МАТЕМАТИКА

УДК 517.941

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-2-7-13

А.И. Вагабов

Регулярность спектральной задачи с трехкратными характеристиками порядков 5

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала,
ул. М. Гаджиева, 43а; algebra-dgu@mail.ru

Вопросы базисности функций по собственным функциям линейных дифференциальных операторов восходят к работам Фурье, Пуассона, Коши, Лиувилля, Гильберта, Кнезера и др. В наиболее общей постановке их решение для обыкновенных дифференциальных операторов и пучков операторов было дано в фундаментальных работах Г. Биркгофа и Я.Д. Тамаркина. Ими же было определено понятие регулярности граничных условий дифференциальных пучков, которое строго предполагало различность характеристических корней рассматриваемых пучков. Ему придерживались многочисленные последователи в спектральной теории пучков. В статье рассматривается теория дифференциального пучка пятнадцатого порядка, не относящегося к случаю регулярных в классическом смысле спектральных задач с параметром. Частные случаи таких задач порядка 2, 3, 4 с кратными корнями их характеристических уравнений описаны ранее в ряде работ. В данной статье в случае особого дифференциального пучка пятнадцатого порядка с тремя трехкратными характеристиками установлена базисность ее собственных элементов.

Хорошо известны трудности, связанные с изучением задач с кратными характеристическими корнями (даже в случае обыкновенных матричных операторов). В этом отношении понятна важность рассмотрения частных типов таких дифференциальных пучков, которые могут указать путь к общей теории пучков с кратными характеристиками. Мы используем модифицированные методы, связанные с построением и исследованием функции Грина соответствующей задачи. Предлагаемая статья служит выработке теории спектральных задач с кратными характеристиками в случае обыкновенных дифференциальных пучков операторов.

Ключевые слова: *функция Коши, функция Грина, асимптотика, параметр, корневые функции.*

1. Постановка задачи и предварительные построения

Изучение рядов по собственным элементам регулярных дифференциальных операторов с кратными корнями их характеристических уравнений – малоизученный раздел обобщенной теории рядов Фурье. В частной ситуации двукратных корней задача решена в работах [1–6]. Случай регулярных (в классическом смысле) спектральных задач отражен в многочисленных статьях [7–10].

Мы рассматриваем дифференциальный пучок:

$$l(y) \equiv \left(\frac{d}{dx} - \lambda \right)^5 \left(\frac{d}{dx} - \varepsilon \lambda \right)^5 \left(\frac{d}{dx} - \varepsilon^2 \lambda \right)^5 y(x), \quad (1)$$

$$0 < x < 1, \quad \varepsilon = e^{i \frac{2}{3} \pi}$$

с краевыми условиями

$$U_s(y) \equiv \frac{d^{s-1}y(0)}{dx^{s-1}} = 0, \quad s = \overline{1,14}, \quad U_{15}(y) \equiv y(1) = 0. \quad (2)$$

Введем в рассмотрение фундаментальную систему решений уравнения $l(y) = 0$:

$$y_j(x) = x^{j-1}e^{\lambda x}, y_{5+j}(x) = x^{j-1}e^{\varepsilon \lambda x}, y_{10+j}(x) = x^{j-1}e^{\varepsilon^2 \lambda x}, \quad j = \overline{1,5}. \quad (3)$$

Обозначим через $Y(\xi, \lambda)$ матрицу Вронского решений (3). Как следует из теоремы Лиувилля, ее определитель не зависит от ξ . Для удобства введем обозначение $\det Y(\xi, \lambda) = |Y(\lambda)|$. Согласно формуле Лиувилля этот детерминант не зависит от ξ . Далее используем функцию Коши уравнения $l(y) = 0$:

$$g(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) & \dots & y_{15}(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) & \dots & y_{15}'(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(13)}(\xi) & y_2^{(13)}(\xi) & \dots & y_{15}^{(13)}(\xi) \end{vmatrix} \frac{-1}{|Y(\lambda)|} & \text{при } x \leq \xi \\ 0 & \text{при } x \geq \xi. \end{cases} \quad (4)$$

Отметим два важных для нас свойства указанной функции. Она:

- 1) тринадцать раз непрерывно дифференцируема по x, ξ на $[0,1]^2$;
- 2) пятнадцать раз непрерывно дифференцируема по x, ξ при $x \neq \xi$ и обладает свойствами

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^s g(x, \xi, \lambda)}{dx^s} \right|_{x=\xi+0} &= \begin{cases} 0 & \text{при } s < 14, \\ 1 & \text{при } s = 14, \end{cases} \\ \left. \frac{d^s g(x, \xi, \lambda)}{d\xi^s} \right|_{\xi=x+0} &= \begin{cases} 0 & \text{при } s < 14, \\ 1 & \text{при } s = 14. \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

В самом деле, непосредственно дифференцируя по x определитель в (4) четырнадцать раз, получим первую из формул (5). По известному правилу то же самое дифференцирование по ξ четырнадцать раз приводит ко второй из формул (5).

Лемма 1. Для любой 15 раз непрерывно дифференцируемой функции $f(x)$, $0 < x < 1$, равной нулю со всеми производными до четырнадцатого порядка включительно, при $x = 0,1$, справедливы формулы:

$$\int_x^1 g(x, \xi, \lambda) f^{(k)}(\xi) d\xi = \int_x^1 f(\xi) \frac{d^k g(x, \xi, \lambda)}{d\xi^k} d\xi, \quad k < 14; \quad (6)$$

$$\int_x^1 g(x, \xi, \lambda) f^{(14)}(\xi) d\xi = f(x) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad |\lambda| \gg 1, \quad 0 < x < 1. \quad (7)$$

Доказательство. В силу условий леммы и формул (5) интегрированием по частям приходим к формуле (6). При доказательстве формулы (7) интегрированием по частям 14 раз приходим к равенству

$$\int_x^1 g(x, \xi, \lambda) f^{(14)}(\xi) d\xi = f(x) + \int_x^1 f(\xi) \frac{d^{14} g(x, \xi, \lambda)}{d\xi^{14}} d\xi. \quad (8)$$

Установим оценку интеграла в правой части формулы (8). С этой целью преобразуем определитель в формуле (4), полученный из $\det Y(\xi, \lambda)$, заменой последней строки строкой $y_1(x), y_2(x), \dots, y_{15}(x)$. Вынося в этом определителе из первых пяти столбцов $e^{\lambda\xi}$, из вторых пяти столбцов $e^{\varepsilon\lambda\xi}$, из последних пяти столбцов $e^{\varepsilon^2\lambda\xi}$, придем к определителю, последняя строка которого имеет вид: $e^{\lambda(x-\xi)}, \dots, x^4 e^{\lambda(x-\xi)}$; $e^{\varepsilon\lambda(x-\xi)}, \dots, x^4 e^{\varepsilon\lambda(x-\xi)}$; $e^{\varepsilon^2\lambda(x-\xi)}, \dots, x^4 e^{\varepsilon^2\lambda(x-\xi)}$, а предыдущие строки являются лишь многочленами от λ и ξ . Таким образом, имеем

$$\frac{d^{14} g(x, \xi, \lambda)}{dx^{14}} |Y(\xi, \lambda)| = p_1(\lambda) e^{\lambda(x-\xi)} + p_2(\lambda) e^{\varepsilon\lambda(x-\xi)} + p_3(\lambda) e^{\varepsilon^2\lambda(x-\xi)},$$

где $p_i(\lambda)$ – полиномы, отличные от нуля.

$$|Y(\xi, \lambda)| = p_1(\lambda) e^{\lambda} + p_2(\lambda) e^{\varepsilon\lambda} + p_3(\lambda) e^{\varepsilon^2\lambda}, \quad (4) \Rightarrow$$

$$\frac{d^{14} g(x, \xi, \lambda)}{dx^{14}} = \frac{p_1(\lambda) e^{\lambda(x-\xi)} + p_2(\lambda) e^{\varepsilon\lambda(x-\xi)} + p_3(\lambda) e^{\varepsilon^2\lambda(x-\xi)}}{p_1(\lambda) e^{\lambda} + p_2(\lambda) e^{\varepsilon\lambda} + p_3(\lambda) e^{\varepsilon^2\lambda}} \quad (9)$$

Для определителя $|Y(\xi, \lambda)|$, используя формулу Лиувилля, приходим к оценке

$$|Y(\xi, \lambda)| \approx |\lambda|^{105} \cdot C(\delta), \quad |\lambda| \gg 1, \quad (10)$$

$\delta < \xi \leq 1, \quad \forall \delta > 0$ – малое число, $C(\delta) > 0$. Согласно (9) имеем также, что

$$\left| \frac{d^{14} g(x, \xi, \lambda)}{dx^{14}} \right|_{\delta < x < 1} \leq \frac{1}{e^{|\lambda\delta|}}, \quad \text{откуда с учетом формулы (8) получим представление (7).}$$

Из установленной леммы следует

Теорема 1. Пусть C_l – последовательность замкнутых контуров в λ -плоскости, содержащая внутри точку $\lambda = 0$. Кратчайшее расстояние контуров от начала стремится к бесконечности с ростом l . Тогда для функции $f(x)$, указанной в лемме 1, имеем:

$$\lim_{\substack{l \rightarrow \infty \\ 0 < x \leq 1}} \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_l} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 g(x, \xi, \lambda) \frac{d^{14} f(\xi)}{d\xi^{14}} d\xi = f(x) \quad (11)$$

2. Характеристический определитель граничной задачи (1)–(2)

Матрицу $\{u_{ij}(x, \lambda)\}_{ij=1}^{15} \equiv \{U_i(y_j(x, \lambda))\}_{ij=1}^{15} \equiv U(\lambda)$ называют характеристической матрицей, а $\det U(\lambda) = \Delta(\lambda)$ – характеристическим определителем задачи (1)–(2). Корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ известны как спектр задачи (собственные значения). Элементарные подсчеты определителя $\Delta(\lambda)$, содержащего экспоненты λ только в последней строке, дают

$$\Delta(\lambda) \approx \lambda^{51} \left([A] e^{\varepsilon\lambda} + [B] e^{\varepsilon^2\lambda} + [C] e^{\lambda} \right), \quad |\lambda| \gg 1, \quad (12)$$

где A, B, C – отличные от нуля константы.

Лемма 2. Нули определителя $\Delta(\lambda)$, то есть собственные значения задачи (1)–(2), образуют три бесконечные последовательности, расположенные вдоль трех лучей $\arg \lambda = \{\pi, \varepsilon^2, \varepsilon\}$, исходящих из начала и имеют асимптотические представления:

$$\begin{aligned} 1) \lambda_k &\approx -\frac{i}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{A}{B} \right| + \frac{\arg \left(-\frac{A}{B} \right) + 2k\pi}{\sqrt{3}}, \quad k = -1, -2, -3, \dots \\ 2) \lambda_k &\approx -\frac{i\varepsilon^2}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{B}{C} \right| + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{3}} \left(\arg \left(-\frac{B}{C} \right) + 2k\pi \right), \quad k = -1, -2, \dots \\ 3) \lambda_k &\approx -\frac{i\varepsilon}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{C}{A} \right| + \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}} \left(\arg \left(-\frac{C}{A} \right) + 2k\pi \right), \quad k = -1, -2, -3, \dots \end{aligned}$$

Доказательство.

1) На отрицательной части вещественной полуоси $\varepsilon^\lambda \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow -\infty$ и при этом $Ae^{\varepsilon\lambda} + Be^{\varepsilon^2\lambda} + Ce^\lambda \approx$

$$\approx e^{\varepsilon\lambda} \left(A + Be^{(\varepsilon^2 - \varepsilon)\lambda} \right) \approx e^{\varepsilon\lambda} \left(A + Be^{i\sqrt{3}\lambda} \right), \Rightarrow$$

$$e^{i\sqrt{3}\lambda} \approx -\frac{A}{B}, \Rightarrow e^{i\sqrt{3}\lambda} \approx -\frac{A}{B}, \text{ т. е. } \lambda_k \approx -\frac{i}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{A}{B} \right| + \frac{\arg \left(-\frac{A}{B} \right) + 2k\pi}{\sqrt{3}},$$

$k = -1, -2, -3, \dots$, так как $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow -\infty$.

2) Установим вторую серию нулей $\Delta(\lambda)$, сведя ее к первому случаю заменой $\lambda = \varepsilon^2 \mu$, $(\varepsilon\lambda = \mu, \varepsilon^2\lambda = \varepsilon\mu)$. Имеем

$$Ae^{\varepsilon\lambda} + Be^{\varepsilon^2\lambda} + Ce^\lambda = Be^{\varepsilon\mu} + Ce^{\varepsilon^2\mu} + Ae^\mu = 0.$$

Согласно случаю 1) получим

$$\mu_k \approx -\frac{i}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{B}{C} \right| + \frac{\arg \left(-\frac{B}{C} \right) + 2k\pi}{\sqrt{3}}, \quad k = -1, -2, -3, \dots$$

Следовательно, приходим к асимптотике

$$\lambda_k \approx -\frac{i\varepsilon^2}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{B}{C} \right| + \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{3}} \left(\arg \left(-\frac{B}{C} \right) \right) + 2k\pi,$$

указанной в формуле (12).

3) Заменой $\lambda = \varepsilon\mu$ придем к равенству

$$Ae^{\varepsilon\lambda} + Be^{\varepsilon^2\lambda} + Ce^\lambda = Ce^{\varepsilon\mu} + Ae^{\varepsilon^2\mu} + Be^\mu = 0.$$

Аналогично случаю 2) придем к асимптотическому представлению

$$\lambda_k \approx -\frac{i\varepsilon}{\sqrt{3}} + \frac{\varepsilon \left(\arg \left(-\frac{C}{A} \right) + 2k\pi \right)}{\sqrt{3}}, \quad k = -1, -2, -3, \dots$$

3. Функция Грина и основная теорема

Дальнейшее изложение свяжем с известным выражением мероморфной по λ функцией Грина задачи (1)–(2), которая тесно связана с рассмотренной функцией Коши и характеристической матрицей задачи (1)–(2):

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{\Delta(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{\begin{vmatrix} g(x, \xi, \lambda) & y_1(x) & \dots & y_{15}(x) \\ U_1(g)_x & & & \\ \dots & & U(\lambda) & \\ U_{15}(g)_x & & & \end{vmatrix}}{\Delta(\lambda)}, \quad (13)$$

где $g(x, \xi, \lambda)$, $\Delta(\lambda)$ указаны в формулах (4), (12), а $U(\lambda)$ – матрица определителя $\Delta(\lambda)$. Разложим числитель функции Грина на два слагаемых:

$$G(x, \xi, \lambda) = g(x, \xi, \lambda) + \frac{E(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad (14)$$

где E получено из определителя $\Delta(\lambda)$ заменой на нуль элемента в его левом верхнем углу, т. е.

$$E(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & y_1(x) & \dots & y_{15}(x) \\ U_1(g)_x & & & \\ \dots & \dots & U(\lambda) & \\ U_{15}(g)_x & & & \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Опираясь на выражения краевых условий (2) и фундаментальные решения (3), найдем оценки: $U_k(g)_x = g(0, \xi, \lambda) \approx \frac{1}{\lambda^{15-k}}$, $k = \overline{1, 14}$;

$$U_k(g)_x = g(1, \xi, \lambda) = 0 \text{ при } k = 15. \quad (16)$$

С другой стороны, разлагая $E(x, \xi, \lambda)$ по первой строке, придем к пятнадцати определителям, в каждом из которых один столбец заменен столбцом $(U_1(g)_x, \dots, U_{15}(g)_x)^T$. При этом в оценке $E(x, \xi, \lambda)$ порядок степени по λ понижается на 14. Принимая во внимание выражение (12), получим оценку:

$$\frac{E(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} \approx \frac{1}{\lambda^{14}}. \quad (17)$$

Согласно теореме 1 и формулам (14), (17) устанавливается основная

Теорема 2. Для любой пятнадцатикратно непрерывно дифференцируемой на $[0, 1]$ функции $f(x)$, равной нулю на концах 0, 1, справедлива формула разложения по корневым функциям задачи (1)–(2):

$$\lim_{\substack{l \rightarrow \infty \\ 0 < x \leq 1}} \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_l} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \frac{d^{14} f(\xi)}{d\xi^{14}} d\xi = f(x), \quad (18)$$

где C_l – последовательность замкнутых, расширяющихся контуров в λ -плоскости, указанная в теореме 1 и также проходящая вне δ -окружности нулей определителя $\Delta(\lambda)$.

Доказательство. Согласно (17) левую часть равенства (18) запишем в виде:

$$\lim_{\substack{l \rightarrow \infty \\ 0 < x \leq 1}} \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_l} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 g(x, \xi, \lambda) \frac{d^{14} f(\xi)}{d\xi^{14}} d\xi +$$

$$\lim_{\substack{l \rightarrow \infty \\ 0 < x \leq 1}} \frac{-1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_l} \frac{d\lambda}{\lambda} \int_0^1 \frac{d^{14} f(\xi)}{d\xi^{14}} d\xi$$

Первый предел равен $f(x)$ на основании теоремы 1. Равенство нулю второго предела очевидно.

Литература

1. Печенцов А.С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений, содержащих параметр с кратными корнями характеристического уравнения // Дифференциальные уравнения. – 1984. – Т. 20, № 2. – С. 263–273.
2. Саакян Н.С. Краевые задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка в случае кратных корней характеристического уравнения: дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Баку, 1985. – 135 с.
3. Jackson D. Expansion problem with irregular boundary conditions // Proc. Amer. – 1916, 51. – Р. 381–417.
4. Оразов М.Б. Об одной краевой несамосопряженной задаче // Изв. АН ТуркмССР. Серия физ.-техн., хим. и геол. наук. – 1976. – № 2. – С. 10–13.
5. Редже Т. Аналитические свойства матрицы рассеяния // Математика. – 1963. – Т. 7, № 4. – С. 83–89.
6. Абуд А.Х. Спектральная задача с трехкратными корнями основного характеристического уравнения дифференциального пучка третьего порядка // Успехи современной науки. – 2016. – Т. 1, № 2. – С. 145–147.
7. Вагабов А.И. Об условиях кратной разложимости функций по корневым элементам обыкновенных дифференциальных операторов // Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т. 48, № 8. – С. 1067–1079.
8. Вагабов А.И., Абуд А.Х. Метод разделения переменных в решении многомерных смешанных задач с разделяющимися переменными // Доклады РАН. – 2014. – Т. 456, № 1. – С. 7–10.
9. Ильин В.А. Спектральная теория самосопряженных // Избранные труды. – 2008. – Т. 1. – М.: Изд-во МАКС ПРЕСС. – С. 487–694.
10. Келдыш М.В. О полноте собственных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // УМН. – 1971. – Т. 26, № 4. – С. 15–41.
11. Капустин Н.О. О равномерной сходимости ряда Фурье для спектральной задачи с квадратом спектрального параметра в граничном условии // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 10. – С. 1504–1507.

Поступила в редакцию 23 марта 2018 г.

UDC 517.941

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-2-7-13

Regular spectral problem with three characteristics ordnung 5

A.I. Vagabov

*Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, Gadzhieva st., 43a;
algebra-dgu@mail.ru*

Issues being a basis of functions in eigenfunctions of linear differential operators date back to the work of Fourier, Poisson, Cauchy, Liouville, Gilbert, Kneser etc. Generally, their solution of ordinary differential operators and operators of the beams was given in the fundamental works by G. Birkhoff and J.D. Tamarkin's. They also defined the notion of regularity of boundary conditions of the differential beams that strictly assumed the different characteristic roots of the considered beams and which adhere to numerous followers in the spectral theory of bundles.

The article considers the theory of differential beam fifteenth order non-regular in the classical sense, spectral problems with the parameter. Special cases of such problems of the order of 2, 3, 4, with multiple roots of their characteristic equations were described earlier in several papers. The article studies the case of differential beam fifteenth order with three triple features, confirms the basicity of its own elements. Difficulties are known associated with the study of problems with multiple characteristic roots (even in the case of ordinary matrix operators). In this respect the importance of considering private types of differential bundles is great as it can show the way to the General theory of beams with multiple characteristics. We use modified methods associated with the construction and adherence of Green's function of the corresponding problem. The proposed work is one of the chains in the development of the theory of spectral problems with multiple characteristics in case of ordinary differential operators beams.

Keywords: Cauchy function, Green function, asymptotic, parameter, multiple roots.

Received 23 March, 2018