УДК 517.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-4-47-55

Ж.А. Балкизов

Смешанная задача с производными второго порядка в граничных условиях для уравнения параболического типа третьего порядка с кратными характеристиками¹

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН; Россия, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а; Giraslan@yandex.ru

В работе исследована смешанная задача с производными второго порядка в граничных условиях для уравнения параболического типа третьего порядка с кратными характеристиками. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения исследуемой задачи, для чего применяется метод априорных оценок. Проведено исследование полученного решения и его производных требуемого порядка на равномерную сходимость.

Ключевые слова: *смешанная краевая задача, априорная оценка искомого решения, метод Фурье (метод разделения переменных), задача на собственные значения, собственные значения и собственные функции задачи, равномерная сходимость ряда, непрерывность функции и ее производных.*

Введение

В прямоугольной области $D = \{(x, y) : 0 < x < r, 0 < y < h\}$ евклидовой плоскости точек $z = (x, y)$ рассмотрим уравнение

$$Lu = u_{xxx}(z) + a_2(z)u_{xx}(z) + a_1(z)u_x(z) + b_2(z)u_{yy}(z) + b_1(z)u_y(z) + a_0(z)u = -f(z), \quad (1)$$

где $a_i(x, y)$ ($i = 0, 1, 2$), $b_j(x, y)$ ($j = 1, 2$), $f(z) = f(x, y)$ – заданные функции из класса $a_i(z) \in C_x^i(\overline{D})$, $b_j(z) \in C_y^j(\overline{D})$, $f(z) \in C(\overline{D})$, а $u(z) = u(x, y)$ – искомая функция.

По классификации дифференциальных уравнений высшего порядка, приведенной в монографии А.М. Нахушева [1], уравнение (1) относится к уравнениям параболического типа. В монографии Т.Д. Джуроева [2] уравнения вида (1) названы уравнениями третьего порядка с кратными характеристиками. В работе [3] показано, что линейное приближение распространения нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации описывается уравнением вида (1) при $b_2(z) \equiv 0$. Отметим также, что к уравнению вида (1) при $b_2(z) \equiv 0$ можно прийти и в процессе линеаризации уравнения Кортевега – Де Фриза [4], имеющей важные применения в вопросах распространения нелинейных волн в слабодиспергирующих средах [5]. В работах [6]–[10] изучены локальная, нелокальная и общие краевые задачи для уравнения (1) в случае, когда коэффициент $b_2(z) \equiv 0$. В работе [11] исследованы нелокальные задачи с интегральными условиями для линеаризованного уравнения Кортевега – Де Фриза.

¹ Статья подготовлена по материалам доклада, представленного на XII Международной научно-практической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики», которая прошла 19–22 сентября 2017 года в Дагестанском государственном университете (г. Махачкала, РФ).

В работах [12]–[14] различными методами получены фундаментальные решения модельного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками вида

$$u_{xxx}(z) - u_{yy}(z) = 0, \quad (2)$$

а также изучены свойства полученных решений, в частности получены оценки построенных фундаментальных решений и их производных.

Краевые задачи для уравнений вида (2) и (1) при $b_2(x, y) \neq 0$ как в ограниченной, так и в неограниченной областях изучены в работах [15]–[19]. Методом априорных оценок в работе [20] исследована краевая задача для общего уравнения вида (1).

В данной работе для уравнения (1) исследуется смешанная задача с производными второго порядка в граничных условиях.

Постановка задачи

Определение. Регулярным в области D решением уравнения (1) назовем функцию $u(z) = u(x, y)$ из класса $C(\overline{D}) \cap C_{x,y}^{3,2}(D)$, при подстановке которой уравнение (1) обращается в тождество.

В данной работе исследуется следующая

Задача 1. Найти регулярное в области D решение уравнения (1) из класса $u_x \in C(D \cup \{x=0\})$, $u_{xx} \in C(D \cup \{x=0\} \cup \{x=r\})$, $u_y \in C(D \cup \{y=0\} \cup \{y=r\})$ удовлетворяющее краевым условиям

$$u_{xx}(0, y) + \alpha(y)u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_{xx}(r, y) + \beta(y)u(r, y) = \varphi_2(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_3(y), \\ 0 < y < h, \quad (3)$$

а также условиям периодичности по времени

$$u(x, 0) = u(x, h), \quad u_y(x, 0) = u_y(x, h), \quad 0 \leq x \leq r, \quad (4)$$

где $\alpha(y)$, $\beta(y)$, $\varphi_i(y) \in C[0, h]$, $i = 1, 3$ – заданные функции.

Теорема о единственности решения задачи 1

Обозначим

$$(u, v)_0 = \int_D u(z)v(z)dx dy, \quad \|u\|_0^2 = (u, u)_0 = \int_D u^2(z)dx dy.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть заданные функции $a_i(x, y)$ ($i = 0, 1, 2$), $b_j(x, y)$ ($j = 1, 2$), $\alpha(y)$, $\beta(y)$ таковы, что они обладают свойствами:

$$a_2(x, y) \geq 0, \quad b_2(x, y) \geq 0 \quad \forall (x, y) \in D \quad (5)$$

$$a_{2xx}(x, y) + b_{2yy}(x, y) - a_{1x}(x, y) - b_{1y}(x, y) + 2a_0(x, y) < 0 \quad \forall (x, y) \in D, \quad (6)$$

$$a_{2x}(0, y) - a_1(0, y) + 2\alpha(y) \leq 0, \quad a_{2x}(r, y) - a_1(r, y) + 2\beta(y) \geq a_2^2(r, y) \quad \forall y \in [0, h], \quad (7)$$

$$b_2(x, h) = b_2(x, 0), \quad b_{2y}(x, h) - b_{2y}(x, 0) \geq b_1(x, h) - b_1(x, 0) \quad \forall x \in [0, r] \quad (8)$$

Тогда для решения $u(z) = u(x, y)$ задачи 1 имеет место энергетическое неравенство

$$\|u(z)\|_0 \leq M \|f(z)\|_0, \quad (9)$$

где M – положительная постоянная, не зависящая от искомой функции $u(z)$.

Доказательство. Обозначим через $D_\varepsilon = \{(x, y): \varepsilon < x < r - \varepsilon, \varepsilon < y < h - \varepsilon\}$, где ε – произвольное, достаточно малое положительное число. Для исходного оператора Lu справедливо тождество:

$$2uLu = \frac{\partial Q(z)}{\partial x} - \frac{\partial P(z)}{\partial y} + a_{00}(z)u^2 - 2a_2(z)u_x^2 - 2b_2(z)u_y^2, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} P(z) &= [b_{2y}(z) - b_1(z)]u^2 - 2b_2(z)uu_y; \\ Q(z) &= [a_1(z) - a_{2x}(z)]u^2 + 2uu_{xx} + 2a_2(z)uu_x - u_x^2; \\ a_{00}(z) &= a_{2xx}(z) + b_{2yy}(z) - a_{1x}(z) - b_{1y}(z) + 2a_0(z). \end{aligned}$$

Интегрируя тождество (10) по вспомогательной области D_ε , а затем применяя к полученному равенству формулу Грина, будем иметь

$$\begin{aligned} 2 \int_{D_\varepsilon} uLudxdy &= \int_{\Gamma_\varepsilon} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \\ &+ \int_{D_\varepsilon} [a_{00}(z)u^2 - 2a_2(z)u_x^2 - 2b_2(z)u_y^2]dxdy = -2 \int_{D_\varepsilon} u(z)f(z)dxdy, \quad (11) \end{aligned}$$

где Γ_ε – граница вспомогательной области D_ε .

Перейдем в равенстве (11) к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Легко заметить, что при этом область D_ε переходит в D . Тогда с учетом граничных условий (3), (4) получим

$$\begin{aligned} -2(u, f)_0 &= 2 \int_0^r [b_2(x, h) - b_2(x, 0)]u(x, 0)u_y(x, 0)dx + \\ &+ \int_0^r [b_{2y}(x, 0) - b_{2y}(x, h) + b_1(x, h) - b_1(x, 0)]u^2(x, 0)dx + \\ &+ \int_0^h [a_{2x}(0, y) - a_1(0, y) + 2\alpha(y)]u^2(0, y)dy + \\ &+ \int_0^h \{[a_1(r, y) - a_{2x}(r, y) - 2\beta(y)]u^2(r, y) + 2a_2(r, y)u(r, y)u_x(r, y) - u_x^2(r, y)\}dy + \\ &+ \int_D [a_{00}(z)u^2 - 2a_2(z)u_x^2 - 2b_2(z)u_y^2]dxdy = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \quad (12) \end{aligned}$$

Из условия (8) теоремы 1 сразу следует, что

$$I_1 = 2 \int_0^r [b_2(x, h) - b_2(x, 0)]u(x, 0)u_y(x, 0)dx = 0.$$

В силу условий (7) и (8) справедливы неравенства

$$I_2 = \int_0^r [b_{2y}(x, 0) - b_{2y}(x, h) + b_1(x, h) - b_1(x, 0)]u^2(x, 0)dx \leq 0,$$

$$I_3 = \int_0^h [a_{2x}(0, y) - a_1(0, y) + 2\alpha(y)]u^2(0, y)dy \leq 0,$$

$$I_4 = \int_0^h \{[a_1(r, y) - a_{2x}(r, y) - 2\beta(y)]u^2(r, y) + 2a_2(r, y)u(r, y)u_x(r, y) - u_x^2(r, y)\}dy \leq 0,$$

а в силу условий (5) – интеграл

$$I_5 = \int_D [a_{00}(z)u^2 - 2a_2(z)u_x^2 - 2b_2(z)u_y^2] dx dy \leq \int_D a_{00}(z)u^2(z) dx dy.$$

С учетом перечисленных выше неравенств из (12) находим

$$-2(u, f)_0 \leq \int_D a_{00}(z)u^2 dx dy,$$

откуда

$$2(u, f)_0 \geq \int_D [-a_{00}(z)]u^2 dx dy \geq m\|u\|_0^2, \quad (13)$$

$$\text{где } m = \min_{(x,y) \in D} |a_{00}(z)| = \min_{(x,y) \in D} |a_{2xx}(z) + b_{2yy}(z) - a_{1x}(z) - b_{1y}(z) + 2a_0(z)|.$$

С другой стороны, используя неравенство Юнга, убеждаемся в том, что

$$2(u, f)_0 \leq \varepsilon_1 \|u\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} \|f\|_0^2, \quad (14)$$

где ε_1 – достаточно малое положительное число.

Из (13) и (14) приходим к неравенству

$$m\|u\|_0^2 \leq \varepsilon_1 \|u\|_0^2 + \frac{1}{\varepsilon_1} \|f\|_0^2.$$

Выбирая $\varepsilon_1 = \frac{m}{2}$ из последнего неравенства, приходим к априорной оценке (9).

Теорема 1 доказана.

Из априорной оценки (9) вытекает единственность регулярного решения исследуемой задачи 1.

Теорема о существовании решения задачи 1

Теорема 2. При условиях (6), (7) решение задачи 1 существует.

Далее перейдем к исследованию вопроса о существовании решения задачи 1. Существование решения задачи (3), (4) для уравнения (1) будем доказывать с использованием метода разделения переменных (метода Фурье) для частного случая уравнения (1), когда

$$b_2(x, y) = \lambda = \text{const}, \quad a_0(x, y) = \mu = \text{const}, \quad a_1(x, y) = a_2(x, y) = b_1(x, y) \equiv 0, \\ \alpha(y) = \alpha = \text{const}, \quad \beta(y) = \beta = \text{const}.$$

Условия (5)–(8) при этом будут выполнены, если

$$\lambda \geq 0, \quad \mu < 0, \quad \alpha \leq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0. \quad (15)$$

При сделанных предположениях относительно коэффициентов $a_i(x, y)$ ($i = 0, 1, 2$), $b_j(x, y)$ ($j = 1, 2$) задача (1), (3), (4) переходит к следующей задаче:

$$u_{xxx} + \lambda u_{yy} + \mu u = -f(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (16)$$

$$u_{xx}(0, y) + \alpha u(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_{xx}(r, y) + \beta u(r, y) = \varphi_2(y), \quad u_x(0, y) = \varphi_3(y), \quad y \in (0, h), \quad (17)$$

$$u(x, 0) = u(x, h), \quad u_y(x, 0) = u_y(x, h), \quad x \in (0, r). \quad (18)$$

Вначале положим, что $f(x, y) = 0$. Решение задачи (16)–(18) ищем в виде

$$u(x, y) = X(x)Y(y). \quad (19)$$

Подставляя (19) в (16), с учетом условий (18) приходим к следующей задаче на собственные значения относительно $Y(y)$:

$$Y''(y) + \theta Y(y) = 0, \quad (20)$$

$$Y(0) = Y(h), \quad Y'(0) = Y'(h). \quad (21)$$

При $\theta < 0$ задача (20)–(21) имеет только тривиальное решение $Y(y) \equiv 0$.

Пусть $\theta = 0$. В этом случае функция $Y_0(y) = \frac{A_0}{2}$, где $A_0 = \text{const}$, является собственной функцией задачи (20)–(21), соответствующей собственному значению $\theta_0 = 0$.

И наконец, при $\theta > 0$ собственные значения задачи (20)–(21) будут иметь вид

$$\theta_n = \left(\frac{2\pi n}{h} \right)^2, \quad n \in N,$$

а собственной функцией, соответствующей собственным значениям θ_n , будет функция

$$Y_n(y) = A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right).$$

Легко заметить, что система функций $\left\{ \frac{1}{2}; \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right); \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ образует полную ортогональную систему в $L_2[0, h]$.

Пусть теперь $f(x, y) \neq 0$. Решение неоднородного уравнения (16) будем искать в виде ряда Фурье по собственным функциям задачи (20)–(21):

$$u(x, y) = \frac{A_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) + B_n(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) \right], \quad (22)$$

где $A_0(x)$, $A_n(x)$, $B_n(x)$ пока неизвестные достаточно гладкие функции.

Предположим, что правая часть $f(x, y)$ уравнения (16), а также функции $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$, $\varphi_3(y)$, входящие в граничные условия (3) допускают разложение в ряд Фурье по собственным функциям задачи (20)–(21):

$$f(x, y) = \frac{F_0(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[F_n(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) + \Phi_n(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) \right], \quad (23)$$

$$\varphi_k(y) = \frac{\varphi_{k0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\varphi_{kn} \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) + \psi_{kn}(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) \right], \quad (k = 1, 2, 3), \quad (24)$$

где $F_n(x) = \frac{2}{h} \int_0^h f(x, y) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) dy$, $\Phi_n(x) = \frac{2}{h} \int_0^h f(x, y) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) dy$,

$$\varphi_{kn} = \frac{2}{h} \int_0^h \varphi_k(y) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) dy, \quad \psi_{kn} = \frac{2}{h} \int_0^h \varphi_k(y) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad k = 1, 2, 3.$$

Подставляя (22) в уравнение (16), с учетом (23) приходим к равенству

$$\begin{aligned} & \frac{A_0'''(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_0'''(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) + B_0'''(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) \right] - \\ & - \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi n}{h} \right)^2 \left[A_n(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) + B_n(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) \right] + \end{aligned}$$

$$+\frac{\mu}{2}A_0(x)+\mu\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{h}y\right)+B_n(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{h}y\right)\right]=$$

$$=-\frac{F_0(x)}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\left[F_n(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{h}y\right)+\Phi_n(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{h}y\right)\right].$$

Из последнего равенства с учетом условий (17) и разложения (24) приходим к следующим задачам относительно искомых функций $A_n(x)$, $B_n(x)$:

$$A_n'''(x)+\mu A_n(x)-\lambda\left(\frac{2\pi n}{h}\right)^2 A_n(x)=-F_n(x), \quad n \in N \cup \{0\}, \quad 0 < x < r, \quad (25)$$

$$A_n''(0)+\alpha A_n(0)=\varphi_{1n}, \quad A_n''(r)+\beta A_n(r)=\varphi_{2n}, \quad A_n'(0)=\varphi_{3n}; \quad (26)$$

$$B_n'''(x)+\mu B_n(x)-\lambda\left(\frac{2\pi n}{h}\right)^2 B_n(x)=-\Phi_n(x), \quad n \in N, \quad 0 < x < r, \quad (27)$$

$$B_n''(0)+\alpha B_n(0)=\psi_{1n}, \quad B_n''(r)+\beta B_n(r)=\psi_{2n}, \quad B_n'(0)=\psi_{3n}. \quad (28)$$

Решения задач (25)–(26), (27)–(28) выписываются по формулам:

$$A_n(x)=-\int_0^r G_n(x,\xi)F_n(\xi)d\xi+\lambda_n^3\int_0^r G_n(x,\xi)g_{1n}(\xi)d\xi+g_{1n}(x), \quad n \in N \cup \{0\},$$

$$B_n(x)=-\int_0^r G_n(x,\xi)\Phi_n(\xi)d\xi+\lambda_n^3\int_0^r G_n(x,\xi)g_{2n}(\xi)d\xi+g_{2n}(x), \quad n \in N,$$

$$\text{где } \lambda_n=\sqrt[3]{\lambda\theta_n-\mu}; \quad g_{1n}(x)=\frac{\beta(x^2-r^2)-2}{2\beta-2\alpha-\alpha\beta r^2}\varphi_{1n}+\frac{(2-\alpha x^2)(\varphi_{2n}-\beta r\varphi_{3n})}{2\beta-2\alpha-\alpha\beta r^2}+\varphi_{3n}x;$$

$$g_{2n}(x)=\frac{\beta(x^2-r^2)-2}{2\beta-2\alpha-\alpha\beta r^2}\psi_{1n}+\frac{2-\alpha x^2}{2\beta-2\alpha-\alpha\beta r^2}\psi_{2n}+\frac{\beta(r-x)(2-\alpha r x)+2\alpha x}{2\beta-2\alpha-\alpha\beta r^2}\psi_{3n};$$

$G_n(x,\xi)$ – функция Грина оператора $L[g]=g'''(x)-\lambda_n^3 g(x)$

с условиями $g''(0)+\alpha g(0)=0$, $g''(r)+\beta g(r)=0$, $g'(0)=0$,

явный вид которой определяется формулой

$$G_n(x,\xi)=\begin{cases} \left[e^{\lambda_n x} + \frac{2\lambda_n^2 + \alpha}{\lambda_n^2 - \alpha} e^{-\frac{\lambda_n x}{2}} \cos(\kappa_n x) + \frac{\sqrt{3}\alpha}{\lambda_n^2 - \alpha} e^{-\frac{\lambda_n x}{2}} \sin(\kappa_n x) \right] a_{1n}, & 0 \leq x < \xi, \\ \left[e^{\lambda_n x} + \frac{2\lambda_n^2 + \alpha}{\lambda_n^2 - \alpha} e^{-\frac{\lambda_n x}{2}} \cos(\kappa_n x) + \frac{\sqrt{3}\alpha}{\lambda_n^2 - \alpha} e^{-\frac{\lambda_n x}{2}} \sin(\kappa_n x) \right] a_{1n} + \\ + \frac{1}{3\lambda_n^2} \left[e^{\lambda_n(x-\xi)} - 2e^{-\frac{\lambda_n}{2}(x-\xi)} \cos\left(\kappa_n(x-\xi) - \frac{\pi}{3}\right) \right], & \xi < x \leq r, \end{cases}$$

$$\kappa_n = \frac{\sqrt{3}\lambda_n}{2},$$

$$a_{1n} = -\frac{\lambda_n^2 - \alpha}{3\lambda_n^2} \frac{(\lambda_n^2 + \beta)e^{\lambda_n(r-\xi)} + 2\left[\lambda_n^2 \cos \kappa_n(r-\xi) - \beta \cos\left(\kappa_n(r-\xi) - \frac{\pi}{3}\right)\right]e^{\frac{\lambda_n}{2}(r-\xi)}}{(\lambda_n^2 - \alpha)(\lambda_n^2 + \beta)e^{\lambda_n r} - 2\left[\lambda_n^4 \cos\left(\kappa_n r + \frac{\pi}{3}\right) + \lambda_n^2(\beta - \alpha) \cos \kappa_n r + \alpha \beta \cos\left(\kappa_n r - \frac{\pi}{3}\right)\right]e^{\frac{\lambda_n}{2}r}}. \Pi$$

оставляя значения $A_0(x)$, $A_n(x)$, $B_n(x)$ в (22), находим

$$\begin{aligned} u(x, y) = & -\frac{1}{2} \int_0^r G_0(x, \xi) F_0(\xi) d\xi + \frac{g_{10}(x)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\int_0^r G_n(x, \xi) F_n(\xi) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) d\xi + \right. \\ & + \lambda_n^3 \int_0^r G_n(x, \xi) g_{1n}(\xi) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) d\xi + g_{1n}(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) - \int_0^r G_n(x, \xi) \Phi_n(\xi) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) d\xi + \\ & \left. + \lambda_n^3 \int_0^r G_n(x, \xi) g_{2n}(\xi) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) d\xi + g_{2n}(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{h} y\right) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

С учетом значений $F_0(x)$, $F_n(x)$, $\Phi_n(x)$ из (29) приходим к следующему представлению решения исследуемой задачи 1:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & -\int_0^r \int_0^h L[G_n(x, \xi), y - \eta] f(\xi, \eta) d\eta d\xi + \\ & + \int_0^r \int_0^h L[\lambda_n^3 G_n(x, \xi), y - \eta] [B_1(\xi) \varphi_1(\eta) + B_2(\xi) \varphi_2(\eta) + B_3(\xi) \varphi_3(\eta)] d\eta d\xi + \\ & + B_1(x) \varphi_1(y) + B_2(x) \varphi_2(y) + B_3(x) \varphi_3(y), \end{aligned} \quad (30)$$

$$\text{где } L[p_n(x), y] = \frac{1}{2} p_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} p_n(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{h} y\right), \quad B_1(x) = \frac{\beta(x^2 - r^2) - 2}{2\beta - 2\alpha - \alpha\beta r^2},$$

$$B_2(x) = \frac{2 - \alpha x^2}{2\beta - 2\alpha - \alpha\beta r^2}, \quad B_3(x) = \frac{\beta(r - x)(2 - \alpha r x) + 2\alpha x}{2\beta - 2\alpha - \alpha\beta r^2}.$$

Знаменатель функций $B_1(x)$, $B_2(x)$, $B_3(x)$

$$\delta = 2\beta - 2\alpha - \alpha\beta r^2 > 0$$

в силу условий (15), а знаменатель

$$\Delta = (\lambda_n^2 - \alpha)(\lambda_n^2 + \beta)e^{\lambda_n r} - 2\left[\lambda_n^4 \cos\left(\kappa_n r + \frac{\pi}{3}\right) + \lambda_n^2(\beta - \alpha) \cos \kappa_n r + \alpha \beta \cos\left(\kappa_n r - \frac{\pi}{3}\right)\right]e^{\frac{\lambda_n}{2}r}$$

коэффициента $a_{1n}(\xi)$ не равен нулю в силу единственности решения задачи 1.

Таким образом, формула (30) дает представление единственного решения задачи 1 для уравнения (1) в случае, когда коэффициенты $a_1(x, y) = a_2(x, y) = b_1(x, y) \equiv 0$, а

$$b_2(x, y) = \lambda \geq 0, \quad a_0(x, y) = \mu < 0, \quad \alpha \leq 0, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha^2 + \beta^2 \neq 0.$$

Пользуясь признаком Даламбера, легко доказать равномерную сходимость ряда формулы (30) и ее производных $u_{xxx}(z)$, $u_{yy}(z)$, из которого вытекает непрерывность решения $u = u(z)$ и ее производных требуемого порядка. Следовательно, формула (30) служит представлением единственного регулярного решения задачи 1.

Литература

1. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа. 1995. – 301 с.
2. Джураев Т. Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. – Ташкент: ФАН, 1979. – 238 с.
3. Красильников В.А., Кузнецов В.П. Распространение нелинейных звуковых волн в жидкости при кавитации // Акустический журнал. – 1974. – Т. 20, № 3. – С. 473–477.
4. Korteweg D.J., De Vries G. On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves // Philosophical Magazine. – 1895. – Vol. 39. – P. 422–443.
5. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. – М.: Наука, 1973. – 175 с.
6. Cattabriga L. // Annali della scuola normale Superiori di Pisa. – 1959. – Vol. 13, № 2. – P. 163.
7. Джураев Т. Д., Иргашев Ю. О краевой задаче Каттабрига для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Сборник научных трудов "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения". – Ташкент: ФАН. 1976. – С. 141–155.
8. Джураев Т. Д., Абдиназаров С. Краевые задачи типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Академии наук УзССР. Сер.: Физико-математические науки. – 1981. – № 1. – С. 16–22.
9. Иргашев Ю. Некоторые краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками // Сборник научных трудов "Краевые задачи для дифференциальных уравнений и их приложения". – Ташкент: ФАН, 1976. – С. 17–31.
10. Абдиназаров С. Общие краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Дифф. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 1. – С. 3–12.
11. Лукина Г.А. Краевые задачи с интегральными граничными условиями для линейаризованного уравнения Кортевега – Де Фриза // Вестник Южно-Уральского государственного университета. – 2011. – № 17 (234). – С. 52–61.
12. Block H. Sur les equations lineaires aux derivies partielles a caracteristiques multiples // Ark. mat., astron., fysik. – 1912. – Bd. 7. № 13. – P. 3–20.
13. Cattabriga L. Potenziale di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabili a caratteristiche multiple // Rendiconti del seminario Matem. della univ. di Padova. – 1961. – Vol. 31.
14. Джураев Т. Д., Анаков Ю.П. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: Физико-математические науки. – 2007. – № 2 (16). – С. 18–26.
15. Анаков Ю.П. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Материалы III Международной конференции "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики" (Нальчик, 5–8 декабря, 2006). – Нальчик: Эльбрус, 2006. – С. 37–39.
16. Анаков Ю.П. К решению краевых задач для уравнения $u_{xxx} - u_{yy} = 0$ в неограниченных областях // Доклады АН Республики Узбекистан. – 2006. – № 3. – С. 17–20.

17. Апаков Ю.П. О решении краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Украинский математический журнал. – 2012. – Т. 64, № 1. – С. 3–13.

18. Балкизов Ж.А., Кодзоков А.Х. О представлении решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Известия Кабардино-Балкарского научного центра РАН. – 2010. – № 4. – С. 64–69.

19. Балкизов Ж.А. Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2015. – Т. 17, № 3. – С. 13–21.

20. Балкизов Ж.А. Краевая задача для уравнения третьего порядка с нелокальным условием по времени // Вестник Карагандинского университета. Сер. Математика. – 2017. – № 1 (85). – С. 8–16.

Поступила в редакцию 9 ноября 2017 г.

UDC 517.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-4-47-55

A mixed problem with second-order derivatives in boundary conditions for parabolic equation of the third order with multiple characteristics

Zh.A. Balkizov

Institute of Applied Mathematics and Automation, Kabardino-Balkar Scientific Centre of the RAS; Russia, St. 360000, Nalchik, Shortanova st., 89a; Giraslan@yandex.ru

The authors of the article investigate a mixed problem with derivative of second order in boundary conditions for parabolic equation of the third order with multiple characteristics. Theorems about existence and uniqueness of solution of the investigated problem are proven applying the method of a priori estimates. Using the method of separation of variables the solution discharged in the form of Fourier series in eigenfunctions of the problem. The study of the obtained solution and its derivatives of the required order of uniform convergence is made.

Keywords: mixed boundary value problem, a priori estimate of the solution sought, the method of Fourier (method separation of variables), the task on eigen values, eigenvalues and eigen functions of the problem, uniform convergence of series, continuity of function and its derivatives.

Received 9 November, 2017