УДК 517.946

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-3-62-66

Н.А. Алиев, С.Р. Велиева

Смешанная задача для одного уравнения с частными производными четвертого порядка

Бакинский государственный университет; Азербайджан, AZ1148, г. Баку, ул. Академика Захида Халилова, 23; sevinj_veliyeva@mail.ru

В работе рассматривается смешанная задача для двумерного уравнения движения сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости четвертого порядка с постоянными коэффициентами. С помощью преобразования Лапласа поставленная смешанная задача сводится к граничной задаче для уравнения второго порядка с комплексным параметром. С помощью функции Грина получаем представление решения спектральной задачи. Решение же исходной смешанной задачи получается с помощью обратного преобразования Лапласа. Так как уравнение и граничные условия спектральной задачи получены из уравнения и граничного условия смешанной задачи с помощью преобразования Лапласа, то очевидно, что решение смешанной задачи удовлетворяет как уравнению, так и граничным условиям поставленной задачи. Для проверки начальных условий получаем асимптотическое представление решения спектральной задачи относительно спектрального параметра.

Ключевые слова: смешанная задача, нелокальные граничные условия, преобразование Лапласа, спектральная задача, собственные значения и собственные функции, решения смешанной задачи в виде обратного преобразования Лапласа.

Введение

Работа посвящена исследованию решений смешанной задачи для уравнения четвертого порядка.

Как известно, в курсе «Уравнения математической физики» в курсе «Уравнения с частными производными» смежная задача рассматривается в основном для уравнения гиперболического и параболического типа [1, 2, 3].

При исследовании таких задач в основном прилагается стандартный инженерный метод разделения переменных (метод Фурье), который приводится к вычетному методу Коши [4].

Метод разделения переменных был предложен для решения волнового уравнения Ж. Доламбером. С достаточной полнотой метод был развит в начале XIX века Ж. Фурье и полностью сформулирован М.В. Остроградским в 1828 году.

Вычетный метод Коши также применен к решению задачи Коши для двумерного однородного уравнения высшего порядка [5].

Далее к этим задачам (когда в рассматриваемом уравнении переменные не разделяются) изменяется преобразование Лапласа, продолжением которого является метод контурного интеграла [6, 7].

Несмотря на то, что для рассматриваемого нами уравнения можно применить метод разложения переменных, мы будем применять преобразование Лапласа.

Постановка задачи

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения движения сжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial t^4} - \frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^2 \partial t^2} + b^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \omega_0^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= \varphi_0(x), \\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \varphi_1(x), \\ \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} &= \varphi_2(x), \\ \frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^3} \Big|_{t=0} &= \varphi_3(x), \end{aligned} \right\} \quad x \in [0,1], \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{10}u(0,t) + \alpha_{11} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \beta_{10}u(1,t) + \beta_{11} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=1} &= \gamma_1(t), \\ \alpha_{20}u(0,t) + \alpha_{21} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} + \beta_{20}u(1,t) + \beta_{21} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=1} &= \gamma_2(t), \end{aligned} \right\} \quad t \geq 0, \quad (3)$$

где c , b и ω_0 – заданные вещественные числа, $\varphi_k(x)$, $k = \overline{0,3}$ – непрерывные вещественно-значные функции, α_{pq} , β_{pq} , $p = 1,2$, $q = 0,1$; заданные вещественные числа, $\gamma_p(t)$ при $p = 1,2$ – непрерывные функции, а граничные условия (3) – линейно независимые, $u(x,t)$ – искомая функция.

Применяя преобразование Лапласа к смешанной задаче (1)–(3), имеем

$$\tilde{u}''(x, \lambda) - A^2(\lambda) \tilde{u}(x, \lambda) = F(x, \lambda), \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{10} \tilde{u}(0, \lambda) + \alpha_{11} \frac{d}{dx} \tilde{u}(x, \lambda) \Big|_{x=0} + \beta_{10} \tilde{u}(1, \lambda) + \beta_{11} \frac{d}{dx} \tilde{u}(x, \lambda) \Big|_{x=1} &= \tilde{\gamma}_1(\lambda) \\ \alpha_{20} \tilde{u}(0, \lambda) + \alpha_{21} \frac{d}{dx} \tilde{u}(x, \lambda) \Big|_{x=0} + \beta_{20} \tilde{u}(1, \lambda) + \beta_{21} \frac{d}{dx} \tilde{u}(x, \lambda) \Big|_{x=1} &= \tilde{\gamma}_2(\lambda) \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где

$$A(\lambda) = \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{\lambda^2 + b^2}{\lambda^2 + \omega_0^2}}, \quad (6)$$

$$F(x, \lambda) \equiv \frac{1}{c^2(\lambda^2 + \omega_0^2)} \left[c^2 (\varphi_1''(x) + \lambda \varphi_0''(x)) - c^2 b^2 (\varphi_1(x) + \lambda \varphi_0(x)) \right] - (\varphi_3(x) + \lambda \varphi_2(x) + \lambda^2 \varphi_1(x) + \lambda^3 \varphi_0(x)), \quad (7)$$

$\tilde{u}(x, \lambda)$ – преобразование Лапласа $u(x, t)$, а $\tilde{\gamma}_k(\lambda)$ – преобразование Лапласа $\gamma_k(t)$ $k = 1, 2$, $\lambda \in C$.

Решение спектральной задачи (4)–(5) имеет вид

$$\tilde{u}(x, \lambda) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) F(\xi, \lambda) d\xi. \quad (8)$$

А решение смешанной задачи (1)–(3) с помощью обратного преобразования Лапласа представляется в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{\lambda t} \tilde{u}(x, \lambda) d\lambda, \quad (9)$$

где $G(x, \xi, \lambda)$ – функция Грина спектральной задачи (4)–(5), а L – линия Лапласа, расположенная в комплексной плоскости λ , которая параллельна линиям оси и находится в правой полуплоскости.

Далее для функции Грина

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

где $\Delta_{11} = \alpha_{10} - \alpha_{11}A(\lambda) - \beta_{10}e^{-A(\lambda)} - \beta_{11}A(\lambda)e^{-A(\lambda)}$,

$\Delta_{12} = \alpha_{10}e^{-A(\lambda)} + \alpha_{11}A(\lambda)e^{-A(\lambda)} + \beta_{10} - \beta_{11}A(\lambda)$,

$$\Delta_{21} = \alpha_{20} - \alpha_{21}A(\lambda) - \beta_{20}e^{-A(\lambda)} - \beta_{21}A(\lambda)e^{-A(\lambda)},$$

$$\Delta_{22} = \alpha_{20}e^{-A(\lambda)} + \alpha_{21}A(\lambda)e^{-A(\lambda)} + \beta_{20} - 2A(\lambda).$$

Правые линии Лапласа имеют асимптотические представления

$$\Delta(\lambda) = \frac{\lambda^2}{c^2}(\alpha_{21}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{21}), \quad (10)$$

а левой полуплоскости –

$$\Delta(\lambda) = \frac{\lambda^2}{c^2}(\alpha_{11}\beta_{21} - \alpha_{21}\beta_{11})e^{-2\frac{\lambda}{c}}. \quad (11)$$

Что касается функции Грина, то для нее на правых линиях Лапласа имеет место оценка

$$|G(x, \xi, \lambda)| \leq \frac{c}{|\lambda|}, \quad (12)$$

а в левой полуплоскости –

$$|G(x, \xi, \lambda)| \leq \frac{c}{|\lambda|} e^{\frac{1}{c} \operatorname{Re} \lambda}. \quad (13)$$

Таким образом, для решения вспомогательной задачи (4)–(5) имеем следующую асимптотику:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, \lambda) = & -\frac{1}{2\left(\frac{\lambda}{c} + \frac{b^2c^2 - \omega_0^2}{2\lambda c}\right)} \int_0^x (-1) \left(\frac{\lambda}{c^2} \varphi_0(\xi) + \frac{1}{c^2} \varphi_1(\xi) + \frac{1}{\lambda} \varphi_{20}(\xi) + \frac{1}{\lambda^2} \varphi_{31}(\xi) \right) \times \\ & \times e^{-\left(\frac{\lambda}{c} + \frac{b^2c^2 - \omega_0^2}{2\lambda c}\right)(x-\xi)} d\xi - \frac{1}{2\left(\frac{\lambda}{c} + \frac{b^2c^2 - \omega_0^2}{2\lambda c}\right)} \int_x^1 (-1) \left(\frac{\lambda}{c^2} \varphi_0(\xi) + \frac{1}{c^2} \varphi_1(\xi) + \frac{1}{\lambda} \varphi_{20}(\xi) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\lambda^2} \varphi_{31}(\xi) \right) e^{-\left(\frac{\lambda}{c} + \frac{b^2c^2 - \omega_0^2}{2\lambda c}\right)(\xi-x)} d\xi + \frac{c}{\lambda^2} \cdot \frac{K_1\beta_{21} - K_2\beta_{11}}{\alpha_{21}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{21}} \cdot e^{-\left(\frac{\lambda}{c} + \frac{b^2c^2 - \omega_0^2}{2\lambda c}\right)x} + \\ & + \frac{c}{\lambda^2} \cdot \frac{K_1\alpha_{21} - K_2\alpha_{11}}{\alpha_{21}\beta_{11} - \alpha_{11}\beta_{21}} \cdot e^{-\left(\frac{\lambda}{c} + \frac{b^2c^2 - \omega_0^2}{2\lambda c}\right)(1-x)} + \dots + O(\lambda^{-5}), \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\varphi_{20}(\xi) = \frac{1}{c^2} \varphi_2(\xi) + b^2 \varphi_0(\xi) - \varphi_0''(x) \frac{\lambda}{c^2} \varphi_0(\xi) - \frac{\omega_0^2}{c^2} \varphi_0(\xi), \quad (15)$$

$$\varphi_{31}(\xi) = \frac{1}{c^2} \varphi_3(\xi) + b^2 \varphi_1(\xi) - \varphi_1''(\xi) - \frac{\omega_0^2}{c^2} \varphi_1(\xi). \quad (16)$$

$$K_1 = \left(\tilde{\gamma}_1 - \frac{\alpha_{11}}{2} \varphi_0'(0) - \frac{\beta_{11}}{2} \varphi_0'(0) \right) \quad K_2 = \left(\tilde{\gamma}_2 - \frac{\alpha_{21}}{2} \varphi_0'(0) - \frac{\beta_{21}}{2} \varphi_0'(0) \right).$$

Интегрируя по частям, из (8) получим следующее асимптотическое представление:

$$\tilde{u}(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \varphi_0(x) + \frac{1}{\lambda^2} \varphi_1(x) + \frac{1}{\lambda^3} \varphi_2(x) + \frac{1}{\lambda^4} \varphi_3(x) + O(\lambda^{-6}). \quad (17)$$

Таким образом установлены следующие утверждения:

Теорема 1. Пусть коэффициенты уравнения (1) c, b, ω_0 , отличные от нуля, являются коэффициентами линейно независимого граничного условия (3), а α_{ij}, β_{ij} при $i = \overline{1,2}, j = \overline{0,1}$ – заданные вещественные числа и $\alpha_{21}, \beta_{11} - \alpha_{11} \beta_{21} \neq 0$, $\varphi_k(x), k = \overline{0,3}$ – заданные функции начального условия (2), а правые части граничного условия (3) $\gamma_i(t), i = \overline{1,2}$ – непрерывные вещественно-значные функции, где функции $\varphi_0^{IV}(x), \varphi_1^{IV}(x), \varphi_2'(x), \varphi_3'(x)$ непрерывные и удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} \varphi_0(0) = \varphi_0(1) = \varphi_0'(0) = \varphi_0'(1) = \varphi_0''(0) = \varphi_0''(1) = \varphi_0'''(0) = \varphi_0'''(1) = 0, \\ \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = \varphi_1'(0) = \varphi_1'(1) = \varphi_1''(0) = \varphi_1''(1) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(0) = \varphi_2(1) = \varphi_2'(0) = \varphi_2'(1) = 0, \\ \varphi_3(0) = \varphi_3(1) = 0.\end{aligned}$$

Тогда для преобразования Лапласа решения $u(x, t)$ функция $\tilde{u}(x, \lambda)$ имеет асимптотическое представление вида (17).

Теорема 2. При условиях теоремы 1 существует единственное решение смешанной задачи (1)–(3), представимое в виде (9).

Действительно, как видно из вспомогательной граничной задачи (4)–(5) при условии теоремы 2 выражение (9) удовлетворяет как уравнению (1), так и граничному условию (3).

Что касается начальных условий (2), они получаются из асимптотического представления (17) решений граничной задачи (4)–(5).

Для этого достаточно замкнуть линии Лапласа L с замкнутым контуром, лежащим в левой полуплоскости от этой линии, и вычислить соответствующий вычет по полюсу, лежащему в начале координат.

Наконец заметим, что дифференцируемость выражения (9) как по x , так и по t следует из полученного асимптотического представления, для которого достаточно заменить линии Лапласа полуокружностью, лежащей в правой полуплоскости от линии Лапласа, где решение спектральной задачи (вспомогательной граничной задачи) является аналитической функцией. Заметим, что для этого вначале нужно оценить экспоненциальную функцию вдоль линии Лапласа, где она является ограниченной.

Литература

1. Gellerstedt S. Ark. mat. astr. sys. – 1937. – Bd. 25A, № 29. – P. 1–23.
2. Thomee V. Difference methods for two dimensional mixed problems for hyperbolic first order systems // Archive for Rat. Mech. and Anal. – 1961. – V. 8, № 1. – P. 68–88.
3. Расулов М.Л. Вычетный метод решения смешанных задач для дифференциальных уравнений и формула разложения производной вектор-функции по фундаментальным функциям граничной задачи с параметром // Мат. сборник. – 1959. – Т. 48 (901), № 3. – С. 277–310.
4. Aliyev N.A., Zeynalov I.S. The representation of a solution of a certain Cauchy problem in the form of an integral residue // Differential equations. – 1965, № 1. – P. 1264–1266.
5. Aliyev V.A. Application of the contour integral method to the solution of a problem in the theory of elasticity // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical – Technical and Mathematical Sciences. – 1965. – № 4. – P. 3–13.
6. Расулов М.Л. Метод контурного интеграла и его применение к решению многомерных смешанных задач для дифференциальных уравнений параболического типа // Мат. сборник. – Т. 60 (102), № 4. – С. 393–410. – М., 1963.
7. Зейналов Р.М., Алиев Н.А. Задача Заре́мы-Стеклова для уравнения Коши–Римана // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2015. – Вып. 6.
8. Зейналов Р.М., Алиев Н.А., Мамедова Н.Б. Граничная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения первого порядка эллиптического типа // Современные тенденции развития науки и технологий. – Белгород. – 2016. – № 6–2.
9. Sajjadamansh M., Jahanshahi M., Aliyev N. Tikhonov-Lavrentev type inverse problem including Cauchy–Riemann equation // Azerbaijan Journal of Mathematics. – Vol. 3, № 1. – Baku, 2013. – P. 104–110.
10. Aliyev N.A., Asadova O.H., Aliyev A.M. Solution of Mixed Problem Including a First Order Three Dimensional P.D.E with Nonlocal and Global Boundary Conditions, 9th

Seminar on Differential Equations and Dynamical Systems 11–13 July, 2012. – P. 339–342.

Поступила в редакцию 15 июня 2018 г.

UDC 517.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-3-62-66

A mixed problem for a single equation with partial derivatives of the fourth order

N.A. Aliyev, S.R. Valiyeva

*Baku State University; Azerbaijan, AZ1148, Baku, academ. Zahid Khalilov st., 23;
sevinj_veliyeva@mail.ru*

The paper considers a mixed problem for the two-dimensional equation of motion for a compressible exponentially stratified fluid of the fourth order with constant coefficients. With the help of Laplace transform, the posed mixed problem reduces to the boundary value problem for a second-order equation with a complex parameter. Using the Green's function, we obtain a representation of the solution of the spectral problem. The solution of the initial mixed problem is obtained by means of the inverse Laplace transform. Taking into account that the equation and boundary conditions of the spectral problem are obtained from the equation and the boundary condition of the mixed problem by means of the Laplace transform, it is obvious that the solution of the mixed problem satisfies both the equation and the boundary conditions of the considered problem. To verify the initial conditions, we obtain an asymptotic representation of the solution of the spectral problem with respect to the spectral parameter.

Keywords: mixed problem, nonlocal boundary conditions, Laplace transform, spectral problem, eigenvalues and eigenfunctions, solutions of the mixed problem in the form of inverse Laplace transform.

Received 15 June, 2018