УДК 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-2-17-21

М.С. Алиев

О наилучшем приближении в пространстве $S_{[a,b]}$

Дагестанский государственный университет, Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; Aliev 9604207198@gmail.com

В пространстве суммируемых на сегменте функций норма определяется как максимум от значения интеграла по всевозможным сегментам, входящим в первоначальный сегмент. В этом пространстве И.В. Ценовым получены необходимые и достаточные условия наилучшего приближения функции алгебраическими полиномами. В данной работе этот результат переносится на полиномы по системам Чебышева. Далее рассматривается приближение линейно независимыми системами, не образующими систему Чебышева, при этом условия наложены на первообразные.

Ключевые слова: аппроксимация, система Чебышева, интеграл.

В линейном нормированном пространстве суммируемых на $[a, b]$ функций $S_{[a,b]}$, рассмотренном И.В. Ценовым [1, с. 89], норма функции вводится следующим образом:

$$\|f\|_{S_{[a,b]}} \equiv \max_{[\alpha, \beta]} \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \right|,$$

где $[\alpha, \beta]$ – любой сегмент, содержащийся в $[a, b]$. Доказана теорема.

Если $f(x) \in S_{[a,b]}$ и $F(x) = \int_a^x f(t) dt$, то

$$(1) \quad \|f\|_{S_{[a,b]}} = 2 \min_y \|F(x) - y\|_{C_{[a,b]}} = 2 \left\| F(x) - \frac{M+m}{2} \right\| = M - m,$$

где минимум рассматривается на множестве всех вещественных чисел и $M = \max_{[a,b]} F(x)$, $m = \min_{[a,b]} F(x)$.

Найдены необходимые и достаточные условия, чтобы алгебраический полином $\sum_{i=0}^n c_i x^i$ наименее уклонялся от функции $f(x)$ в метрике пространства $S_{[a,b]}$. Пусть теперь $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ – суммируемые на $[a, b]$ функции, образующие систему Чебышева (T_n -систему), то есть для любых $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b$ определитель

$$\nabla_n = \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$$

Лемма. Если функции $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ образуют T_n – систему на $[a, b]$, то $\Phi_0(x) \equiv 1$, $\Phi_1(x) = \int_a^x \varphi_1(t) dt$, ..., $\Phi_n(x) = \int_a^x \varphi_n(t) dt$ образуют T_{n+1} -систему на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$

$$\nabla_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & \Phi_1(x_1) & \dots & \Phi_n(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \Phi_1(x_{n+1}) & \dots & \Phi_n(x_{n+1}) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1, & \int_a^{x_1} \varphi_1(t) dt, \dots, & \int_a^{x_1} \varphi_n(t) dt \\ \dots & \dots & \dots \\ 1, & \int_a^{x_{n+1}} \varphi_1(t) dt, \dots, & \int_a^{x_{n+1}} \varphi_n(t) dt \end{vmatrix}.$$

Начиная со второй строки все интегралы преобразуем:

$$\int_a^{x_k} \varphi_i(t) dt = \int_a^{x_1} \varphi_i(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} \varphi_i(t) dt + \dots + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_i(t) dt.$$

Представив ∇_{n+1} в виде суммы определителей и приравняв к нулю определители с одинаковыми строками, получим

$$\begin{vmatrix} \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(t) dt, & \dots, & \int_{x_1}^{x_2} \varphi_n(t) dt \\ \dots & \dots & \dots \\ \int_{x_n}^{x_{n+1}} \varphi_1(t) dt, & \dots, & \int_{x_n}^{x_{n+1}} \varphi_n(t) dt \end{vmatrix} = \int_{x_1}^{x_2} dt_1 \int_{x_2}^{x_3} dt_2 \dots \int_{x_n}^{x_{n+1}} \begin{vmatrix} \varphi_1(t_1), & \dots, & \varphi_n(t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(t_n), & \dots, & \varphi_n(t_n) \end{vmatrix} dt_n.$$

Так как подынтегральный определитель сохраняет знак и все $t_i < t_{i+1}$, определитель $\nabla_{n+1} \neq 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 1. Для того, чтобы полином $Q_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$ наименее уклонялся от функции $f(x)$ в метрике $S[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы существовали, по крайней мере, $n+1$ сегментов $[\alpha_1, \beta_1], [\alpha_2, \beta_2], \dots, [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$, содержащихся в $[a, b]$ и таких, что:

- а) конец β_i совпадает с α_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, n$),
- б) $\left| \int_{\alpha_i}^{\beta_i} [f(t) - Q_n(t)] dt \right| = \|f - Q_n\|_S$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$),
- с) знаки интегралов $\int_{\alpha_i}^{\beta_i} [f(t) - Q_n(t)] dt$ последовательно чередуются.

Необходимость. Пусть $Q_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(x)$ – полином, наименее уклоняющийся от функции $f(x)$ в метрике пространства $S_{[a,b]}$.

Тогда при некотором γ_0 из формулы (1) получим, что

$$\|f - Q_n\|_S = 2 \|F - \sum_{i=1}^n c_i \Phi_i - \gamma_0\|_{C_{[a,b]}} = 2 \max_{x \in [a,b]} |F(x) - G_{n+1}(x)|, \quad \text{где}$$

$G_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^n c_i \Phi_i(x) + \gamma_0$ – полином, наименее уклоняющийся от $F(x)$ в метрике $C_{[a,b]}$. Пусть $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1}$ – чебышевский альтернанс, соответствующий полиному $G_{n+1}(x)$, и

$$F(x_i) - G_{n+1}(x_i) = \varepsilon(-1)^i L, \quad \varepsilon = \pm 1, i = 0, 1, 2, \dots, n+1,$$

$$L = \|F - G_{n+1}\|_{C_{[a,b]}}.$$

Наибольшие и наименьшие значения функции $\int_a^x [f(t) - \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i(t)] dt$ равны $+L + \gamma_0$, $-L + \gamma_0$, и они достигаются в точках $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$.

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(t) - Q_n(t)] dt &= \int_a^{x_i} [f(t) - Q_n(t)] dt - \int_a^{x_{i-1}} [f(t) - Q_n(t)] dt = \varepsilon(-1)^i L - \\ &- \varepsilon(-1)^{i-1} L = 2\varepsilon(-1)^i L, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \end{aligned}$$

Для любого другого сегмента $[t_1, t_2] \neq [x_{i-1}, x_i]$

$$\int_{t_1}^{t_2} [f(t) - Q_n(t)] dt \leq 2L.$$

Для завершения доказательства положим $[\alpha_i, \beta_i] = [x_{i-1}, x_i]; i = 1, 2, \dots, n+1$.

Достаточность. Пусть выполняются условия теоремы для полинома $Q_n(x)$, но наилучшим будет полином $P_n(x)$, то есть

$$\left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(t) - P_n(t)] dt \right| < \|f - Q_n\|_{S_{[a,b]}} = 2L, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Для полинома $R_n(x) = P_n(x) - Q_n(x)$ имеем

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} R_n(t) dt = \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(t) - Q_n(t)] dt - \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(t) - P_n(t)] dt$$

$$\text{Sign} \int_{x_{i-1}}^{x_i} R_n(t) dt = \text{sign} \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(t) - Q_n(t)] dt = \varepsilon(-1)^i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Тогда полином $R_n(x)$ имеет не менее n нулей, что невозможно для полинома по T_n -системе.

Далее рассмотрим систему линейно независимых, суммируемых на $[a, b]$ функций $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$, не образующих T_n -систему. Аналогии доказанной выше лемме, устанавливающей связь этой системы с системой функций $1, \Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$, нет. Например, при классификации систем линейно независимых функций по количеству точек альтернанса [3] наихудшей является система:

$$\varphi_1(x) = 1 - 2x, \quad \varphi_2(x) = 1 - 3x^2 \quad \text{на } [0, 1].$$

Единственным полиномом наилучшего приближения функции $f(x) \equiv 1$ на $[0, 1]$ будет $\sum_{k=1}^2 c_k(1 - (k+1)x^k) \equiv 0$ с одноточечным альтернансом. А система функций $1, \Phi_1(x), \Phi_2(x)$ будет T_3 -системой на $[0, 1]$. Действительно,

$$\nabla \begin{pmatrix} 1, \Phi_1, & \Phi_2 \\ x_1, x_2, & x_3 \end{pmatrix} = \nabla \begin{pmatrix} 1, x - x^2, & x - x^3 \\ x_1, x_2, & x_3 \end{pmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_1 x_2 +$$

$$+ x_3 x_1 + x_2 x_3 - x_1 - x_2 - x_3 + 1).$$

Ни для одного набора трех различных точек $[0, 1]$ определитель не равен нулю. Из равенства $\nabla = 0$ имеем:

$$\text{а) при } 0 \leq x_1 < x_2 \leq \frac{1}{2} \text{ получим } x_3 = 1 + \frac{x_1 + x_2}{1 - x_1 - x_2} > 1,$$

$$\text{б) при } \frac{1}{2} \leq x_1 < x_2 < 1 \text{ получим } x_3 = \frac{(x_2 - 1)(1 - x_1)}{x_1 + x_2 - 1} < 0.$$

В силу симметрии определителя относительно x_1, x_2, x_3 при $x_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$x_2 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, предположение, что $x_3 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ противоречит а),

$x_3 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ противоречит б).

Определение. Систему функций $1, \Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$ назовем системой типа k ($0 \leq k \leq n$) на $[a, b]$, если:

1) Для любых точек $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$, таких, что в

$$\text{ле } \begin{vmatrix} 1, & \Phi_1, & \dots, & \Phi_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1, & x_2, & \dots, & x_{n+1} \end{vmatrix} = 0 \text{ существуют } i+1 \text{ строк } (k \leq i \leq n), \text{ по которым все миноры}$$

$i+1$ го порядка равны нулю;

2) хотя бы в одном таком миноре $i+1$ -го порядка алгебраические миноры d_j ($j = 1, 2, \dots, i+1$) элементов хоть одного столбца отличны от нуля, и в последовательности $d_1, d_2, \dots, d_{i+1}$ будет не менее k перемен знака.

Теорема 2. Если система функций $1, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ типа k на $[a, b]$ и полином $Q_n(x) = \sum_{i=1}^n c_i \Phi_i(x)$ наименее уклоняется от $f(x)$ в метрике пространства $S_{[a,b]}$, то существуют r ($r \geq k$) сегментов $[\alpha_i, \beta_i]$, содержащихся в $[a, b]$ и таких, что:

- 1) β_i совпадает с α_{i+1} ;
- 2) $\left| \int_{\alpha_i}^{\beta_i} [f(t) - Q_n(t)] dt \right| = \|f - Q_n\|_{S_{[a,b]}}$;
- 3) знаки $\int_{\alpha_i}^{\beta_i} [f(t) - Q_n(t)] dt$ чередуются.

Доказательство. По критерию Зуховицкого [2] для полинома $G_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^n c_i \Phi_i(x) + \gamma_0$, наименее уклоняющегося от $F(x)$, в метрике пространства

$C_{[a,b]}$ существуют точки $a \leq x_1 < x_2, \dots, x_{i+1} \leq b$, в которых $F(x_j) - G_{n+1}(x_j) = \varepsilon L d_j$, $L = \|F - G_{n+1}\|$, $j = 1, 2, \dots, i + 1$.

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} [f(t) - Q_n(t)] dt = \int_a^{x_{j+1}} [f(t) - Q_n(t)] dt - \int_a^{x_j} [f(t) - Q_n(t)] dt = \varepsilon L d_{j+1} - \varepsilon L d_j = 2\varepsilon L d_{j+1}, \text{ при } d_j d_{j+1} < 0 \text{ и равно нулю при } d_j d_{j+1} > 0.$$

Если в последовательности $d_1, d_2, \dots, d_{i+1}$ будет r перемен, то столько же интегралов будут отличны от нуля. Для пояснения выбора $[\alpha_j, \beta_j]$ предположим

$$d_1 d_2 < 0, d_2 d_3 > 0, d_3 d_4 > 0, d_4 d_5 < 0, d_5 d_6 < 0, d_6 d_7 > 0, d_7 d_8 < 0, \dots$$

Тогда одним из вариантов будет $[\alpha_1, \beta_1] = [x_1, x_2], [\alpha_2, \beta_2] = [x_2, x_5], [\alpha_3, \beta_3] = [x_5, x_6], [\alpha_4, \beta_4] = [x_6, x_8], \dots$

Если наилучшее приближение достигается в $n + 1$ точках и в последовательности $d_1, d_2, \dots, d_{n+1}$ будет n перемен знака, то есть тип системы функций $k = n$, где $[\alpha_j, \beta_j] = [x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Литература

1. Ценов И.В. О наилучшем интегральном приближении // Сборник «Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций». – Баку, 1965.
2. Зуховицкий С.И. О приближении действительных функций в смысле П.Л. Чебышева // УМН. – 1956. – Т. 11, вып. 2.
3. Алиев М.С. О наилучшем приближении функций в метрике $C_{[a,b]}$ обобщенными полиномами // ДАН СССР. – 1968. – Т. 179, № 2.
4. Алиев М.С. К вопросу реализации нормы одного функционала // Вестник ДГУ. – 2013. – Вып. 1.
5. Алиев М.С. Свойства полиномов по одной системе функций // Вестник ДГУ. – 2016. – Вып. 2.
6. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценка наилучших приближений ограниченных функций со знакочувствительным весом // Вестник ДГУ. – 2015. – Вып. 6.
7. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценка скорости сходимости Сплайнов по рациональным интерполянтам через индуцированные функции // Вестник ДГУ. – 2016. – Вып. 2.
8. Суетин С.П. Распределение нулей полиномов Паде и аналитическое продолжение // УМН. – 2015. – Т. 70, вып. 5. – С. 121–134.
9. Алиев М.С., Бру Мантч Г.Й. Об определителях Вандермонда с двумя вычеркнутыми степенями // Вестник ДГУ. – 2017. – Вып. 3.
10. Сиражудинов М.М., Алиев Ш.Г., Джамалдинова С.П. О гильбертовости решений системы уравнений Бельтрами // Вестник ДГУ. – 2016. – Вып. 4.
11. Загиров Н.Ш., Дибирова З.А. Последовательности конечного порядка и их суммирование // Вестник ДГУ. – 2017. – Вып. 1.
12. Малиева Ф.Ф. Об устойчивости разностной схемы уравнений теплопроводности с дробной производной Caputo // Вестник ДГУ. – 2017. – Вып. 2.

Поступила в редакцию 15 февраля 2018 г.

UDK 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-2-17-21

On the best approximation in the space $S_{[a,b]}$

M.S. Aliev

*Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a;
Aliev9604207198@gmail.com*

In the space of functions summable on the segment, the norm is defined as the maximum of the integral over all possible segments entering the initial segment. In this space I. V. Price obtained necessary and sufficient conditions for best approximation of functions by algebraic polynomials. In this note, this result is transferred to the polynomials in the Chebyshev system. Next, the article considers the approach of the linearly independent system, not forming a Chebyshev system, the primitive conditions were imposed.

Keywords: *approximation, system Chebisheb, integral.*

Received 15 February, 2018