) = (0,5)_n \left(\frac{x^2}{(0,5).} + \frac{x^2 - 1}{(1).} \right)^n. \quad (24)$$

Из (23) в силу равенства (20) точно таким же путем, как в предыдущем случае, можно получить формулу

$$P_{2n+1}(x) = (1,5)_n x \left(\frac{x^2}{(1,5).} + \frac{x^2 - 1}{(1).} \right)^n. \quad (25)$$

Из формул (20) и (21) с помощью леммы 3 получим интегральные представления для $P_m(x)$ при четном и нечетном m

$$P_{2n}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t} t^{n-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{t x^2}{(0,5).} \right)^n dt,$$

$$P_{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-t} t^{n+\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{t x^2}{(1,5).} \right)^n dt.$$

8. Производящие функции для четных и нечетных многочленов Лежандра. Рассмотрим экспоненциальную производящую функцию

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} P_{2n}(x).$$

Находим выражение для $F(x, t)$. Согласно равенству $(2n)! = 2^{2n} n! (0,5)_n$ и формуле (24) имеем

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n} n!} \left(\frac{x^2}{(0,5).} + \frac{x^2 - 1}{(1).} \right)^n.$$

По правилу Коши умножения абсолютно сходящихся рядов функцию $F(x, t)$ можно представить в виде произведения двух рядов

$$F(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{2^{2n} n! (0,5)_n} x^{2n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^{2n} n! (1)_n} (1 - x^2)^n.$$

Теперь легко заметить, что первый ряд есть разложение функции $\cos xt$, а второй ряд – разложение функции $I_0(t\sqrt{1-x^2})$, где $I_0(t)$ – функция Бесселя мнимого аргумента нулевого порядка. Таким образом, мы получили формулу

$$I_0(t\sqrt{1-x^2})\cos xt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} P_{2n}(x), \quad |x| \leq 1. \quad (26)$$

Точно таким же путем может быть получена формула

$$I_0(t\sqrt{1-x^2})\sin xt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} P_{2n+1}(x), \quad |x| \leq 1, \quad (27)$$

если воспользоваться формулами (25) и $(2n+1)! = 2^{2n} n! (1,5)_n$.

Для $|x| \geq 1$ ряды в формулах (26) и (27) имеют соответственно суммы

$$J_0(t\sqrt{x^2-1})\cos xt, \quad J_0(t\sqrt{x^2-1})\sin xt.$$

9. Производящая функция и интеграл Лапласа для многочленов Лежандра.

Рассмотрим функцию трех переменных

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + iy \cos \varphi)^n d\varphi. \quad (28)$$

При $|z(x - iy \cos \varphi)| < 1$ в (28) знаки и интегралы можно поменять местами и получить равенство

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} z^n (x + iy \cos \varphi)^n d\varphi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1 - z(x + iy \cos \varphi)}.$$

Разбив интеграл на два по промежуткам $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, заменив во втором интеграле φ на $\pi - \varphi$, приведем его к виду

$$\Phi(x, y, z) = \frac{2}{\pi} (1 - xz) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 - xz)^2 + y^2 z^2 \cos^2 \varphi}. \quad (29)$$

При сделанных относительно переменных предположениях равенство (29) легко сводится к

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xz + (x^2 + y^2)z^2}}. \quad (30)$$

Таким образом, мы доказали

$$\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(x, y) z^k = ((1 - 2xz + (x^2 + y^2)z^2)^{-\frac{1}{2}}), \quad (31)$$

где

$$Q_n(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + iy \cos \varphi)^n d\varphi. \quad (32)$$

В частности, при $x^2 + y^2 = 1$ функция (30) становится производящей для многочленов Лежандра, а

$$Q_n(x, \sqrt{1-x^2}) = P_n(x).$$

Следовательно, мы вновь получили [5], [9]

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n = (1 - 2xz + z^2)^{-\frac{1}{2}},$$

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + i\sqrt{1-x^2} \cos \varphi)^n d\varphi$$

производящую функцию и интеграл Лапласа для многочленов Лежандра одновременно.

10. Еще один способ получения производящей функции для многочленов Лежандра.

Функцию $F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n$ с помощью формулы (18) представим в виде

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^n \left(1 - \frac{t(1-x)}{2(1)} \right)^n dt. \quad (33)$$

В равенстве (33) при $|z| < 1$ можно переставить знаки суммы и интеграла, так как

$$e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n t^n}{n!} \left(1 - \frac{t(1-x)}{2(1)} \right)^n$$

есть произведение Коши абсолютно сходящихся рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n t^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n t^{2n} (1-x)^n}{2^n n! (1)_n}$$

и функции e^{-t} , а ряды представляют функции

$$e^{tz}, \quad J_0(t\sqrt{2z(1-x)})$$

Таким образом,

$$F(x, z) = \int_0^{\infty} e^{(1-z)t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n} z^n (1-x)^n}{2^n (n!)^2} dt. \quad (34)$$

После замены переменной интегрирования по формуле $\tau = (1-z)t$ равенство (34) принимает вид

$$F(x, z) = \frac{1}{1-z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(0,5)_n}{n!} \left(\frac{2x}{(1-z)^2} \right)^n (1-x)^n. \quad (35)$$

Согласно биномиальному разложению

$$(1+t)^{-\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(0,5)_n}{n!} \frac{(\gamma)_n}{n!} t^n \quad (|t| < 1)$$

из (35) получим равенство

$$F(x, z) = \frac{1}{1-z} \left(1 + \frac{2z}{(1-z)^2} (1-x) \right)^{-\frac{1}{2}},$$

которое легко приводится к производящей функции

$$F(x, z) = \left(1 - 2xz + z^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

11. Уравнение Лежандра

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0 \quad (36)$$

можно вывести из формулы (9), представив ее в виде гипергеометрической функции Гаусса. Мы здесь приведем способ решения уравнения (36), основанный на подборе параметров λ, a, b так, чтобы многочлен

$$y = \left(1 + \lambda \frac{(a)_k}{2(b)_k} (1-x)\right)^n \quad (37)$$

удовлетворял уравнению (36). Для применения такого приема введем обозначения

$$A_n = C_n^k \lambda^k \frac{(a)_k}{(b)_k}, \quad L_y = (1 - x^2)y'' - 2xy'.$$

Поскольку решение ищется в виде $y = \sum_{k=0}^{\infty} A_k (1-x)^k$, то будет лучше представить (36) в виде

$$Ly + n(n+1)y = 0, \quad Ly = (2(1-x) - (1-x^2))y'' - (1 - (1-x))y'.$$

Выражения для y' и y'' подставим в Ly :

$$\begin{aligned} Ly &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k k(k-1)(1-x)^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} A_k k(k-1)(1-x)^k + \\ &+ 2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k k(1-x)^{k-1} - 2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k k(1-x)^k. \end{aligned}$$

Отсюда после простых упрощений имеем

$$Ly = 2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k k^2 (1-x)^{k-1} - \sum_{k=0}^{\infty} A_k k(k+1)(1-x)^k$$

Первая сумма при $b=1, 2\lambda=-1$ принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k (k-n)(k+a)(1-x)^k.$$

После этого, объединив обе суммы, получим

$$Ly = \sum_{k=0}^{\infty} A_k [(k-n)(k+a) - k(k+1)](1-x)^k.$$

Выражение в квадратных скобках не будет зависеть от k при $a = n+1$. Таким образом, при $b=1, 2\lambda=-1, a=n+1$ многочлен (37) удовлетворяет уравнению $Ly + n(n+1)y = 0$, то есть многочлен

$$y = \left(1 - \lambda \frac{(n+1)_k}{2(1)_k} (1-x)\right)^n$$

является решением уравнения (36).

12. Примеры разложения функций по многочленам Лежандра.а) Разложение функции $f(x) = (1-x^2)^\gamma$, $x \in (-1,1)$.

Согласно равенству

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}$$

коэффициенты Фурье–Лежандра определяются по формуле

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 (1-x^2)^\gamma P_n(x) dx.$$

Коэффициенты с нечетными номерами равны нулю, а для четных в силу представления (24) имеем

$$a_{2n} = \frac{4n+1}{2} (0,5)_n \int_{-1}^1 (1-x^2)^\gamma \left(\frac{x^2}{(0,5)_n} + \frac{x^2-1}{(1)_n} \right)^n dx = \frac{4n+1}{2} (0,5)_n A_n. \quad (38)$$

Прием, который был использован при доказательстве леммы, применим к интегралу в равенстве (38)

$$A_n = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{1}{(0,5)_k (1)_{n-k}} \int_{-1}^1 x^{2k} (1-x^2)^{\gamma+2n-2k} dx.$$

В результате получим

$$A_n = \frac{B(0,5, \gamma+1)}{(\gamma+1,5)_n} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{(\gamma+1)_k}{(1)_k} = \frac{B(0,5, \gamma+1)}{(\gamma+1,5)_n} \left(1 - \frac{(\gamma+1)_n}{(1)_n} \right)^n.$$

Последнее выражение упростим с помощью формулы (8). Тогда для A_n и a_{2n} получим равенства

$$A_n = \frac{B(1+\gamma, 0,5)}{(\gamma+1,5)_n} \frac{(-\gamma)_n}{n!}, \quad a_{2n} = \frac{4n+1}{2} (0,5)_n A_n.$$

Следовательно, имеем разложение

$$(1-x^2)^\gamma = \frac{1}{2} B(1+\gamma, 0,5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n+1}{n!} (0,5)_n \frac{(-\gamma)_n}{(\gamma+1,5)_n} P_{2n}(x), \quad (39)$$

которое сходится при $\gamma > -1$, $-1 < x < 1$.В частности, при $\gamma = -\frac{1}{2}$ из (39) получим разложение

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (4n+1) \left[\frac{(0,5)_n}{n!} \right]^2 P_{2n}(x), \quad -1 < x < 1. \quad (40)$$

Разложение (40) в [5] получено с помощью разложения функции $P_{2n}(\cos \theta)$ по системе косинусов кратных дуг.б) Разложение функции $f(x) = (1-x)^\gamma$, $-1 < x < 1$.

Коэффициенты Фурье–Лежандра находим по формуле

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 (1-x)^\gamma P_n(x) dx,$$

где $P_n(x)$ представлен в виде (13). В силу формулы (13) имеем

$$a_n = \frac{2n+1}{2^{n+1}} n! \int_{-1}^1 (1-x)^\gamma \left(\frac{x-1}{(1)_\cdot} + \frac{x+1}{(1)_\cdot} \right)^n dx. \quad (41)$$

Интеграл в (41) обозначим через B_n и представим в виде

$$B_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{(1)_k (1)_{n-k}} \int_{-1}^1 (1-x)^{\gamma+k} (1+x)^{n-k} dx.$$

К интегралу в этой сумме применим формулу

$$\int_{-1}^1 (1-x)^p (1+x)^q dx = 2^{p+q+1} B(p+1, q+1).$$

Тогда получим равенство

$$B_n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{(-1)^k}{(1)_k (1)_{n-k}} 2^{\gamma+n+1} B(p+1, q+1),$$

которое упрощается следующим образом:

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2^{\gamma+n+1}}{(\gamma+1)_{n+1}} \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k \frac{(\gamma+1)_k}{(1)_k} = \frac{2^{\gamma+n+1}}{(\gamma+1)_{n+1}} \left(1 - \frac{(\gamma+1)_\cdot}{(1)_\cdot} \right)^n = \\ &= \frac{2^{\gamma+n+1}}{(\gamma+1)_{n+1}} \frac{(-\gamma)_n}{n!}. \end{aligned}$$

Так как $2^{\gamma+n+1} a_n = (2n+1)n! B_n$, то коэффициент Фурье–Лежандра

$$a_n = \frac{2^\gamma}{(\gamma+1)_{n+1}} (2n+1)(-\gamma)_n.$$

Таким образом, мы получим разложение

$$(1-x)^\gamma = 2^\gamma \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{(-\gamma)_n}{(\gamma+1)_{n+1}} P_n(x), \quad -1 < x < 1, \gamma > -1. \quad (42)$$

В частности, при $\gamma = \frac{1}{2}$ из (42) получим разложение

$$\sqrt{1-x} = \frac{4}{3\sqrt{2}} P_0(x) - \frac{4}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n(x)}{(2n-1)(2n+3)}, \quad -1 < x < 1,$$

которое в [5] выведено из производящей функции Лежандра.

Примеры а) и б) показывают, как удобны различные формы представления многочленов Лежандра при разложении функций по ним.

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. – М.: Наука, 1973.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974.
3. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Ч. 2. – М.: Физматгиз, 1963.
4. Ожигова Е.П. Шарль Эрмит. – Л.: Наука, 1982.
5. Суевин Г.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 2007.
6. Джоунс У., Трон В. Непрерывные дроби. – М.: Мир, 1985.
7. Сегё Г.Г. Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962.
8. Натансон И.П. Конструктивная теория функций. – М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.
9. Гобсон Е.В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. – М.: ИЛ, 1952.
10. Хаиров Р.А. Однопараметрические и двухпараметрические преобразования степенных рядов // Материалы Международной конференции «Современные проблемы математики». – Махачкала: ДГТУ, 2006. – С. 100–103.
11. Хаиров А.Р. О многочленах Лежандра // Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы математики и смежные вопросы». – Махачкала: ДГТУ, 2018, С. 112–115.
12. Хаиров А.Р. О двух производящих функциях для многочленов Чебышева-Лагерра // Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы математики и смежные вопросы». – Махачкала: ДГТУ, 2016. – С. 93–96.
13. Хаиров А.Р. О двухпараметрическом семействе комплекснозначных функций, определяемом аналитической функцией // Вестник ДГУ. – 2015. – Вып. 1. – С. 27–33.

Поступила в редакцию 5 сентября 2018 г.

UDC 517.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-3-80-93

On various forms of the Legendre polynomials representation

A.R. Khairov

Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; chairov@yandex.ru

A new method of parametric transformations developed by the author is used to build the foundations of the Legendre polynomial theory. Different forms of representation of the Legendre polynomials have been obtained from the biparametric transformation of the binomial formula. Such representations change the Rodrigues formula best of all which is one of the main properties of the Legendre polynomials. Integral representation of the Legendre multinomial via the Laguerre polynomial is used in obtaining the generating function. Typical examples of function expansion into the Fourier-Legendre series are given, showing how convenient new forms of the Legendre polynomial representation are when calculating the expansion coefficients.

Keywords: *equation, transformation, two-parameter, functions, integral.*

Received 5 September, 2018