УДК 513.34

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-3-67-72

Ф.С. Насрулаев

Некоторые свойства многогранных трубок

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; saytarvi@gmail.com

Пусть многогранная трубка T задана в трехмерном евклидовом пространстве вектор-функцией $\bar{r} = \bar{r}(u) = \{x(u), y(u), z(u)\}$ в замкнутом круге $D = \{u = (u^1, u^2)\}$ с выколотым центром.

Пусть Q – произвольная псевдоопорная плоскость к T в точке $T(u)$, а $\alpha(u, Q)$ – наименьший угол между Q и плоскостью $P(h): z = h$.

Обозначим через $\alpha(u)$ минимум функции $\alpha(u, Q)$, где Q пробегает все множество псевдоопорных плоскостей к T в точке $T(u)$.

В работе установлены следующие свойства многогранных трубок.

1. Если при u , пробегающем круг D , супремум функции $z(u)$ меньше плюс бесконечности, то инфимум функции $\alpha(u)$ равен нулю.

2. Если d – диаметр единичной сферы S , оба конца которого не принадлежат бесконечно удаленной части границы сферического изображения трубки T , то трубка T не ограничена в пространстве в направлении диаметра d .

3. Если T – многогранная седловая трубка с однолистным сферическим изображением, то она не ограничена в пространстве.

Ключевые слова: *многогранная трубка, псевдоопорная плоскость, сферическое изображение, бесконечно удаленная часть границы сферического изображения, седловая трубка, неограниченность в пространстве.*

Предполагаются известными определения основных понятий, принятые нами в работе [11].

Понятия трубки (уходящей области), рога и чаши введены С.Э. Кон-Фоссаном [1]. С помощью этих понятий им доказан ряд теорем внутренней геометрии полных некомпактных поверхностей. В этих же терминах, как показали А.Л. Вернер [2–6], Ю.Д. Бураго [7] и другие, могут быть описаны и многие внешнегеометрические свойства полных седловых поверхностей. В работе [9] Э.Р. Розендорна впервые встречаются примеры седловых сужающихся поверхностей (полные седловые поверхности, не имеющие чаш). Вопросы внешней геометрии многогранных и гладких трубок рассматривались в работах [10, 11, 12].

В трёхмерном евклидовом пространстве E^3 введем систему декартовых координат x, y, z с началом в точке O . Пусть многогранная седловая трубка T задана вектор-функцией

$$\bar{r} = \bar{r}(u) = \{x(u), y(u), z(u)\}$$

в области $D = \{u = (u^1, u^2), 0 < |u| = \sqrt{(u^1)^2 + (u^2)^2} \leq 1\}$.

Обозначим окружность $|u| = 1$ через Γ , а её образ на T – через L . Ломаную L будем называть краем трубки T .

Через $T(u)$ обозначим образ точки $u \in D$ на трубке T . Примем еще обозначения:

$$P(h): z = h; L(h) = P(h) \cap T; D^+(h) = \{u \in D, z(u) > h\}.$$

Множество $N \subset D$ назовем неограниченным на D , если существует последовательность $u_n \in N$, которая сходится к точке $(0,0)$ при $n \rightarrow \infty$, в противном случае говорим, что множество N ограничено на D .

Пусть Q – произвольная псевдоопорная плоскость к T в точке $T(u)$. Наименьший угол между Q и $P(h)$ обозначим через $\alpha(u, Q)$; множество псевдоопорных плоскостей к T в точке $T(u)$ обозначим через $M(T(u))$ и

$$\alpha(u) = \min_{Q \in M(T(u))} \alpha(u, Q).$$

Поскольку множество $M(T(u))$ замкнуто, то $\alpha(u)$ существует в каждой точке $T(u)$ $u \in D$.

Утверждение 1. Пусть трубка T с краем L определена на круге $D = \{u, 0 < |u| \leq 1\}$ с выколотым центром G_0 . Тогда, если

$$\sup_{u \in D} z(u) < +\infty, \text{ то } \inf_{u \in D} \alpha(u) = 0.$$

Доказательство. Допустим противное, т. е. пусть

$$\inf_{u \in D} \alpha(u) = \alpha_0 > 0.$$

Покажем, что тогда на T можно построить ломаную R , звенья которой образуют углы с $P(h)$ не меньшие α_0 , и вдоль которой неограниченно возрастает функция $z(u)$. (Под углом между звеньями ломаной R и плоскостью $P(h)$ мы понимаем угол между прямой, содержащей данное звено, и плоскостью $P(h)$).

1) Пусть плоскость $P(h): z = h$ проходит через точку $T(u) \in T$. Тогда найдутся лучи, исходящие из точки $T(u)$, отрезки которых лежат на T , и направленные в полупространство $z > h$. В противном случае $P(h)$ была бы опорной плоскостью к T в точке $T(u)$, и, следовательно, в этой точке $\inf_{u \in D} \alpha(u) = 0$, что противоречит нашему допущению.

Обозначим через $\beta(u, l)$ угол между отрезком луча l на T , исходящим из точки $T(u)$ и направленным в полупространство $z > h$, и плоскостью $P(h)$. Поскольку из любой вершины на T исходит конечное число граней, то существует

$$\beta(u) = \max_{l \subset T, z > h} \beta(u, l).$$

В случае, когда точка $T(u)$ лежит внутри грани $\Gamma^i \subset T$, луч l_0 , образующий с $P(h)$ угол $\beta(u)$, перпендикулярен отрезку пересечения $\Gamma^i \cap P(h)$ и лежит в плоскости грани Γ^i . Поэтому

$$\beta(u) \geq \inf_{u \in D} \alpha(u) = \alpha_0 > 0.$$

Покажем, что и в любой точке на трубке T угол $\beta(u) \geq \alpha_0$.

Обозначим $\beta_0 = \inf_{u \in D} \beta(u)$.

Допустим, $\beta_0 < \alpha_0$.

Пусть точка $T(u_0)$ и луч l_0 , исходящий из этой точки в полупространство $z > h_0$, таковы, что $\beta(u, l_0) = \beta_0$.

Тогда для всех лучей, исходящих из точки $T(u_0)$, отрезки которых лежат на гранях трубки T , исходящих из $T(u_0)$, углы их ω с плоскостью $P(h_0): z = h_0$ удовлетворяют неравенству $\omega \leq \beta_0 < \alpha$.

Из вышеизложенного следует, что точка $T(u_0)$ лежит либо внутри ребра на T , либо является вершиной многогранного угла на T .

Утверждается, что l_0 идет по ребру, т. е. он не лежит внутри никакой грани, исходящей из точки $T(u_0)$.

Рассмотрим плоскость Q_0 , которая проходит через точку $T(u_0)$, содержит луч l_0 и

образует с $P(h_0)$ угол β_0 .

Пусть K – круговой конус с образующей l_0 и вершиной в точке $T(u_0)$, ось которого перпендикулярна плоскости $P(h_0)$. Тогда плоскость Q_0 является касательной к конусу K .

Если допустить, что l_0 лежит внутри некоторой грани Γ^i , подходящей к точке $T(u_0)$, то возможны два случая:

- а) либо плоскость грани Γ^i совпадает с плоскостью Q_0 ;
- б) либо плоскость грани Γ^i не совпадает с плоскостью Q_0 .

В случае а) мы имели бы псевдоопорную плоскость (плоскость грани Γ^i), которая образует с $P(h_0)$ угол $\beta_0 < \alpha_0$. Это противоречит предположению, что

$$\alpha_0 = \inf_{u \in D} \alpha(u).$$

В случае б) грань Γ^i пересекает конус K , и нашлись бы лучи, отрезки которых лежат на грани Γ^i , образующие с $P(h_0)$ углы, большие β_0 , что противоречит ству $\omega \leq \beta_0$.

Таким образом, луч l_0 идет по ребру трубки T . Обозначим это ребро через r_0 и положим $r'_0 = r_0 \cap l_0$. Повторяя рассуждения пункта б), получим, что грани, для которых точка $T(u_0)$ является граничной и которые пересекаются по ребру $r_0 \supset r'_0$, расположены по одну сторону от плоскости Q_0 . Следовательно, Q_0 является псевдоопорной плоскостью к T , для которой выполняется соотношение

$$\inf_{u \in D} \alpha(u) \leq \beta_0 < \alpha_0.$$

Мы пришли в противоречие с первоначальным допущением

$$\inf_{u \in D} \alpha(u) = \alpha_0.$$

Итак, $\beta_0 \geq \alpha_0$.

2) Переходим к построению ломаной R . Пусть $T(u)$ – произвольная точка на T , а $P(h_1)$: $z = h_1$ – плоскость, проходящая через точку $T(u_1)$. Пусть l_1 – луч, исходящий из точки $T(u_1)$ в подпространство $z > h_1$ и образующий с $P(h_1)$ угол $\beta_1 \geq \alpha_0$.

Существование такого луча мы установили в пункте 1). Луч l_1 может прийти в вершину или ребро на T либо лежать на бесконечной грани и не пересекать её ребер. В последнем случае l_1 и примем за R .

Пусть $T(u_2)$ – первая вершина или точка ребра на T , считая от $T(u_1)$ на луче l_1 . Из точки $T(u_2)$ исходит луч l_2 в полупространство $z > h_2$, определяемое плоскостью $P(h_2)$, проходящей через точку $T(u_2)$. Он образует угол $\beta_2 \geq \alpha_0$ с плоскостью $P(h_2)$. Рассмотрим ломаную, состоящую из отрезка $R_1 \subset l_1$, соединяющего точки $T(u_1)$ и $T(u_2)$, и луча l_2 . Если l_2 лежит на бесконечной грани и не пересекает её ребер, то за R примем ломаную, состоящую из звеньев R_1 и l_2 . Если же l_2 приходит в вершину или точку на ребре, то к точке $T(u_3)$ (первая вершина или точка на ребре, считая от $T(u_2)$, на луче l_2) применяем те же рассуждения, что и к $T(u_2)$ и т. д.

Будем продолжать наше построение до тех пор, пока либо не получим в качестве звена ломаной R бесконечный луч, либо наш процесс приведёт к бесконечной ломаной. Из построения ломаной R следует, что функция $z(u)$ вдоль R возрастает и все звенья R образуют с горизонтальной плоскостью углы $\beta_i \geq \alpha_0$.

Поскольку точка $T(u)$ была выбрана произвольно, то можно утверждать, что из любой точки T исходит ломаная R .

3) Приращение функции $z(u)$ на каждом звене ломаной R удовлетворяет соотношению

$$\Delta z(u) \geq \sin \alpha_0 * \Delta s(u), \quad (1)$$

где $\Delta s(u)$ – длина соответствующего звена ломаной R .

Так как по построению длина ломаной R может быть сделана сколь угодно большой, то, интегрируя соотношение (1) вдоль R , будем иметь, что и полное приращение функции $z(u)$ вдоль R может быть сделано больше любого наперед заданного положительного числа. Но это противоречит условию утверждения 1, что

$$\sup_{u \in D} z(u) < +\infty.$$

Следовательно, наше допущение, что

$$\inf_{u \in D} a(u) = \alpha_0 > 0,$$

неверно. Утверждение 1 доказано.

Следствие. Если в условии утверждения 1 допустить, что

$$\inf_{u \in D} a(u) = \alpha_0 > 0,$$

то $\sup_{u \in D} z(u) = +\infty$.

Сферическое изображение множества $E \subset T$ на единичной сфере S будем обозначать через E^* . В частности, T^* – сферическое изображение трубки T .

Определение. Под бесконечно удалённой частью T_∞^* границы сферического изображения трубки T будем понимать множество всех предельных точек последовательностей $T^*(u_n)$, где $u_n \in D$ сходятся к центру Γ_0 круга D .

Утверждение 2. Пусть T – трубка, заданная в области $D = \{u, 0 < |u| \leq 1\}$ вектор-функцией $\bar{r} = \bar{r}(u)$, а d – диаметр единичной сферы S , оба конца которого не принадлежат множеству T_∞^* . Тогда трубка T не ограничена в пространстве в направлении диаметра d , т. е. проекция T на прямую, параллельную d , не ограничена.

Доказательство. Будем считать, что диаметр d направлен по оси OZ . Поскольку множество T_∞^* замкнуто, то расстояние (на сфере) от концов диаметра d до множества T_∞^* равно некоторому положительному числу α_0 . Возьмем положительное число $\alpha_1 < \alpha_0$. Утверждается, что найдется такое $u_1, |u_1| \in (0, 1)$, что для всех точек трубки $T_1 \subset T$, заданной на $D = \{u, 0 < |u| < |u_1|\}$, будет иметь место соотношение

$$a(u) > \alpha_1 > 0, \quad (2)$$

где $a(u) = \inf_{Q \in M(T(u))} a(u, Q), u \in D$.

Допустим противное, т. е. каково бы ни было u_1 , найдутся точки $T_1(u) \in T_1$, в которых

$$a(u) \leq \alpha_1. \quad (3)$$

Рассмотрим последовательность $u_n \in D$, сходящуюся к точке Γ_0 , а также трубки T_n , заданные на $D_n = \{u, 0 < |u| < |u_n|\}$. Через $T^*(u_n)$ обозначим точку на сфере S , для прообраза которой на T_n выполняется соотношение $a(u) \leq \alpha_1$. Тогда множество $\{T^*(u_n)\}$ будет компактно на T^* , а потому для прообраза предельной точки этой последовательности также верно соотношение (3).

Но, с другой стороны, предельная точка последовательности $T^*(u_n)$ должна принадлежать множеству T_∞^* . Полученное противоречие опровергает наше допущение, и, следовательно, всюду на трубке T верно соотношение (2). Из утверждения 1 заключаем, что трубка T_1 и тем более трубка $T \supset T_1$ не ограничены.

Утверждение 3. Пусть T – многогранная седловая трубка с однолистным сферическим изображением. Тогда она не ограничена в пространстве.

Доказательство. К сферическому изображению T^* трубки T не относим бесконечно удалённую часть T_∞^* границы её сферического изображения.

Покажем, что для многогранной седловой трубки с однолистным сферическим изображением выполняются условия утверждения 2.

Пусть A – внутренняя точка открытого множества T^* , а A' – диаметрально ей точ-

ка на сфере S . Если $A' \notin T_\infty^*$, то диаметр AA' – искомый, если же $A' \in T_\infty^*$, то вблизи точки A' найдутся точка $A_1 \in T^*$ и диаметральная ей точка $A_1 \in T^*$. В этом случае $A_1A'_1$ – искомый диаметр.

Результаты настоящей заметки в классе регулярных поверхностей ранее получены А.Л. Вернером [1].

Литература

1. Кон-Фоссен С.Э. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. – М.: Физматгиз, 1959.
2. Вернер А.Л. Топологическое строение полных поверхностей неположительной кривизны со взаимно однозначным сферическим изображением // Вестник ЛГУ. – 1965. – Т. 7, № 2.
3. Вернер А.Л. О внешней геометрии простейших полных поверхностей // Мат. сб. – 1967. – Т. 74 (116), № 2.
4. Вернер А.Л. Неограниченность гиперболического рога в евклидовом пространстве // Сиб. мат. ж. – 1968. – Т. 9, № 1.
5. Вернер А.Л. Сужающиеся седловые поверхности // Сиб. мат. ж. – 1970. – Т. 11, № 4.
6. Вернер А.Л. Два подхода к классификации полных сферически однолистных седловых поверхностей // Уч. записки ЛГПИ им. А.И. Герцена. – 1970. – Т. 395.
7. Бураго Ю.Д. Неравенства изопериметрического типа в теории поверхностей ограниченной внешней кривизны. Записки науч. Сем. ЛОМИ АН СССР. – 1968. – Т. 10. – С. 3–202.
8. Розендорн Э.Р. Построение ограниченной полной поверхности неположительной кривизны // УМН. – 1961. – Т. 16, вып. 2 (98). С. 149–156.
9. Розендорн Э.Р. О полных поверхностях отрицательной кривизны $K \leq -1$ в евклидовых пространствах E^3 и E^4 // Мат. сб. – 1962. – Т. 58 (100), № 4. – С. 453–478.
10. Насрулаев Ф.С. О связности полной гладкой поверхности со взаимно однозначным сферическим изображением // Изв. вузов. Математика. – 1968. – № 12. – С. 62–69.
11. Насрулаев Ф.С. К вопросу о строении многогранных седловых трубок // Вестник ДГУ. Сер.: 1. Естеств. науки. – 2009. – Вып. 1. – С. 29–31.
12. Насрулаев Ф.С., Гаджимурадов М.А. Неограниченность многогранного седлового рога в евклидовом пространстве // V Всесоюзная конференция по современным проблемам геометрии. – Самарканд, 1972.

Поступила в редакцию 9 августа 2018 г.

UDC 513.34

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-3-67-72

Some properties of polyhedral pipes

F.S. Nasrulayev

*Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a;
saytarvi@gmail.com*

Suppose that a polyhedral tube T is given in a three-dimensional Euclidean space by a vector function $\bar{r} = \bar{r}(u) = \{x(u), y(u), z(u)\}$ in the closed circle $D = \{u = (u^1, u^2)\}$ with a punctured center.

Further, let Q be an arbitrary pseudo-support plane to T at the point $T(u)$, and $\alpha(u, Q)$ is the smallest angle between Q and the plane $P(h): z = h$.

Let's denote by $\alpha(u)$ the minimum of the function $\alpha(u, Q)$, where Q runs through the whole set of pseudo-supporting planes to T at the point $T(u)$.

The following properties of polyhedral tubes are established in this paper.

1. If, in u running the circle D , supremum of the function $z(u)$ is less than plus infinity, then infimum of the function $\alpha(u)$ equals zero.
2. If d is the diameter of the unit sphere S , both ends of which do not belong to the infinity distant part of the boundary of the spherical image of the tube T , then the tube T is unbounded in space in the direction of the diameter d .
3. If T is a polyhedral saddle tube with a univalent spherical image, then it is unbounded in space.

Keywords: *multifaceted tube, pseudo-support plane, spherical image, an infinitely distant part of the boundary of a spherical image, saddle tube, unboundedness in space.*

Received 9 August, 2018