УДК 517.968

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-1-78-84

Т.И. Ибавов

Решение начальной задачи для одной системы трёх дифференциальных уравнений с производной дробного порядка

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; ibavov94@mail.ru

В работе исследована задача Коши для системы трех дифференциальных уравнений с производными дробного порядка Caputo. С помощью преобразований Лапласа получены образы функций $x(p)$, $y(p)$, $z(p)$. Для нахождения решения задачи выражения для образов функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ разложены на простые дроби с помощью корней характеристического уравнения. Найдено решение Задачи Коши. Получены некоторые соотношения для функции Миттага–Леффлера, позволяющие упростить полученное решение.

Ключевые слова: *дробная производная, дифференциальное уравнение, преобразования Лапласа, функция Миттага–Леффлера.*

Введение

Учет нелокальных эффектов в рамках традиционных подходов приводит к появлению в дифференциальных уравнениях интегрального оператора, где ядра интегральных операторов несут информацию о природе нелокальности. Для решения подобных уравнений интегральные операторы представляются в виде ряда дифференциальных операторов с возрастающими показателями порядка дифференцирования и при наличии малого параметра ограничиваются несколькими членами ряда. В отсутствие малого параметра такой подход оказывается непродуктивным, и, кроме того, полученные уравнения также не всегда удастся решить.

Операция дробного дифференцирования, представляя определенную совокупность операций дифференцирования и интегрирования, открывает новый подход к теории нелокальных дифференциальных уравнений, вносит новый уровень понимания динамики соотношения необратимых и обратимых процессов, когда существенно учтены нелокальные свойства системы. Дробное исчисление вносит в теорию дополнительные параметры в виде показателей дробной производной, дает возможность использования широкого класса многопараметрических функций и открывает тем самым принципиально новые возможности интерпретации экспериментальных данных и создания адекватных количественных моделей процессов нелокального переноса [3].

Решению задач типа Коши для дифференциального уравнения дробного порядка посвящено множество различных работ. В монографии [3] приведены решения задачи Коши для осцилляторных уравнений с производным дробного порядка Римана–Лиувилля и Caputo. В работе [4] исследована начальная задача для фрактального осциллятора, а в работе [5] исследована задача Коши для системы двух линейных дифференциальных уравнений дробного порядка. Работа [6] посвящена исследованию решения задачи Коши для обобщенного уравнения Эйри. Исследованию нелинейных дина-

мических систем, описываемых дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка посвящены работы [7, 8, 9, 10].

В данной работе исследована начальная задача для одной системы трех дифференциальных уравнений дробного порядка.

Задача Коши для системы трех дифференциальных уравнений дробного порядка.

Рассмотрим в области D_α задачу Коши для системы трех дифференциальных уравнений с производными дробного порядка вида:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^a = -y - z, \\ \partial_{0t}^a = x + ay, \\ \partial_{0t}^a = kx + qz, \end{cases} \quad (1)$$

где $0 \leq \alpha < 1$, a, q, k — некоторые постоянные параметры,

$$\partial_{0t}^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{u'(s)}{(t-s)^\alpha} ds - \text{дробная производная Caputo.}$$

Постановка задачи. Найти решение $x(t), y(t), z(t) \in AC^2[0, T]$ системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$.

Пусть $D_\alpha \subset AC^2[0, T]$ — область определения ∂_{0t}^a . Тогда для любых функций $x(t) \in D_\alpha, y(t) \in D_\alpha, z(t) \in D_\alpha$ справедливы равенства [2]:

$$\begin{cases} D_{0t}^a = -y - z + \frac{x(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}, \\ D_{0t}^a = x + ay + \frac{y(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}, \\ D_{0t}^a = kx + qz + \frac{z(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha}. \end{cases} \quad (2)$$

Пусть $x(t) \in D_\alpha, y(t) \in D_\alpha, z(t) \in D_\alpha$ — решение системы (2). Тогда образы Лапласа системы (2) имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x(p) = \frac{x_0 p^{2\alpha} - p^\alpha (x_0 q + x_0 a + z_0 + y_0) + a q x_0 + z_0 a + q y_0}{p^{1-\alpha} [p^{3\alpha} - p^{2\alpha} (q + a) + p^\alpha (a q + k + 1) - (a k + q)]}, \\ y(p) = \frac{y_0 p^{2\alpha} - p^\alpha (x_0 q - x_0) - z_0 - q x_0 + k y_0}{p^{1-\alpha} [p^{3\alpha} - p^{2\alpha} (q + a) + p^\alpha (a q + k + 1) - (a k + q)]}, \\ z(p) = \frac{z_0 p^{2\alpha} - p^\alpha (z_0 a - k x_0) + z_0 - a k x_0 - k y_0}{p^{1-\alpha} [p^{3\alpha} - p^{2\alpha} (q + a) + p^\alpha (a q + k + 1) - (a k + q)]}. \end{cases} \quad (3)$$

Представим систему (3) в виде:

$$x(p) = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \left[\frac{x_0}{p^{1-2\alpha}} \left[\frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} + \frac{1}{1 - \lambda_3 p^{-\alpha}} \right] - \frac{x_0 q + x_0 a + z_0 + y_0}{p^{1-\alpha}} \left[\frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} + \frac{1}{1 - \lambda_3 p^{-\alpha}} \right] + \frac{x_0 a q + z_0 a + q y_0}{p} \left[\frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} + \frac{1}{1 - \lambda_3 p^{-\alpha}} \right] \right], \quad (4a)$$

$$y(p) = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \left[\frac{y_0}{p^{1-2\alpha}} \left[\frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} + \frac{1}{1 - \lambda_3 p^{-\alpha}} \right] - \frac{y_0 q - x_0}{p^{1-\alpha}} \left[\frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} + \frac{1}{1 - \lambda_3 p^{-\alpha}} \right] + \frac{k y_0 - x_0 q - z_0}{p} \left[\frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} + \frac{1}{1 - \lambda_3 p^{-\alpha}} \right] \right], \quad (4б)$$

$$z(p) = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \left[\frac{z_0}{p^{1-2\alpha}} \left[\frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} + \frac{1}{1 - \lambda_3 p^{-\alpha}} \right] - \frac{z_0 a - k x_0}{p^{1-\alpha}} \left[\frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} + \frac{1}{1 - \lambda_3 p^{-\alpha}} \right] + \frac{z_0 - a x_0 k - k y_0}{p} \left[\frac{1}{1 - \lambda_1 p^{-\alpha}} - \frac{1}{1 - \lambda_2 p^{-\alpha}} + \frac{1}{1 - \lambda_3 p^{-\alpha}} \right] \right], \quad (4в)$$

где, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корни характеристического уравнения.,

$$\lambda_1 = \sqrt[3]{-\beta + \sqrt{\beta^2 + \gamma^3}} + \sqrt[3]{-\beta - \sqrt{\beta^2 + \gamma^3}} - \frac{q + a}{3},$$

$$\lambda_2 = \varepsilon_1 \sqrt[3]{-\beta + \sqrt{\beta^2 + \gamma^3}} + \varepsilon_2 \sqrt[3]{-\beta - \sqrt{\beta^2 + \gamma^3}} - \frac{q + a}{3},$$

$$\lambda_3 = \varepsilon_2 \sqrt[3]{-\beta + \sqrt{\beta^2 + \gamma^3}} + \varepsilon_1 \sqrt[3]{-\beta - \sqrt{\beta^2 + \gamma^3}} - \frac{q + a}{3},$$

где $\beta = \frac{\frac{q+a}{3}[aq+k+1]-ka-q-\frac{2}{27}[q+a]^3}{2}$, $\gamma = \frac{aq+k+1-\frac{1}{3}[q+a]^2}{27}$,

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Приведём некоторые вспомогательные соотношения из [3]:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(t^{\alpha} z) dt = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1,$$

$$\frac{1}{p(1-\lambda \cdot p^{-\alpha})} = \int_0^{\infty} e^{-pt} E_{\alpha, 1}(\lambda t^{\alpha}) dt, \quad \operatorname{Re} p > 1,$$

$$\frac{1}{p^{1-\alpha}(1-\lambda \cdot p^{-\alpha})} = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{-\alpha} E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda t^{\alpha}) dt, \quad \operatorname{Re} p > 1.$$

из равенств (4a), (4б), (4c) с помощью соотношений (5) получим выражения для оригиналов функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \left(x_0 t^{-2\alpha} \left((\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1-2\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) - \right. \right. \\ \left. \left. - (\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1-2\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) + (\lambda_1 - \lambda_2) E_{\alpha, 1-2\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) \right) - (x_0 q + x_0 a + z_0 + y_0) \right. \\ \left. t^{-\alpha} \left((\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) - (\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) + (\lambda_1 - \lambda_2) E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) \right) \right) + \\ + (x_0 a q + z_0 a + q y_0) \left((\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^{\alpha}) - (\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^{\alpha}) + \right. \\ \left. + (\lambda_1 - \lambda_2) E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^{\alpha}) \right),$$

$$y(t) = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \left(y_0 t^{-2\alpha} \left((\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1-2\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) - \right. \right. \\ \left. \left. - (\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1-2\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) + (\lambda_1 - \lambda_2) E_{\alpha, 1-2\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) \right) - (y_0 q - x_0) \right. \\ \left. t^{-\alpha} \left((\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) - (\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) + (\lambda_1 - \lambda_2) E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) \right) \right) \\ + (k y_0 - z_0 - q x_0) \left((\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^{\alpha}) - (\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^{\alpha}) + \right. \\ \left. + (\lambda_1 - \lambda_2) E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^{\alpha}) \right),$$

$$z(t) = \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \left(z_0 t^{-2\alpha} \left((\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1-2\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) - \right. \right. \\ \left. \left. - (\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1-2\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) + (\lambda_1 - \lambda_2) E_{\alpha, 1-2\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) \right) - (z_0 a - k x_0) \right. \\ \left. t^{-\alpha} \left((\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) - (\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) + (\lambda_1 - \lambda_2) E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}) \right) \right) \\ + (z_0 - a k x_0 - k y_0) \left((\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^{\alpha}) - (\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^{\alpha}) + \right. \\ \left. + (\lambda_1 - \lambda_2) E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^{\alpha}) \right).$$

Лемма 1. Для $\alpha > 0$ имеет место равенство

$$t^{-\alpha} E_{\alpha, 1-\alpha}(t^{\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}} + E_{\alpha, 1}(t^{\alpha}). \quad (6)$$

Доказательство. Согласно определению функции Миттаг–Леффлера имеем

$$t^{-\alpha} E_{\alpha, 1-\alpha}(t^{\alpha}) = t^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1 - \alpha)}, \quad \alpha > 0. \quad (7)$$

В правой части равенства (7), заменяя n на $n' + 1$, получим

$$\begin{aligned} t^{-\alpha} \sum_{n'=-1}^{\infty} \frac{t^{\alpha n' + \alpha}}{\Gamma(\alpha n' + \alpha + 1 - \alpha)} &= \sum_{n'=-1}^{\infty} \frac{t^{\alpha n'}}{\Gamma(\alpha n' + 1)} = \\ &= \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha n'}}{\Gamma(\alpha n' + 1)} = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + E_{\alpha, 1}(t^{\alpha}). \end{aligned}$$

Лемма 2. Для $\alpha > 0$ имеет место равенство

$$t^{-2\alpha} E_{\alpha, 1-2\alpha}(t^{\alpha}) = \frac{1}{\Gamma(1 - 2\alpha)t^{2\alpha}} + \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)t^{\alpha}} + E_{\alpha, 1}(t^{\alpha}). \quad (8)$$

Доказательство. Согласно определению функции Миттаг–Леффлера имеем

$$t^{-2\alpha} E_{\alpha, 1-2\alpha}(t^{\alpha}) = t^{-2\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1 - 2\alpha)}, \quad \alpha > 0. \quad (9)$$

В правой части равенства (9), заменяя n на $n' + 2$, получим

$$\begin{aligned} t^{-2\alpha} \sum_{n'=-1}^{\infty} \frac{t^{\alpha n' + 2\alpha}}{\Gamma(\alpha n' + 2\alpha + 1 - 2\alpha)} &= \sum_{n'=-1}^{\infty} \frac{t^{\alpha n'}}{\Gamma(\alpha n' + 1)} = \\ &= \frac{t^{-2\alpha}}{\Gamma(1 - 2\alpha)} + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + \sum_{n'=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha n'}}{\Gamma(\alpha n' + 1)} = \frac{t^{-2\alpha}}{\Gamma(1 - 2\alpha)} + \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} + E_{\alpha, 1}(t^{\alpha}). \end{aligned}$$

Используя равенства (6) и (8), решение можно представить в виде:

$$\begin{aligned} x(t) = & \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \left((\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^{\alpha}) - (\lambda_1 - \lambda_3) E_{\alpha, 1}(\lambda_2 t^{\alpha}) + \right. \\ & \left. + (\lambda_1 - \lambda_2) E_{\alpha, 1}(\lambda_3 t^{\alpha}) \right) \cdot (x_0(1 - q - a + aq) + y_0(q - 1) + z_0(a - 1)), \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \left((\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^{\alpha}) - (\lambda_1 - \lambda_3) E_{\alpha, 1}(\lambda_2 t^{\alpha}) + \right. \\ & \left. + (\lambda_1 - \lambda_2) E_{\alpha, 1}(\lambda_3 t^{\alpha}) \right) \cdot (y_0(1 - q + k) - x_0(q - 1) - z_0), \end{aligned} \quad (10b)$$

$$\begin{aligned} z(t) = & \frac{1}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)} \left((\lambda_2 - \lambda_3) E_{\alpha, 1}(\lambda_1 t^{\alpha}) - (\lambda_1 - \lambda_3) E_{\alpha, 1}(\lambda_2 t^{\alpha}) + \right. \\ & \left. + (\lambda_1 - \lambda_2) E_{\alpha, 1}(\lambda_3 t^{\alpha}) \right) \cdot (z_0(2 - a) + x_0 k(1 - a) - k y_0). \end{aligned} \quad (10c)$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Функции $x(t) \in D_\alpha$, $y(t) \in D_\alpha$, $z(t) \in D_\alpha$ будут решениями системы (1), если они представимы в виде (9a), (9b), (9c).

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 498 с.
2. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
3. Мейланов Р.П., Бейбалаев В.Д., Шахбанова М.Р. Прикладные аспекты дробного исчисления // Palmarium Academic Publishing, Saarbrücken: 2012. – 135 с.
4. Бейбалаев В.Д. Решение начальной задачи для дифференциального уравнения «фрактального» осциллятора // Вестник Самарского гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2009. – Т. 1 (19).
5. Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д. Динамические системы, описываемые двумя дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка // Владикавказский математический журнал. – 2013. – Т. 15, № 1. – С. 30–40.
6. Паровик Р.И. Задача Коши для обобщенного уравнения Эйри // Доклады АМАН. – 2014. – Т. 16, № 3. – С. 64–69.
7. Бейбалаев В.Д., Мейланов Р.П., Назаралиев М.А., Шабанова М.Р. Особенности фазовой траектории «фрактального» брюсселятора // Сб. материалов седьмой Всероссийской конференции «Математическое моделирование и краевые задачи». – Самара 3–6 июня, 2010. – Самара, 2010.
8. Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д. Нелинейные колебания в средах с фрактальной структурой // Сб. трудов Международного Российско-Болгарского симпозиума, КБР, г. Нальчик, КЧР, а. Хабез 25–30 июня, 2010. – Нальчик, 2010.
9. Бейбалаев В.Д. Моделирование хаотического поведения динамических систем с фрактальной структурой // Сб. материалов восьмой Всероссийской конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи», СамГТУ Самара, 2011. – Самара, 2011. – С. 27–31.
10. Тренькин А.А., Карелин В.И., Алисултанов З.З., Бейбалаев В.Д., Рагимханов Г.Б. Динамика электронов в ветвящихся системах газоразрядных каналов со спадающей концентрацией газа // Нелинейный мир. – 2017. – Т. 15, № 3. – С. 24–31.

Поступила в редакцию 27 февраля 2018 г.

UDC 517.968

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-1-78-84

**The solution of Cauchy problem for system of three differential equations
with fractional derivative Caputo**

T.I. Ibavov

*Dagestan State University; Russia, Makhachkala, 367001, M. Gadzhiev st., 43 a;
ibavov94@mail.ru*

In the paper the Cauchy problem for system of three differential equations with fractional derivative Caputo is studied. The images of decision $x(p)$, $y(p)$, $z(p)$ are obtained using Laplace transforms. To find the solution of the problem $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, the image of solution was decomposed into simple fractions using the roots of characteristic equation. Some relations are obtained for the Mittag–Leffler function, which allow simplifying the obtained solution. The solution of Cauchy problem for system of three differential equation with fractional derivative Caputo is found.

Keywords: *fractional derivative, differential equation, Laplace transform, Mittag–Leffler function.*

Received 27 February, 2018