МАТЕМАТИКА

УДК 517.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-3-54-61

Н.Ш. Загиров, Т.Ю. Гаджиева

Оценки постоянной А.А. Маркова в весовом пространстве Якоби

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; nizam_zagirov@mail.ru, tamila.usup@mail.ru

Основной целью нашего исследования является получение алгоритмов численного нахождения и оценок постоянной Маркова в весовом пространстве множества всех вещественных измеримых функций, квадраты которых с заданным весом суммируемы на некотором отрезке. Нами установлены общие результаты для любого веса. Затем отдельно изучаем проблему для классических весов Якоби, Лагерра и Эрмита. В настоящей статье рассмотрен случай, когда в качестве веса взят вес Якоби на отрезке.

А.А. Марков нашел значение этой постоянной в случае пространства непрерывных на отрезке функций. Данные оценки в различных пространствах были найдены Конягиным С.Б. и Н.К. Бари.

В статье установлено выражение для постоянной Маркова в случае производной произвольного порядка. Нами также разработан алгоритм численного нахождения оценок в весовом пространстве Якоби.

Ключевые слова: *оценки постоянной Маркова, ортонормированный многочлен, весовая функция.*

Пусть X – линейное нормированное пространство, содержащее Π_n – множество всех многочленов степени не выше, чем n .

Постоянной Маркова называется число

$$M_{n,k} = M_{n,k}(X) = \sup \left\{ \frac{\|f^{(k)}\|}{\|f\|} : f \in \Pi_n, f \neq 0 \right\}, \quad 1 \leq k \leq n, \quad n = 1, 2, \dots$$

А.А. Марков [1] доказал, что в случае $X = C[-1,1]$ постоянная $M_{n,1} = n^2$; в том же пространстве значение $M_{n,k}$ было найдено В.А. Марковым [2]. Оценки $M_{n,k}$ в случае, когда $X = L_1$ найдены в [3], а в случае L_p , $p > 1$ их установила Н.К. Бари [4].

Смежные вопросы были разобраны в работах [5–9].

Нами [10] найден численный алгоритм вычисления $M_{n,1}$, когда $X = L_{2,p}$. Цель настоящей статьи – получение алгоритмов численного нахождения и оценок $M_{n,k}$ в весовом пространстве $L_{2,p}$.

Напомним, что через $L_{2,\rho}$ обозначается множество всех функций f , для которых $|f|^2$ является суммируемой по весу ρ . Рассмотрим случай, когда $\rho(x) = (1-x^2)^\alpha$, $\alpha > -1$ – вес Якоби на отрезке $[-1,1]$.

Введем некоторые обозначения. Через $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ обозначим ортонормированную систему многочленов по весу ρ ; $\langle f, g \rangle$ – скалярное произведение f и g .

$$\langle f, g \rangle = \int \rho(t) f(t) g(t) dt, \\ \|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}.$$

Пусть $c_{ij} = c_{ij}^{(k)}$ – коэффициенты Фурье многочлена $P_j^{(k)}$ по системе $\{P_n\}$:

$$c_{ij}^{(k)} = \int \rho(t) P_j^{(k)}(t) P_{i-1}(t) dt, \quad (1) \\ P_j^{(k)}(t) = \sum_{i=1}^{j-k+1} c_{ij}^{(k)} P_{i-1}(t), \quad j = k, \dots, n.$$

С помощью чисел $c_{ij} = c_{ij}^{(k)}$ образуем симметричную матрицу B , для чего обозначим через

$$m = m(j, v) = \min(j, v).$$

Тогда

$$B_{jv} = \sum_{i=1}^{m-k+1} c_{ij} c_{iv},$$

$$j = k, \dots, n; \quad v = k, \dots, n.$$

Справедливо следующее утверждение, которое для $k = 1$ было доказано в [10].

Теорема 1. Значение $M_{n,k}^2$ совпадает с наибольшим собственным значением $\lambda_{\max}$ матрицы B :

$$M_{n,k} = \sqrt{\lambda_{\max}}.$$

Доказательство.

Пусть $f \in \Pi_n$, $f = \sum_{j=0}^n x_j P_j$. Тогда $\|f\|^2 = \sum_{j=0}^n x_j^2$ и

$$f^{(k)} = \sum_{j=k}^n x_j P_j^{(k)} = \sum_{j=k}^n x_j \sum_{i=1}^{j-k+1} c_{ij}^{(k)} P_{i-1} = \sum_{i=1}^{n-k+1} \sum_{j=i+k-1}^n c_{ij}^{(k)} x_j P_{i-1}.$$

$$\|f^{(k)}\|^2 = \sum_{i=1}^{n-k+1} \left(\sum_{j=i+k-1}^n c_{ij}^{(k)} x_j \right)^2.$$

Меняем местами знаки суммирования:

$$\|f^{(k)}\|^2 = \sum_{j=k}^n \sum_{v=k}^n \sum_{i=1}^{m-k+1} c_{ij} c_{iv} x_j x_v,$$

$$m = m(j, v) = \min(j, v).$$

Задача

$$\|f^{(k)}\|^2 \rightarrow \sup, \quad \|f^{(k)}\| \leq 1$$

принимает вид

$$\sum_{j=k}^n \sum_{v=k}^n B_{jv} x_j x_v \rightarrow \sup ,$$

$$\sum_{j=k}^n x_j^2 = 1 ,$$

т. е. она сводится к нахождению максимального значения квадратичной формы на единичной сфере. Значением последней задачи является $\lambda_{\max}$.

Теорема доказана.

Из теоремы 1 получается следующее правило численного нахождения $M_{n,k}$ при заданных n и k , которое будем называть $M_{n,k}$ -алгоритмом.

Шаг 1. Построить таблицу коэффициентов $c_{ij} = c_{ij}^{(k)}$, $j = k, \dots, n$, $i = 1, \dots, j - k + 1$.

Шаг 2. Подсчитать элементы матрицы B :

$$B_{ij} = \sum_{i=1}^{j-k+1} c_{ij} c_{iv} , \quad v = j, \dots, n , \quad j = k, \dots, n .$$

Шаг 3. По симметрии записать остальные элементы матрицы B .

Шаг 4. К полученной симметричной матрице B $n - k + 1$ -го порядка применить один из методов численного нахождения наибольшего собственного значения.

Ниже установлены формулы нахождения коэффициентов $c_{ij}^{(k)}$.

Обозначим через $A_n = A_{n,\rho}$ старший коэффициент ортонормированного по весу ρ многочлена $P_n = P_{n,\rho}$ ($A_n > 0$).

Теорема 2. Для любого $j = k, \dots, n$ справедливо равенство

$$c_{j-k+1,j}^{(k)} = \frac{j! A_j}{(j-k)! A_{j-k}} , \quad j = k, \dots, n .$$

Доказательство. Замечая, что

$$P_j^{(k)}(x) = \frac{j!}{(j-k)!} A_j x^{j-k} + \dots ,$$

имеем

$$c_{j-k+1,j}^{(k)} = \int \rho P_j^{(k)}(x) P_{j-k}(x) dx = \frac{j!}{(j-k)!} \cdot \frac{A_j}{A_{j-k}} \int \rho (A_{j-k} x^{j-k} + \dots) P_{j-k}(x) dx = \frac{j!}{(j-k)!} \cdot \frac{A_j}{A_{j-k}} .$$

Следствие. $M_{n,n} = n! A_n \sqrt{\int \rho(x) dx}$.

Замечание. Так как для любого многочлена $P(x) = a_n x^n + \dots$, $P^{(n)}(x) = a_n n!$, то среди всех многочленов степени не выше, чем n , норма которых не превосходит 1, наибольшим старшим коэффициентом обладает ортонормированный многочлен $P_{n,\rho}$. В равномерной метрике нами [11] было доказано, что этим свойством обладает многочлен Чебышева $T_n(x)$.

Для сокращения записей будем рассматривать только ультрасферические многочлены

$$\rho(x) = \rho_\alpha(x) = (1-x^2)^\alpha, \quad \alpha > -1.$$

Пусть многочлены $P_n(x) = P_{n,\alpha}(x)$ заданы формулой Родрига [12]:

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{\rho(x)} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n+\alpha}.$$

Известно, что [12, с. 80] $P_n \in \Pi_n$, $\int_{-1}^1 \rho(t) P_n(t) P_m(t) dt = 0$, если $n \neq m$,

$$\int_{-1}^1 \rho(t) P_n^2(t) dt = h_n(\alpha),$$

$$h_n(\alpha) = \frac{2^{2\alpha+1}}{2n+2\alpha+1} \cdot \frac{\Gamma^2(n+\alpha+1)}{n! \Gamma(n+2\alpha+1)}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{h_n(\alpha)}} P_{n,\alpha}(t) = \hat{P}_{n,\alpha}(t)$$

образует ортонормированную систему многочленов по весу $\rho_\alpha(t)$.

В дальнейшем нам понадобится формула дифференцирования [12, с. 83]:

$$P'_{n,\alpha}(t) = \frac{1}{2} (n+2\alpha+1) P_{n-1,\alpha+1}(t). \quad (*)$$

Для краткости положим

$$\lambda_n = \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}.$$

Кроме того, пусть

$$F_{n,v}(t) = \frac{d^v}{dt^v} (1-t^2)^{n+\alpha}, \quad v = 0, 1, \dots, n.$$

Очевидно,

$$P_{n,\alpha}(t) = \lambda_n \cdot \frac{1}{\rho_\alpha(t)} \cdot F_{n,n}(t);$$

$$F_{n,0}(t) = (1-t^2)^{n+\alpha}; \quad F_{n,v+1}(t) = F'_{n,v}(t).$$

Индукцией по v можно проверить, что

$$F_{n,v}(t) = \rho_\alpha(t) (1-t^2)^{n-v} \cdot R_v(t), \quad (2)$$

где $R_v \in \Pi_v$, $v = 0, 1, \dots, n$.

Из равенства (2) следует, что

$$F_{n,v}(\pm 1) = 0, \quad \text{если } v = 0, 1, \dots, n-1. \quad (3)$$

Отметим также, что старший коэффициент $A_{n,\alpha}$ многочлена $\hat{P}_{n,\alpha}(t)$ определяется равенством [12]:

$$A_n = A_{n,\alpha} = \frac{1}{n! 2^n} \cdot \frac{\Gamma(2n+2\alpha+1)}{\Gamma(n+2\alpha+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{h_n(\alpha)}}, \quad (4)$$

а коэффициент при t^{n-1} равен нулю.

В обозначениях этого коэффициенты $c_{ij}^{(k)}$ (1) задаются формулой

$$c_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{h_j(\alpha)h_{i-1}(\alpha)}} \int_{-1}^1 \rho_\alpha(t) P_j^{(k)}(t) P_{i-1}(t) dt \quad (5)$$

$$j = k, \dots, n; i = 1, \dots, j - k + 1.$$

Теорема 3. Если $j = k, \dots, n$ и $i = 1, \dots, j - k + 1$, $1 \leq k \leq n$, то коэффициенты $c_{ij}^{(k)} = 0$, когда число $j - i + k + 1$ является нечетным; когда же $j - i + k + 1$ является четным числом, то

$$c_{ij}^{(k)} = \frac{2^{2\alpha+1}}{2^k \sqrt{h_j(\alpha)h_{i-1}(\alpha)}} \cdot \left(\frac{j+k-i-1}{2} \right)! \cdot \frac{1}{\left(\frac{j-k-i+1}{2} \right)!} \cdot \frac{1}{(k-1)!(i-1)!} \cdot \frac{\Gamma(j+\alpha+i)}{\Gamma(j+2\alpha+i)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \frac{j+i-k+1}{2})}{\Gamma(\alpha + \frac{j+i+k+1}{2})} \cdot \frac{\Gamma(2\alpha+j+k+i)}{\Gamma(2\alpha+j-k+1)}.$$

Доказательство. Используя определение функции $F_{n,v}$ и равенство (5), имеем:

$$c_{ij}^{(k)} = \frac{\lambda_{i-1}}{\sqrt{h_j(\alpha)h_{i-1}(\alpha)}} \int_{-1}^1 P_{j,\alpha}^{(k)}(t) F_{i-1,i-1}(t) dt$$

Интегрирование по частям и равенства (3) позволяют записать, что

$$I = \int_{-1}^1 P_{j,\alpha}^{(k)}(t) F_{i-1,i-1}(t) dt = (-1)^{i-1} \int_{-1}^1 P_{j,\alpha}^{(k+i-1)}(t) F_{i-1,0}(t) dt = (-1)^{i-1} \int_{-1}^1 P_{j,\alpha}^{(k+i-1)}(t) \cdot (1-t^2)^{i-1+\alpha} dt.$$

С помощью равенства (*) можно убедиться, что

$$P_{j,\alpha}^{(k+i-1)}(t) = \frac{1}{2^{k+i-1}} \cdot (j+2\alpha+1) \cdot \dots \cdot (j+2\alpha+k+i-1) \cdot P_{j-k-i+1,\alpha+k+i-1}(t).$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^1 P_{j,\alpha}^{(k)}(t) F_{i-1,i-1}(t) dt = \frac{(-1)^{i-1}}{2^{k+i-1}} \cdot \frac{\Gamma(2\alpha+j+k+i)}{\Gamma(2\alpha+j+1)} \cdot \int_{-1}^1 (1-t^2)^{i-1+\alpha} \cdot P_{j-k-i+1,\alpha+k+i-1}(t) dt.$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся формулой Родрига ($m = j - k - i + 1$):

$$P_{j-k-i+1,\alpha+k+i-1}(t) = \frac{\lambda_m}{(1-t^2)^{\alpha+k+i-1}} \frac{d^m}{dt^m} (1-t^2)^{j+\alpha} = \frac{\lambda_m \Gamma^2(j+\alpha+1)}{(1-t^2)^{\alpha+k+i-1}} \sum_{v=0}^m (-1)^v C_m^v \frac{(1-t)^{j+\alpha-v} (1+t)^{j+\alpha+v-m}}{\Gamma(j+\alpha-v+1) \Gamma(j+\alpha-m+v+1)}.$$

Отсюда следует, что

$$I = \frac{(-1)^{i-1}}{2^{k+i-1}} \frac{\lambda_m \Gamma^2(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+2\alpha+1)} \cdot \Gamma(j+2\alpha+k+i) \cdot \sum_{v=0}^m (-1)^v C_m^v \frac{1}{\Gamma(j+\alpha-v+1) \Gamma(j+\alpha-m+v+1)} \int_{-1}^1 (1-t)^{j+\alpha-v-k} (1+t)^{i+\alpha+v-1} dt.$$

Так как (см., например, [10])

$$\int_{-1}^1 (1-t)^p (1+t)^q dt = 2^{p+q+1} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)},$$

то

$$I = \frac{(-1)^{i-1}}{2^{k+i-1}} \frac{\lambda_m \Gamma^2(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+2\alpha+1)} \cdot \Gamma(j+2\alpha+k+i) \cdot 2^{j-k+2\alpha+i},$$

$$\sum_{v=0}^m (-1)^v C_m^v \frac{\Gamma(j+\alpha-v-k+1)\Gamma(\alpha+v+i)}{\Gamma(j+\alpha-v+1)\Gamma(j+\alpha-m+v+1)\Gamma(j+i+2\alpha-k+1)}$$

или

$$I = \frac{(-1)^{i-1}}{2^{2k-j-2\alpha-1}} \cdot \frac{\lambda_m \Gamma^2(j+\alpha+1)\Gamma(j+2\alpha+k+i)}{\Gamma(j+2\alpha+1) \cdot \Gamma(j-k+2\alpha+i+1)} \cdot s,$$

где

$$s = \sum_{v=0}^m (-1)^v C_m^v \frac{\Gamma(j+\alpha-v-k+1)\Gamma(\alpha+v+i)}{\Gamma(j+\alpha-v+1)\Gamma(k+\alpha+v+i)}. \quad (6)$$

Это означает, что

$$c_{ij}^{(k)} = \frac{2^{-k+2\alpha+1}}{\sqrt{h_j(\alpha)h_{i-1}(\alpha)}} \cdot \frac{1}{(j-k-i+1)!(i-1)!} \cdot \frac{\Gamma^2(j+\alpha+1)\Gamma(j+2\alpha+k+i)}{\Gamma(j+2\alpha+1) \cdot \Gamma(j-k+2\alpha+i+1)}.$$

Если ввести в равенство (6) параметры $m = j-k-i+1$, $\beta = \alpha+i$ ($\beta > 0$), то

$$\frac{\Gamma(j+\alpha-v-k+1)}{\Gamma(j+\alpha-v+1)} = \frac{1}{(m-v+\beta) \cdot \dots \cdot (m-v+\beta+k-1)},$$

$$s = \sum_{v=0}^m (-1)^v C_m^v \frac{1}{(\beta+v) \cdot \dots \cdot (\beta+v+k-1)(m-v) \cdot \dots \cdot (m-v+\beta+k-1)}.$$

Для нечетных m , в силу симметрии, $s = 0$.

В работе [13] нами найдено значение этой суммы для четных m :

$$s = \frac{m!}{(k-1)!} \cdot \frac{\left(\frac{m}{2} + k - 1\right)!}{\left(\frac{m}{2}\right)!} \frac{\Gamma(\alpha+i)\Gamma(\alpha+i+\frac{m}{2})}{\Gamma(k+\alpha+\frac{m}{2}+i)\Gamma(\alpha+i+k+m)}.$$

Остается подставить это значение (с заменой m на $j-k-i+1$) в равенство для $c_{ij}^{(k)}$.

Теорема доказана.

Из теоремы 3 при $k = 1$ получаем равенство:

$$c_{ij}^{(1)} = \frac{2^{2\alpha+1}}{\sqrt{h_j(\alpha)h_{i-1}(\alpha)}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+i)}{(i-1)!} \cdot \frac{\Gamma(j+\alpha+1)}{\Gamma(j+2\alpha+1)}.$$

Оно (в общем случае $\alpha, \beta > -1$) было ранее установлено нами в [10]. Если в той же теореме считать $2\alpha = 1$, то будем иметь

$$c_{ij}^{(k)} = \frac{i \cdot 2^{-k+1}}{r!(k-1)!} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{j+i-k+2}{2}\right)}{\Gamma(j-k+i+2)} \cdot \frac{\Gamma(j+k+i+1)}{\Gamma\left(\frac{j+i+k+2}{2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{j+k-i-1}{2}\right)!}{\left(\frac{j-i-k-1}{2}\right)!},$$

где $j-i-k+1 = 2r$.

Последнее равенство можно упростить, если использовать тождество [14, с. 760]

$$\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \Gamma(z) \cdot \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right).$$

После элементарных преобразований получится равенство

$$c_{ij}^{(k)} = 2^k \cdot (j+1-k-2r) \frac{(j-r)!(r+k-1)!}{r!(j-r-k+1)!(k-1)!},$$

которое было установлено в [3], (лемма 1).

Наконец, заметим, что при $i = j - k + 1$ значения $c_{ij}^{(k)}$, получаемые по теореме 3, совпадут с результатом теоремы 2, если в ней A_j и A_{j-k} заменить на их значения из формулы (4).

Литература

1. Марков А.А. Об одном вопросе Д.И. Менделеева // Изв. Петербургской АН. – 1989. – Т. 62. – С. 1–24.
2. Марков В.А. О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. – СПб., 1892. – 117 с.
3. Конягин С.Б. О неравенстве В.А. Маркова для многочленов в пространстве L // Труды МИАН СССР. – 1980. – Т. 45. – С. 117–125.
4. Бари Н.К. Обобщение неравенств С.Н. Бернштейна и А.А. Маркова // Изв. АН СССР. Сер.: Матем. – 1954. – Т. 18, № 2. – С. 159–176.
5. Загиров Н.Ш., Пашаева З.Ш. Оценка значений многочленов внутри отрезка // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 67–74.
6. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценка наилучших полиномиальных приближений ограниченных функций со знакочувствительным весом // Вестник ДГУ. – 2015. – Вып. 6. – С. 105–111.
7. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г., Мустафа Б.Г. Оценка скорости полиномиальных аппроксимаций функций в вариационных метриках через различные структурные характеристики // Вестник ДГУ. – 2013. – Вып. 1. – С. 68–79.
8. Абдурагимов Э.И., Гаджиева Т.Ю. Численный метод нахождения радиально-симметричного положительного решения задачи Дирихле для одного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка // Вестник ДГУ. – 2014. – Вып. 6. – С. 47–52.
9. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценка скорости сходимости сплайнов по рациональным интерполянтам через индуцированные функции // Вестник ДГУ. – 2016. – Вып. 2. – С. 35–40.
10. Загиров Н.Ш., Ахмадова М.А., Шамхалова Т.Н. Постоянная Маркова для весовых пространств // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 75–80.
11. Zagirov N.Sh. Polynomials with extremal coefficients and snakes // East J. on Approximations. – 1995. – V. 1, № 2. – P. 231–248.
12. Сега Г. Ортогональные многочлены: пер. с англ. – М., 1962. – 500 с.
13. Загиров Н.Ш., Эфендиев Э.И. Вычисление одной суммы, актуальные проблемы математики и смежные вопросы // Материалы Межд. конф. – Махачкала, 2013. – С. 27–29.
14. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. – М.: Наука, 1970. – 810 с.

Поступила в редакцию 10 сентября 2018 г.

UDC 517.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-3-54-61

Estimates of Markov constant in the Jacobi weight space

N.Sh. Zagirov, T.U. Gadzhieva

*Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a;
nizam_zagirov@mail.ru, tamila.usup@mail.ru*

The main purpose of the study is to obtain algorithms for numerical finding and estimates of the Markov constant in the weight space of a set of all material measurable functions which squares with the set weight are summarized on some piece. The research has established General results for any weight. The problem for the classical weights of Jacobi, Laguerre and Hermite have been studied separately. The article presents the case when Jacobi's weight on a piece is taken.

Andrei Markov has found value of this constant in case of space of functions, continuous on a piece. These estimates have been found in various spaces by Sergei Konyagin and Nina Bari.

The expression for Markov's constant in case of a derivative of any order is established. An algorithm of numerical finding of estimates in weight space of Jacobi has also been developed.

Keywords: estimations of a Markov constant, orthonormal polynomial, weight function.

Received 10 September, 2018