УДК 519.618

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-3-73-79

А.З. Якубов

Применение потоково-графовых методов в оптимизации расписания

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; yakubovaz@mail.ru

Оптимизация расписания учебных занятий сформулирована в виде задачи дефрагментации матрицы: для матрицы из семи столбцов, каждый из которых содержит, кроме нулей, некоторую перестановку первых n натуральных чисел, рассматривается вопрос существования матрицы тех же размеров, сохраняющей множество элементов исходной матрицы в каждом столбце и каждой строке таким образом, что в каждой строке все ненулевые элементы расположены слитно. Благодаря применению потоково-графовых методов найдены необходимые и достаточные условия дефрагментации матрицы в некоторых частных случаях.

Ключевые слова: *оптимизация расписания, дефрагментация матриц, потоки в сетях, паросочетания.*

Введение

В статье рассматривается задача дискретной оптимизации – *дефрагментации* матриц различных классов, т. е. непрерывного расположения ненулевых элементов в каждой строке матрицы, сохраняющей множество элементов в каждой *линии* матрицы. Сложность исследования приведенной задачи является результатом труднорешаемости [2] соответствующих математических моделей. В связи с этим в статье рассматривается частный случай, допускающий решение за полиномиальное время.

В качестве модели, объединяющей в себе характерные черты сформулированных и близких к ним задач, в заключении данной работы рассматривается задача *оптимизации расписания учебных занятий* по критерию уменьшения окон преподавателей.

Формулировка задачи

- 1) $I_n = \{1, 2, 3, \dots, n\}$; $I_{n,k}$ – k -элементное множество $\{1, 2, 3, \dots, n, 0, 0, \dots, 0\}$.
- 2) $P^{[k,m,n]}$ – матрицы размеров $k \times m$, где каждый столбец содержит в точности один экземпляр каждого элемента из $I_{n,k}$.
- 3) $P_s^{[k,m,n]}$ набор матриц из класса $P^{[k,m,n]}$, для каждой из которых количество ненулевых элементов в каждой строке представлено элементом множества s .
- 4) Множество строк в матрице M , каждая из которых содержит в точности q ненулевых элементов, будем обозначать через $M^{(q)}$.

Сформулируем задачу дефрагментации матрицы в виде *задачи распознавания свойств* [2, с. 27].

Задача «Дефрагментация матрицы» (ДМ).

Условие. M – матрица класса $P^{[k,m,n]}$, k, m, n – целые положительные числа.

Вопрос. Существует ли матрица $M^* k \times m$ для матрицы M , удовлетворяющая усло-

Дефрагментация матриц класса $P_{\{2,5,7\}}^{[k,7,n]}$

Необходимо проверить существование для исходной матрицы M класса $P_{\{2,5,7\}}^{[k,7,n]}$ матрицы $M^* k \times m$, удовлетворяющей вышеперечисленным условиям, считая, что все ненулевые элементы в каждой строке попарно различны.

Для исследования условий дефрагментации матрицы используем потоки в транспортно-портной сети. Обозначения:

$T(M)$ – транспортная сеть для матрицы M ;

$[a, b]$, a – нижнее потоковое ограничение, b – верхнее потоковое ограничение.

Вершины:

T_1 – источник, T_2 – сток;

элементам множества $\{1, 2, \dots, n\}$ матрицы M соотнесены n вершин $x_1, x_2, \dots, x_n$ транспортной сети;

строкам множеств $M^{(5)}$ и $M^{(7)}$ функцией η последовательно соотнесены χ вершин $y_1, y_2, \dots, y_\chi$ транспортной сети, определенной на множестве этих вершин,

$\eta: \{y_1, y_2, \dots, y_\chi\} \rightarrow M^{(5)} \cup M^{(7)}$;

χ представляет собой количество строк, где число ненулевых элементов принадлежит множеству $\{5, 7\}$, т. е. $\chi \equiv k - |M^{(2)}|$.

Дуги:

к каждой из вершин x_s от источника T_1 проведена дуга с потоковыми ограничениями $[3, 3]$;

к вершине y_t ($t = 1, 2, \dots, \chi$) от вершины x_s ($s = 1, 2, \dots, n$) дуга проведена только в том случае, если строка $M(y_t)$ содержит число s , при этом потоковые ограничения по дуге (x_s, y_t) равны $[0, 1]$;

к стоку T_2 от каждой вершины y_t проведена дуга с ограничениями $[3, 3]$.

Таким образом, транспортная сеть $T(M)$ построена.

Из определения транспортной сети $T(M)$ вытекает следующее свойство: при существовании допустимого потока в $T(M)$ его величина будет равна $3 \times n$. В [11] доказана следующая теорема:

Теорема 3.1. Для дефрагментации матрицы M необходимо и достаточно существование допустимого потока в транспортной сети $T(M)$.

Из доказательства теоремы выделим вычислительную схему дефрагментации матрицы M .

По матрице M , представленной на рис. 2, приведена транспортная сеть $T(M)$, построенная на рис. 3. Двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$, построенный на дугах E сети $T(M)$, по которым протекает поток величины 1, представлен на рис. 4, там же выделено одно совершенное паросочетание: $\{(x_1, y_1), (x_2, y_3), (x_3, y_5), (x_4, y_2), (x_5, y_6), (x_6, y_3), (x_7, y_7)\}$.

После удаления этого паросочетания остовный подграф степени 2 (в нашем случае на рис. 5 – гамильтонов цикл) допускает очевидное расслоение на два совершенных паросочетания: $\{(x_1, y_4), (x_2, y_1), (x_3, y_1), (x_4, y_4), (x_5, y_2), (x_6, y_3), (x_7, y_2)\}$ и $\{(x_1, y_6), (x_2, y_5), (x_3, y_7), (x_4, y_6), (x_5, y_5), (x_6, y_7), (x_7, y_3)\}$.

Отсюда видно, что $X_1 = X_2 = X_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7\}$.

Выделим также два множества: W_1, W_2 ,

$W_1 = \{(4, 5), (2, 6), (3, 4), (5, 1), (2, 3), (7, 1), (7, 6)\}$,

$W_2 = \{(6, 7), (3, 4), (1, 7), (2, 3), (5, 2), (5, 1), (4, 6)\}$.

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	0	4	5	6	7	0
3	0	3	0	0	0	0	4
4	6	7	0	3	4	2	0
5	0	0	5	0	0	0	1
6	0	4	1	0	2	3	6
7	7	0	0	1	0	0	0
8	3	1	0	0	7	5	2
9	0	0	6	7	0	0	0
10	4	0	0	2	3	1	5
11	0	5	2	0	0	0	0
12	5	0	7	6	1	0	3
13	0	6	0	0	0	4	0

Рис. 2. Исходная матрица М класса $k = 13, m = 7, n = 7, s = \{2, 5, 7\}$

Рис. 3. Транспортная сеть $T(M)$, построенная по матрице М на рис. 2. Поточные ограничения дуг указаны в квадратных скобках

Рис. 4. Двудольный граф $G = (X \cup Y, E)$, построенный на дугах E сети $T(M)$, по которым протекает поток величины 1. Выделено одно совершенное паросочетание

Рис. 5. Остовной подграф степени 2 – результат удаления одного совершенного паросочетания из графа G , изображенного на рис. 2

Элементы множеств X_1, X_2, X_3 разместим соответственно в третьем, четвертом, пятом, элементы множеств W_1, W_2 – в первом, втором, шестом и седьмом столбцах предварительно обнуленной таблицы тех же размеров таким образом, чтобы каждый элемент вышеперечисленных множеств оказался в строке с тем же номером, что и в матрице M , и при этом все элементы в каждом столбце были попарно различны. В итоге получим дефрагментированную матрицу M^* , представленную на рис. 7.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	4	5	6	7
2	2	0	0	0	6	0	0
3	0	3	0	0	0	0	4
4	0	0	0	3	4	0	0
5	0	0	5	0	0	0	1
6	0	0	0	0	2	3	0
7	7	0	0	1	0	0	0
8	0	1	0	0	7	0	0
9	0	0	6	7	0	0	0
10	0	0	0	2	3	0	0
11	0	5	2	0	0	0	0
12	5	0	0	0	1	0	0
13	0	6	0	0	0	4	0

Рис. 6. Каждая строка матрицы M' содержит два или четыре ненулевых элемента

	1	2	3	4	5	6	7
1	4	5	1	3	2	6	7
2	6	2	4	5	7	0	0
3	3	4	0	0	0	0	0
4	0	0	2	7	6	3	4
5	5	1	0	0	0	0	0
6	2	3	6	1	4	0	0
7	1	7	0	0	0	0	0
8	0	0	3	2	5	7	1
9	7	6	0	0	0	0	0
10	0	0	5	4	1	2	3
11	0	0	0	0	0	5	2
12	0	0	7	6	3	1	5
13	0	0	0	0	0	4	6

Рис. 7. Дефрагментированная матрица M^*

Заключение

Помимо задачи оптимизации расписания учебных занятий, к задаче дефрагментации сводятся следующие задачи.

Задача 1 (Оптимизация размещения резидентных программ в памяти). Обозначим через n количество программ, которые должны расположиться в памяти компьютера. Даны также их неделимые весовые характеристики: (объем) a_i ($i = 1, 2, \dots, n$), m – число блоков памяти (сокращенно *UMB*), b_j ($j = 1, 2, \dots, m$) – *объем j-го UMB*.

В множестве программ A необходимо выделить семейство B , которое состоит из m непересекающихся подмножеств: 1) сумма весов элементов, распределенных в j -й *UMB*, не превышает b_j ; 2) общая сумма весов элементов подмножества B является наибольшей из возможных.

Задача 2 (Расписание для многопроцессорных машин). Необходимо выяснить существование такого расписания обработки данных, которое удовлетворяло бы некоторому заданному директивному сроку для заданного числа заданий, их длительности и количеству процессоров.

Задача 3 (Компьютерная сеть). Имеется компьютерная сеть из m каналов. В каждый квант времени по каждому каналу передается 0 или 1 сообщение. Необходимо составить такой график отправки данных по сети, чтобы сообщения шли сплошным потоком.

Примечание. С одним теоретико-графовым подходом к задаче оптимизации расписания учебных занятий можно ознакомиться в [12, 13].

Литература

1. Ахо А., Ульман Д., Хопкрофт Д. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. – М.: Мир, 1979. – 536 с.
2. Гэрри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, 1982. – 416 с.
3. Оре О. Теория графов. – М.: Физматгиз, 1968. – 352 с.
4. Пападимитриу Х., Стайглиц К. Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность. – М.: Мир, 1985. – 510 с.
5. Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1963. – 216 с.
6. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. – М.: Мир, 1974. – 520 с.
7. Магомедов А.М. Связность матрицы перестановок в случае четырех столбцов. Деп. в ВИНТИ, 8700-В-87.
8. Магомедов А.М. Дефрагментация таблицы перестановок из 4 столбцов // Дискретная математика. – 2009. – Т. 21, вып. 4. – С. 95–104.
9. Якубов А.З. Дефрагментация строк матрицы перестановок. Деп. в ВИНТИ № 1638-В2002, 2002. – 10 с.
10. Якубов А.З. Потокотые методы в решении задачи дефрагментации матрицы расписания // Материалы IV Межд. конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». – Нальчик: Терскол, 2013. – С. 115–117.
11. Якубов А.З. Моделирование беззаконного расписания потоковыми методами // Материалы XII Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования» / Владикавказский научный центр Российской академии наук, Южный математический институт, Северо-Осетинский государственный университет имени К.Л. Хетагурова, Южный федеральный университет. –

Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2015. – С. 239–240.

12. Магомедов А.М., Магомедов Т.А. Реберно-вершинные инцидентные паросочетания в задачах расписаний // Прикладная дискретная математика. – 2015. – № 1 (27). – С. 92–95.

13. Магомедов А.М., Магомедов Т.А. Последовательное разбиение ребер двудольного графа на паросочетания // Дискретная математика. – 2016. – Т. 28, вып. 1. – С. 78–86.

Поступила в редакцию 7 сентября 2018 г.

UDC 519.618

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-3-73-79

The use of flow graph methods in scheduling optimization

A.Z. Yakubov

*Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a;
yakubovaz@mail.ru*

The task of optimizing the curriculum is formulated in the form of a matrix defragmentation. There is the existence of seven columns matrix, each of which contains, in addition to zeros, some permutation of the first n natural numbers, a matrix of the same dimensions that preserves the set of elements of the original matrix in each column and each row, and thus in each row all non-zero elements are located together. Due to the use of streaming graph methods the necessary and sufficient conditions of matrix defragmentation in some special cases are found.

Keywords: scheduling optimization, defragmentation of matrix, streams in networks, matching.

Received 7 September, 2018