МАТЕМАТИКА

УДК 517.929.4+519.21

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-1-67-77

Р.И. Кадиев^{1, 2}, З.И. Шахбанова¹

Устойчивость решений линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздыванием второго порядка

¹ *Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; kadiiev_r@mail.ru;*

² *Дагестанский научный центр РАН; 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45*

Работа посвящена исследованию вопросов экспоненциальной моментной устойчивости решений для линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями второго порядка конкретного вида на основе теории положительно обратимых матриц. Для этого применяются идеи и методы, разработанные Н.В. Азбелевым и его учениками для исследования вопросов устойчивости детерминированных линейных функционально-дифференциальных уравнений, которые ранее были применены нами для исследований вопросов устойчивости для линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями первого порядка. Приводятся достаточные условия экспоненциальной моментной устойчивости линейных дифференциальных уравнений Ито второго порядка с запаздываниями в терминах положительной обратимости матриц, построенных по исходным уравнениям. Проверяется выполнимость этих условий для конкретных уравнений.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения Ито, устойчивость решений, положительная обратимость матриц.*

Введение

Вопросам устойчивости решений систем со случайными параметрами посвящено большое количество работ. Достаточно полный их список приведен в монографиях [1–4]. В основном в этих работах исследование стохастической устойчивости проводится традиционными методами, основанными на функционалах Ляпунова–Красовского–Разумихина. Однако применение этих методов во многих случаях встречает серьезные трудности. Поэтому эффективные признаки устойчивости обычно удается доказывать лишь для сравнительно узких классов стохастических дифференциальных уравнений. С другой стороны, в теории устойчивости детерминированных функционально-дифференциальных уравнений высокую эффективность показал W -метод, т. е. метод преобразования исходного уравнения с помощью вспомогательного уравнения, разработанный Н.В. Азбелевым и его учениками [5–8]. Целью такого преобразования является получение интегрального уравнения, для которого проще исследовать нужные свойства решений. На случай стохастических функционально-дифференциальных уравнений этот метод распространен в работах [9–15].

Для линейных дифференциальных уравнений Ито с последствием более высоких порядков вопросы устойчивости изучены недостаточно. Нам не известны работы

других авторов, в которых исследуются вопросы устойчивости для уравнений Ито с последствием более высоких порядков.

В настоящей работе исследуются вопросы экспоненциальной p -устойчивости ($2 \leq p < \infty$) решений для линейных дифференциальных уравнений Ито с запаздываниями второго порядка. При этом применяются методы исследования вопросов устойчивости для линейных дифференциальных уравнений Ито с последствием высоких порядков исследованием вопросов устойчивости для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последствием первого порядка, построенных по исходным уравнениям, принципы W -метода и теория положительно обратимых матриц. Отличие от классического W -метода состоит в том, что каждое уравнение системы преобразуется независимо от остальных, а каждая компонента решения оценивается отдельно. Такой подход в сочетании со специальным видом исходных уравнений, специальным способом построения по исходным уравнениям систем линейных уравнений Ито с последствием первого порядка позволяет получить эффективные признаки устойчивости исходных уравнений в терминах параметров этих уравнений. В статье использованы идеи работы [16], примененные при исследовании экспоненциальной устойчивости детерминированных линейных дифференциальных уравнений с запаздываниями высоких порядков.

Предварительные сведения и объект исследования

Пусть: $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ – стохастический базис; k^n – линейное пространство n -мерных $\mathfrak{F}_0$ -измеримых случайных величин; $B_i, i=1, \dots, m$ – скалярные независимые стандартные винеровские процессы; $1 \leq p < \infty$; C_p – положительное число, зависящее от p [17, с. 65] и используемое в оценке (2); E – символ математического ожидания; $\|\cdot\|$ – норма в R^n ; $\|\cdot\|$ – норма $n \times m$ -матрицы, согласованная с нормой в R^m ; $\|\cdot\|_X$ – норма в нормированном пространстве X ; μ – мера Лебега на $[0, \infty[$; $\bar{E}$ – единичная матрица размерности $n \times n$.

Пусть $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ – $m \times m$ -матрица. Матрица B называется неотрицательной, если $b_{ij} \geq 0$, $i, j = 1, \dots, m$, и положительной, если $b_{ij} > 0$, $i, j = 1, \dots, m$.

Определение 1. [18] Матрица $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ называется М-матрицей, если $b_{ij} \leq 0$ при $i, j = 1, \dots, m$ и $i \neq j$, и выполнено одно из следующих условий:

- для матрицы B существует положительная обратная матрица B^{-1} ;
- диагональные миноры матрицы B положительны.

Лемма 1. [18] Матрица B является М-матрицей, если $b_{ij} \leq 0$ при $i, j = 1, \dots, m$ и $i \neq j$, а также выполнено одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} -b_{ii} &\geq \sum_{j=1, j \neq i}^m |b_{ij}|, \quad i = 1, \dots, m; \\ -b_{jj} &\geq \sum_{i=1, i \neq j}^m |b_{ij}|, \quad j = 1, \dots, m; \end{aligned}$$

– существуют положительные числа ξ_i , $i = 1, \dots, m$ такие, что $\xi_i b_{ii} \geq \sum_{j=1, i \neq j}^m \xi_j |b_{ij}|$,
 $i = 1, \dots, m$;

– существуют положительные числа ξ_j , $j = 1, \dots, m$ такие, что $\xi_j b_{jj} \geq \sum_{i=1, i \neq j}^m \xi_i |b_{ij}|$,
 $j = 1, \dots, m$.

Объектом исследований является дифференциальное уравнение Ито второго порядка вида

$$dx'(t) = \left[-a_{00}(t)x(t) - a_{10}(t)x'(t) + \sum_{j=1}^{m_0} c_{j0}(t)x(h_{j0}(t)) \right] dt + \sum_{i=1}^m \left[-a_{0i}(t)x(t) - a_{1i}(t)x'(t) + \sum_{j=1}^{m_i} c_{ji}(t)x(h_{ji}(t)) \right] dB_i(t) \quad (t \geq 0), \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(t) = \varphi(t) \quad (t \geq 0), \quad (1a)$$

$$x^{(j)}(0) = b_{j+1}, \quad j = 0, 1, \quad (1b)$$

где:

1. $a_{ij} \leq 0$, $i = 0, 1$, $j = 0, \dots, m$ – измеримые по Лебегу функции, заданные на $[0, \infty[$, и $0 < \overline{a_{i0}} \leq a_{i0}(t) \leq A_{i0}$, μ – почти всюду для некоторых положительных чисел $\overline{a_{i0}}$, A_{i0} при $i = 0, 1$, $|a_{ij}(t)| \leq A_{ij}$, μ – почти всюду для некоторого положительного числа A_{ij} при $i = 0, 1$, $j = 1, \dots, m$, $|c_{ij}(t)| \leq C_{ij}$, μ – почти всюду для некоторого положительного числа C_{ij} при $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, m_i$;

2. h_{ij} , $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, m_i$ – измеримые по Лебегу функции, заданные на $[0, \infty[$, такие, что $0 \leq t - h_{ij}(t) \leq \tau_{ij}$, μ – почти всюду для некоторого положительного числа τ_{ij} при $i = 0, \dots, m$, $j = 0, \dots, m_i$;

3. φ – $\mathfrak{F}_0$ -измеримый скалярный случайный процесс, заданный на $[0, \infty[$, где $\sigma = \max\{\tau_{ij}, i = 0, \dots, m, j = 0, \dots, m_i\}$;

4. b_j , $j = 1, 2$ $\mathfrak{F}_0$ – измеримые скалярные случайные величины.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения:

– $b = \text{col}(b_1, b_2)$;

– $k_p^n = \{\alpha : \alpha \in k^n(T), \|\alpha\|_{k_p^n} \stackrel{\text{def}}{=} (E|\alpha|^p)^{1/p} < \infty\}$.

Под решением задачи (1), (1a), (1b) понимается любой случайный процесс $x(t)$, $t \in]-\infty, +\infty[$, прогрессивно измеримый и непрерывно дифференцируемый при $t \geq 0$, удовлетворяющий условиям (1a) и (1b), а также уравнению

$$x'(t) = b_1 + \int_0^t \left[-a_{00}(s)x(s) - a_{10}(s)x'(s) + \sum_{j=1}^{m_0} c_{j0}(s)x(h_{j0}(s)) \right] ds + \sum_{i=1}^m \int_0^t \left[-a_{0i}(t)x(t) - a_{1i}(t)x'(t) + \sum_{j=1}^{m_i} c_{ji}(t)x(h_{ji}(t)) \right] dB_i(t) \quad (t \geq 0), \quad (1')$$

где первый интеграл понимается в смысле Лебега, а второй интеграл – в смысле Ито.

Отметим, что задача (1), (1a), (1b) при сделанных предположениях имеет единственное решение в силу результатов работы [10]. Обозначим через $x(t, b, \varphi)$ решение задачи (1), (1a), (1b), т. е. $x(t, b, \varphi) = \varphi$ при $t < 0$ и $x(0, b, \varphi) = b_1$, $x'(0, b, \varphi) = b_2$.

Определение 2. Будем говорить, что уравнение (1) является экспоненциально p -устойчивым относительно начальных данных (или просто экспоненциально p -устойчивым), если при некоторых положительных постоянных K, λ справедливо неравенство

$$(E|x(t, b, \varphi)|^p)^{1/p} \leq K \left(\|b\|_{k_p^2} + \sup_{t < 0} (E|\varphi(t)|^p)^{1/p} \right) \exp\{-\lambda t\} \quad (t \geq 0).$$

Анализ экспоненциальной p -устойчивости уравнения (1) будет производиться исследованием вопросов экспоненциальной p -устойчивости для системы линейных уравнений Ито с последствием, построенной по уравнению (1). Традиционно для этого по уравнению (1) с начальными условиями (1a), (1b) строят систему следующего вида:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \quad (t \geq 0), \\ dx_2(t) &= \left[-a_{00}(t)x_1(t) - a_{10}(t)x_2(t) + \sum_{j=1}^{m_0} c_{j0}(t)x_1(h_{j0}(t)) \right] dt + \\ &+ \sum_{i=1}^m \left[-a_{0i}(t)x_1(t) - a_{1i}(t)x_2(t) + \sum_{j=1}^{m_i} c_{ji}(t)x_1(h_{ji}(t)) \right] dB_i(t) \quad (t \geq 0), \end{aligned} \quad (2)$$

с начальными условиями

$$x_1(t) = \varphi(t) \quad (t \geq 0), \quad (2a)$$

$$x_j(t) = b_j, \quad j = 1, 2, \quad (2b)$$

и при этом используется факт совпадения первой компоненты решения задачи (2), (2a), (2b) с решением задачи (1), (1a), (1b). Следовательно, экспоненциальная p -устойчивость уравнения (1) эквивалентна экспоненциальной p -устойчивости по первой компоненте системы (2). Вопросы экспоненциальной p -устойчивости – по части переменных для систем линейных уравнений Ито с последствием более общего вида изучены в работах [19, 20]. Кроме того, экспоненциальная p -устойчивость уравнения (1) будет следовать из экспоненциальной p -устойчивости системы (2). Исследование экспоненциальной p -устойчивости системы (2) можно провести эффективно, используя метод вспомогательных уравнений, и эти результаты можно применить для определения экспоненциальной p -устойчивости уравнения (1).

Использование системы (2) для анализа экспоненциальной p -устойчивости уравнения (1) не эффективно, так как первое уравнение этой системы не содержит информацию о параметрах уравнения (1). В работе [16] для анализа экспоненциальной устойчивости детерминированных линейных дифференциальных уравнений с последствием высоких порядков, используя положительную обратимость матриц, предложен дру-

гой подход построения вспомогательных систем по исходным уравнениям. Этот подход оказался более эффективным, чем традиционный. Нами исследована экспоненциальная p -устойчивость уравнения (1) с помощью идей и приемов работы [16].

Рассмотрим систему линейных уравнений Ито с запаздыванием следующего вида

$$x_1'(t) = -qx_1(t) + x_2(t) \quad (t \geq 0),$$

$$dx_2(t) = \left[-(a_{00}(t) - (a_{10}(t) - q)q)x_1(t) - (a_{10}(t) - q)x_2(t) + \sum_{j=1}^{m_0} c_{j0}(t)x_1(h_{j0}(t)) \right] dt + (3)$$

$$\sum_{i=1}^m \left[-(a_{0i}(t) - a_{1i}(t)q)x_1(t) - a_{1i}(t)x_2(t) + \sum_{j=1}^{m_i} c_{ji}(t)x_1(h_{ji}(t)) \right] dB_i(t) \quad (t \geq 0),$$

где q – некоторое положительное число, а остальные параметры определены в уравнении (1), с начальными условиями

$$x_1(t) = \varphi(t) \quad (t \geq 0), \quad (3a)$$

$$x_j(t) = b_j, \quad j = 1, 2. \quad (3b)$$

Нетрудно убедиться, что первая компонента решения задачи (3), (3a), (3b) совпадает с решением задачи (1), (1a), (1b). Следовательно, экспоненциальная p -устойчивость уравнения (1) будет следовать из экспоненциальной p -устойчивости системы (3). В дальнейшем для системы (3) будут исследованы вопросы экспоненциальной p -устойчивости.

Лемма 2. Пусть $f(s)$ – скалярный случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу $B(s)$ на отрезке $[0, t]$. Тогда справедливо неравенство

$$\left(E \left| \int_0^t f(s) dB(s) \right|^{2p} \right)^{1/2p} \leq c_p \left(E \left(\int_0^t |f(s)|^2 ds \right)^p \right)^{1/2p}, \quad (4)$$

где c_p – некоторое число, зависящее от p .

Справедливость неравенства (2) следует из неравенства четвертой работы [18] (стр. 65), где приведено и конкретное выражение для c_p .

Лемма 3. Пусть $g(s)$ – скалярная функция на $[0, \infty[$, квадрат которой локально суммируем, $f(s)$ – скалярный случайный процесс такой, что $\sup_{s \geq 0} (E|f(s)|^{2p})^{1/2p} < \infty$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t g(s) f(s) ds \right|^{2p} \right)^{1/2p} \leq \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t |g(s)| ds \right) \sup_{s \geq 0} (E|f(s)|^{2p})^{1/2p}, \quad (5)$$

$$\sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t (g(s))^2 (f(s))^2 ds \right|^p \right)^{1/2p} \leq \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t (g(s))^2 ds \right)^{1/2} \sup_{s \geq 0} (E|f(s)|^{2p})^{1/2p}. \quad (6)$$

Справедливость неравенств (5) и (6) доказана в работе [21].

Основной результат

В силу предположений существуют положительные числа γ_i , $i = 0, 1, \dots, m$ такие, что для системы (3) $|(a_{00}(s) + (a_{10}(s) - q))| \leq \gamma_0$, $|(a_{0i}(s) + a_{1i}(s)q)| \leq \gamma_i$, $i = 1, \dots, m$. Пусть

$$Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad z_{11} = 1, \quad z_{12} = -\frac{1}{q}, \quad z_{21} = -\frac{\sum_{j=1}^{m_0} c_{j0}}{a_{10} - q} - \frac{c_p \sum_{i=1}^m \left[\gamma_i \overline{y_1} + \sum_{j=1}^{m_i} c_{ji} \right]}{\sqrt{a_{10} - q}},$$

$$z_{22} = 1 - \frac{\gamma_0}{a_{10} - q} - \frac{c_p \sum_{i=1}^m A_{1i}}{\sqrt{a_{10} - q}}.$$

Теорема. Если существует положительное число q такое, что матрица Z является M -матрицей, то уравнение (1) экспоненциально $2p$ -устойчиво.

Доказательство. Систему (3) с условиями (3a) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \overline{x_1}'(t) &= -q\overline{x_1}(t) + \overline{x_2}(t) \quad (t \geq 0), \\ d\overline{x_2}(t) &= \left[-(a_{00}(t) - (a_{10}(t) - q)q)\overline{x_1}(t) - (a_{10}(t) - q)\overline{x_2}(t) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^{m_0} c_{j0}(t)(\overline{x_1}(h_{j0}(t)) + \overline{\varphi}(h_{j0}(t))) \right] dt + \\ &\quad \sum_{i=1}^m \left[-(a_{0i}(t) - a_{1i}(t)q)\overline{x_1}(t) - a_{1i}(t)\overline{x_2}(t) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=1}^{m_i} c_{ji}(t)(\overline{x_1}(h_{ji}(t)) + \overline{\varphi}(h_{ji}(t))) \right] dB_i(t) \quad (t \geq 0), \end{aligned} \quad (7)$$

где $\overline{x_i}$ – неизвестный скалярный случайный процесс на $]-\infty, +\infty[$ такой, что $\overline{x_i}(t) = 0$ при $t < 0$; $\overline{\varphi}(t)$ – известный скалярный случайный процесс на $]-\infty, +\infty[$ такой, что $\overline{\varphi}(t) = \varphi(t)$ при $t \in [\sigma, 0[$ и $\overline{\varphi}(t) = 0$, когда t не принадлежит полуинтервалу $[\sigma, 0[$. Обозначим через $\overline{x}(t, b, \varphi)$ решение системы (7), удовлетворяющее условию (3b). Очевидно, что решение задачи (7), (3b) при $t \geq 0$ совпадает с решением задачи (3), (3a), (3b).

Если в системе (7) сделать замену $\overline{x_i}(t) = \exp\{-\lambda t\}y_i(t)$, где $y_i(t)$ – неизвестный скалярный случайный процесс на $]-\infty, +\infty[$ такой, что $y_i(t) = 0$ при $t < 0$, $0 < \lambda < \min\{q, A_{10} - q\}$ для $i = 1, 2$, то получим систему

$$\begin{aligned}
 y_1'(t) &= (\lambda - q)y_1(t) + y_2(t) \quad (t \geq 0), \\
 dy_2(t) &= \left[-(a_{00}(t) - (a_{10}(t) - q)q)y_1(t) + (\lambda - (a_{10}(t) - q))y_2(t) + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{j=1}^{m_0} c_{j0}(t) \exp\{\lambda t\} (\exp\{-\lambda h_{j0}(t)\} y_1(h_{j0}(t)) + \bar{\varphi}(h_{j0}(t))) \right] dt + \\
 &\quad \sum_{i=1}^m \left[-(a_{0i}(t) - a_{1i}(t)q)y_1(t) - a_{1i}(t)y_2(t) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^{m_i} c_{ji}(t) \exp\{\lambda t\} (\exp\{-\lambda h_{ji}(t)\} y_1(h_{ji}(t)) + \bar{\varphi}(h_{ji}(t))) \right] dB_i(t) \quad (t \geq 0).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Полагая, что $\eta(t) = (a_{10}(t) - q) - \lambda$, с учетом условий (3b) систему (8) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 y_1(t) &= \exp\{-(q - \lambda)t\} b_1 + \int_0^t \exp\{-(q - \lambda)(t - s)\} y_2(s) ds \quad (t \geq 0), \\
 y_2(t) &= \exp\left\{-\int_0^t \eta(s) ds\right\} b_2 + \int_0^t \exp\left\{-\int_s^t \eta(\zeta) d\zeta\right\} \left[-(a_{00}(s) - (a_{10}(s) - q)q)y_1(s) + \right. \\
 &\quad \left. \sum_{j=1}^{m_0} c_{j0}(s) \exp\{\lambda s\} (\exp\{-\lambda h_{j0}(s)\} (y_1(h_{j0}(s)) + \bar{\varphi}(h_{j0}(s)))) \right] ds + \\
 &\quad \sum_{i=1}^m \int_0^s \exp\left\{-\int_s^t \eta(\zeta) d\zeta\right\} \left[-(a_{0i}(s) - a_{1i}(s)q)y_1(s) - a_{1i}(s)y_2(s) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{j=1}^{m_i} c_{ji}(s) \exp\{\lambda s\} (\exp\{-\lambda h_{ji}(s)\} (y_1(h_{ji}(s)) + \bar{\varphi}(h_{ji}(s)))) \right] dB_i(s) \quad (t \geq 0),
 \end{aligned} \tag{9}$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями $\bar{y}_i = \sup_{t \geq 0} (E | y_i(t) |^{2p})^{1/2p}$, $i = 1, 2$,

$\bar{\varphi} = \sup_{t < 0} (E | \varphi(t) |^{2p})^{1/2p}$ и неравенствами (2)–(4).

Из первого уравнения системы (9) получим

$$\bar{y}_1 \leq \|b_1\|_{k_{2p}^1} + \frac{1}{q - \lambda} \bar{y}_2.$$

Из последнего уравнения системы (9) с учетом предыдущих обозначений и неравенств (2)–(4) получим

$$\begin{aligned}
 \bar{y}_2 \leq & \|b_2\|_{k_{2p}^1} + \left[\gamma_0 \bar{y}_2 + \sum_{j=1}^{m_0} c_{j0} \exp\{\lambda \tau_{j0}\} (\bar{y}_1 + \bar{\varphi}) \right] \sup_{t \geq 0} \int_0^t \exp\left\{-\int_s^t \eta(\zeta) d\zeta\right\} ds + \\
 & c_p \sum_{i=1}^m \left[\gamma_i \bar{y}_1 + A_{1i} \bar{y}_2 + \sum_{j=1}^{m_i} c_{ji} \exp\{\lambda \tau_{ji}\} (\bar{y}_1 + \bar{\varphi}) \right] \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t \exp\left\{-2 \int_s^t \eta(\zeta) d\zeta\right\} ds \right)^{1/2}.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Так как

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t \exp \left\{ - \int_s^t \eta(\zeta) d\zeta \right\} ds = \sup_{t \geq 0} \int_s^t \left[\exp \left\{ - \int_s^t \eta(\zeta) d\zeta \right\} \eta(s) \right] / \eta(s) ds \leq \frac{1}{a_{10} - q - \lambda}$$

и

$$\sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t \exp \left\{ - 2 \int_s^t \eta(\zeta) d\zeta \right\} ds \right)^{1/2} = \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t \left[\exp \left\{ - 2 \int_s^t \eta(\zeta) d\zeta \right\} 2\eta(s) \right] / (2\eta(s)) ds \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{a_{10} - q - \lambda}},$$

то из оценки (10) получаем

$$\begin{aligned} \overline{y_2} \leq \|b_2\|_{k_{2p}^1} + \frac{\gamma_0 \overline{y_2} + \sum_{j=1}^{m_0} c_{j0} \exp \{ \lambda \tau_{j0} \} \overline{y_1}}{a_{10} - q - \lambda} + \\ \frac{c_p \sum_{i=1}^m \left[\gamma_i \overline{y_1} + A_{1i} \overline{y_2} + \sum_{j=1}^{m_i} c_{ji} \exp \{ \lambda \tau_{ji} \} \overline{y_1} \right]}{\sqrt{a_{10} - q - \lambda}} + M(\lambda) \overline{\varphi}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\text{где } M(\lambda) = \frac{\sum_{j=1}^{m_0} c_{j0} \exp \{ \lambda \tau_{j0} \}}{a_{10} - q - \lambda} + \frac{c_p \sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^{m_i} c_{ji} \exp \{ \lambda \tau_{ji} \} \right]}{\sqrt{a_{10} - q - \lambda}}.$$

Обозначим теперь $y(t) = \text{col} (y_1(t), y_2(t))$, $\overline{y} = \text{col} (\overline{y_1}, \overline{y_2})$, $\overline{M}(\lambda) = \text{col} (0, M(\lambda))$, $e = \text{col} (1, 1)$, $Z(\lambda) = \begin{pmatrix} z_{11}(\lambda) & z_{12}(\lambda) \\ z_{21}(\lambda) & z_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$, где $z_{11}(\lambda) = 1$, $z_{12}(\lambda) = -\frac{1}{q - \lambda}$,

$$z_{21}(\lambda) = -\frac{\sum_{j=1}^{m_0} c_{j0} \exp \{ \lambda \tau_{j0} \}}{a_{10} - q - \lambda} - \frac{c_p \sum_{i=1}^m \left[\gamma_i \overline{y_1} + \sum_{j=1}^{m_i} c_{ji} \exp \{ \lambda \tau_{ji} \} \right]}{\sqrt{a_{10} - q - \lambda}},$$

$$z_{22}(\lambda) = 1 - \frac{\gamma_0}{a_{10} - q - \lambda} - \frac{c_p \sum_{i=1}^m A_{1i}}{\sqrt{a_{10} - q - \lambda}}.$$

Тогда из оценок (11) с учетом, что $\|b_i\|_{k_{2p}^1} \leq \|b\|_{k_{2p}^2}$, $i = 1, 2$, получаем

$$Z(\lambda) \overline{y} \leq e \|b\|_{k_{2p}^2} + \overline{M}(\lambda) \overline{\varphi}. \quad (12)$$

Очевидно также, что $Z(0) = Z$. В силу условий теоремы матрица Z является M -матрицей, а тогда при достаточно малых λ матрица $Z(\lambda)$ также является M -матрицей, а значит, существует $\lambda = \lambda_0$ такое, что $Z(\lambda_0)$ положительно обратима. Тогда из неравенства (12) получаем

$$|\overline{y}| \leq K (\|b\|_{k_{2p}^2} + \overline{\varphi}), \quad (13)$$

где $K = \|Z(\lambda_0)^{-1}\| \max\{1, M(\lambda_0)\}$.

Поскольку $x(t, b, \varphi) = \exp\{-\beta t\} y(t)$ и $\sup_{t \geq 0} (E|y(t)|^{2p})^{1/2p} = |\bar{y}|$, $\bar{\varphi} = \sup_{t < 0} (E|\varphi(t)|^{2p})^{1/2p}$, то из неравенства (13) следует, что существуют положительные числа $\lambda = \lambda_0$, $K = \|Z(\lambda_0)^{-1}\| \max\{1, M(\lambda_0)\}$ такие, что для решения $x(t, b, \varphi)$ задачи (1), (1a), (1b) справедливо неравенство

$$(E|x(t, b, \varphi)|^{2p})^{1/2p} \leq K \left(\|b\|_{k_{2p}^2} + \sup_{t < 0} (E|\varphi(t)|^{2p})^{1/2p} \right) \exp\{-\lambda_0 t\} \quad (t \geq 0).$$

Теорема доказана.

Следствие основного результата

Следствие. Если существует положительное число q такое, что для уравнения (1) имеет место неравенство

$$1 - \frac{\gamma_0}{a_{10} - q} - \frac{c_p \sum_{i=1}^m A_{1i}}{\sqrt{a_{10} - q}} - \frac{1}{q} \left[\frac{\sum_{j=1}^{m_0} c_{j0}}{a_{10} - q} + \frac{c_p \sum_{i=1}^m \left[\gamma_i \bar{y}_1 + \sum_{j=1}^{m_i} c_{ji} \right]}{\sqrt{a_{10} - q}} \right] > 0, \quad (14)$$

то оно экспоненциально $2p$ -устойчиво.

Справедливость следствия следует из теоремы в силу того, что при выполнении условий следствия матрица Z будет M -матрицей, так как все диагональные миноры матрицы Z положительны.

Используя следствие можно получить достаточные условия экспоненциальной $2p$ -устойчивости для конкретных уравнений вида (1) в терминах параметров этих уравнений.

Литература

1. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981.
2. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинате, 1989.
3. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications. – Chichester: Horwood Publishing Ltd., 1997. – 360 p.
4. Mohammed S.E.F. Stochastic Functional Differential Equations With Memory. Theory, Examples and Applications // Proceeding of The Sixth on Stochastic Analysis. – Geilo, Norway, 1996. – P. 1–91.
5. Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. Устойчивость линейных систем с последствием. 1 // Диф. уравнения. – 1987. – Т. 28, № 5. – С. 745–754.
6. Березанский Л.М. Развитие W-метода Н.В. Азбелева в задачах устойчивости решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Диф. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 5. – С. 739–750.

7. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
8. Berezansky L., Braverman E. On exponential dichotomy, Bohl Perron type theorems and stability of difference equations // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – № 304. – P. 511–530.
9. Kadiev R.I. and Ponosov A.V. Stability of stochastic functional differential equations and the W-transform // Electron J. Diff. Eqns. – 2004. – № 92. – P. 1–36.
10. Кадиев Р.И., Поносов А.В. Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений // Диф. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 7. – С. 879–885.
11. Kadiev R.I., Ponosov A.V. Exponential stability of linear stochastic differential equations with bounded delay and the W-transform // E.J. Qualitative Theory of Diff. Eq. – 2008. – № 23. – P. 1–14.
12. Кадиев Р.И., Поносов А.В. Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями // Диф. уравнения. – Минск. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 486–498.
13. Kadiev R., Ponosov A. Stability of impulsive stochastic differential linear functional equations with linear delays // J. of Abstract Differential Equations and Applications. – 2012. – V. 2, № 2. – P. 7–25.
14. Kadiev R., Ponosov A. The W-transform in stability analysis for stochastic linear functional difference equations // J. Mathem. Analysis and Appl. – 2012. – V. 389, № 2. – P. 1239–1250.
15. Кадиев Р.И. Устойчивость решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями по линейному приближению // Диф. уравнения. – Минск, 2013. – Т. 49, № 8. – С. 963–970.
16. Berezansky L., Braverman E., Idels L. New Global Exponential Stability Criteria for Nonlinear Delay Differential Systems with Applications to BAM Neural Networks // Applied Mathematics and Computation. – 2014. – № 243. – P. 899–910.
17. Линцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986.
18. Berman A. and Plemmons R. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences // Computer Science and Applied Mathematics, Academic Press. – New York – London, 1979.
18. Кадиев Р.И. К вопросу об устойчивости по начальным данным по части переменных решений линейных импульсных дифференциальных уравнений Ито с последствием // Вестник Тамбовского университета. – 2015. – Т. 20, № 5. – С. 1190–1194.
19. Кадиев Р.И., Шахбанова З.И. Устойчивость по части переменных функционально-дифференциальных уравнений со случайными параметрами // Вестник ДГУ. Естественные науки. – 2008, вып. 1. – С. 21–26.

Поступила в редакцию 24 января 2018 г.

UDC 517.929.4+519.21

DOI: 10.21779/2542-0321-2018-33-1-67-77

**Stability of solutions of the linear differential Ito equations with delay
of the second order**

R.I. Kadiyev^{1, 2}, Z.I. Shakhbanova¹

¹ *Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; kadiyev_r@mail.ru;*

² *Daghestan Scientific Center RAS; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45*

The article deals with research of exponential moment stability decisions for the linear differential Ito equations with delays of the second order of a concrete look on the basis of positively reversible matrixes theory.

Under the research made, the ideas and methods developed by N.V. Azbelev and his pupils for research of questions of stability of the determined linear functional and differential equations are used. Besides, N.V. Azbelev's methods were applied earlier by the authors to research the stability for the linear differential Ito equations with delays of the first order. The article gives sufficient conditions of exponential moment stability of the linear differential Ito equations of the second order with delays in terms of positive reversibility of the matrixes constructed on the initial equations. The feasibility of these conditions for the concrete equations is checked.

Keywords: *differential Ito equations, stability of decisions, positive reversibility of matrixes.*

Received 24 January, 2018