УДК 532 (075.8)

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-4-38-46

С.С. Гадиева, П.Ф. Гахраманов

Применение методов конечных разностей для решения модельных уравнений теплообмена

Сумгаитский государственный университет; Азербайджан, AZ5008, г. Сумгаит, 43-й квартал; smsff125@mail.ru

Математическое описание многих процессов гидрогазодинамики, магнитогидродинамики, теории изгибания поверхностей, безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака, теории бесконечно малых изгибов поверхностей, тепло- и массообмена и т. д. приводит к краевым задачам для уравнения смешанного типа.

Точные решения краевых задач для уравнения смешанного типа удается получить лишь в частных случаях. Поэтому надо уметь решать эти задачи приближенно (т. е. численно с помощью компьютера).

Универсальным и эффективным методом решения краевых задач для уравнений смешанного типа, выражающихся уравнениями эллиптического и гиперболического типов, является метод конечных разностей, или метод сеток.

Метод конечных разностей в настоящее время является одним из наиболее распространенных методов приближенного решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.

Основой метода конечных разностей является дискретизация – замена непрерывной области совокупностью изолированных точек (сеткой), причем решение уравнений ищется лишь в этих точках (узлах сетки). Производные аппроксимируются конечными разностями и решение уравнений в частных производных сводится к решению системы алгебраических уравнений.

С развитием вычислительной техники появилась возможность применять для решения задач теплообмена и диффузии в сплошных средах не только аналитические, но и численные методы. Отметим, что фактическое вычисление аналитических решений с помощью компьютера иногда требует составления весьма сложных программ, реализация которых может вызвать определенные технические трудности (например, вычисление различных специальных функций). Поэтому «прямое» применение численных методов в некоторых случаях может быть более целесообразным, чем аналитический подход.

Методы численного решения задач теплопроводности и диффузии в сплошных средах (включая и случай переменных свойств среды) в настоящее время хорошо разработаны и довольно широко применяются. Эти же численные методы могут быть применены в тех часто встречающихся случаях, когда тепло- и массообмен не оказывают влияние на движение жидкой и газообразной сред, а само движение среды является известным.

В работе рассматривается конвективный перенос тепла (или концентрации) одномерным потоком среды с теплопроводностью (или диффузией) и возможных источников или стоков, интенсивность которых задается функцией $f(t, x)$.

Ключевые слова: аппроксимация, погрешность, одномерное, устойчивость, фаза.

Постановка задачи

Рассмотрим конвективный перенос тепла (или концентрации) одномерным потоком среды с теплопроводностью (или диффузией) и возможных источников или стоков, интенсивность которых задается функцией $f(t, x)$. Этот процесс описывается модель-

ным уравнением тепломассопереноса [1], имеющим вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu + f(t, x). \quad (1)$$

Здесь ν, a, b – постоянные коэффициенты, $\nu > 0$. Первое слагаемое в правой части уравнения (1) соответствует переносу тепла теплопроводностью (или вещества диффузией), второе – конвективному переносу, третье – источнику, пропорциональному температуре или концентрации («кинетический член»), четвертое – внешнему источнику (стоку). Для определенности будем рассматривать тепловую интерпретацию (1).

Задача Коши для уравнения (1) содержит дополнительные условия

$$-\infty < x < +\infty, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0, x) = \varphi(x). \quad (2)$$

Здесь $\varphi(x)$ – известная (начальная) функция. Задача Коши (1), (2) описывает одномерное распространение тепла в одномерном потоке среды.

Первая краевая задача для уравнения (1), соответствующая распространению тепла в одномерном течении среды при заданных значениях температур на границах, формулируется следующим образом [1]:

$$0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0, x) = \varphi(x), u(t, 0) = f_0(t), \quad u(t, X) = f_1(t). \quad (3)$$

Здесь f_0, f_1 – известные (граничные) функции.

Аппроксимация задачи

Для аппроксимации (1) введем основную прямоугольную сетку $x = x_0 + nh, t = m\tau, m, n = 0, 1, 2, \dots$ и вспомогательную «полуцелую сетку»

$$x = x_0 + nh, \quad t = \left(m + \frac{1}{2}\right)\tau, \quad x = x_0 + \left(n + \frac{1}{2}\right)h, \quad t = m\tau.$$

Аппроксимируя производные центральными разностными отношениями, а производную по t односторонним разностным отношением «вперед», получим для уравнения (1) явную схему [1]

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} + bu_m^n + f_m^n, \quad (4)$$

погрешность аппроксимация для (4) есть $O(\tau) + O(h^2)$. Для устойчивости находим

$$\lambda = 1 - 4 \frac{\nu\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega h}{2} - i \frac{a\tau}{h} \sin \omega h + b\tau$$

Уравнение (1) можно и аппроксимировать по неявной четырехточечной схеме [2]. Перенесем сеточные аналогии производных по x и член bu на верхний слой, тогда можем написать

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} + bu_m^{n+1} + f_m^n. \quad (5)$$

Погрешность аппроксимации есть $O(\tau) + O(h^2)$. Исследуя устойчивость, находим [1]

$$\lambda = 1 / \left(1 + 4 \frac{\nu\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega h}{2} + i \frac{a\tau}{h} \sin \omega h - b\tau \right).$$

Рассмотрим неявную шеститочечную симметричную схему.

По аналогии можно построить для уравнения (1) неявную аппроксимацию, имеющую второй порядок точности относительно τ и h :

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{\nu}{2} \left[\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right] - \frac{a}{2} \left[\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} - \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right] + \frac{b}{2} (u_m^{n+1} + u_m^n) + f_m^{n+\frac{1}{2}} \quad (6)$$

Полагая, что $b=0$, находим

$$\lambda = \left(1 - 2 \frac{\nu\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega h}{2} - \frac{i}{2} \frac{a\tau}{h} \sin \omega h \right) \left(1 + 2 \frac{\nu\tau}{h^2} \sin^2 \frac{\omega h}{2} + \frac{i}{2} \frac{a\tau}{h} \sin \omega h \right)^{-1}$$

Очевидно, что $|\lambda| \leq 1$ для любых τ и h . Следовательно, схема (7) устойчива.

Ошибка аппроксимации схемы (6) есть $O(\tau^2) + O(h^2)$, поэтому на гладких решениях схема (6) позволяет вести расчет с большими шагами во времени по сравнению с явной схемой (4). При построении схемы для уравнения (1) можно сочетать различные аппроксимации (явные, неявные, симметричные, односторонние) для отдельных членов уравнения. Так, например, приводим схему:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{\nu}{2} \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) - \frac{a}{2} \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} + bu_m^{n+1} + f_m^n. \quad (7)$$

Уравнения (4)–(7) можно соответственно привести к следующему виду [1]:

$$u_m^n = \left[\nu \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{u_m^{n+1}}{\tau} + f_m^n \right] \cdot \left[\frac{2\nu}{h} - b - \frac{1}{\tau} \right]^{-1}, \quad (8)$$

$$u_m^n = -\tau \left[\nu \frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} - a \frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} \left(b - \frac{1}{\tau} \right) u_m^{n+1} + f_m^n \right], \quad (9)$$

$$u_m^n = \left[\frac{\nu}{2} \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) - \frac{a}{2} \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - u_{m-1}^{n+1}}{2h} - \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \right) + \left(\frac{b}{2} - \frac{1}{\tau} \right) u_m^{n+1} + f_m^{n+\frac{1}{2}} \right] \cdot \left[\frac{\nu}{h^2} - \frac{b}{2} - \frac{1}{\tau} \right]^{-1}, \quad (10)$$

$$u_m^n = \left[\frac{\nu}{2} \left(\frac{u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{h^2} \right) - \frac{a}{h} u_{m-1}^{n+1} + bu_m^{n+1} + f_m^n \right] \times \left[\frac{\nu}{h^2} + a - \frac{1}{\tau} \right]^{-1}. \quad (11)$$

Численный эксперимент

На основе (8)–(11) проведен численный эксперимент (при $k = 0,65$, $k = |a|\tau/h \leq 1$) и результат представлен в табл. 1 [1].

Таблица 1

Результаты численного эксперимента при $k = 0,65$

	Точное решение	Приближенные решения							
		Явная схема	Абсолют. погрешн.	Неявная схема по левому углу	Абсолют. погрешн.	Неявная схема по правому углу	Абсолют. погрешн.	Схема Лакса	Абсолют. погрешн.
u_1^1	0,247160	0,247225	0,000065	0,247193	0,000033	0,247096	0,000064	0,249579	0,002419
u_1^2	0,444125	0,444287	0,000162	0,444206	0,000081	0,444012	0,000113	0,446447	0,002322

u_1^5	1,031915	1,032367	0,000452	1,032143	0,000228	1,031656	0,000259	1,033946	0,002031
u_2^2	0,446625	0,446787	0,000162	0,446706	0,000081	0,446512	0,000113	0,448947	0,002322
u_2^4	0,839196	0,839552	0,000356	0,839374	0,000178	0,838986	0,000210	0,841324	0,002128
u_2^6	1,228665	1,229212	0,000547	1,228939	0,000274	1,228359	0,000306	1,230601	0,001936
u_2^8	1,613497	1,614235	0,000738	1,613866	0,000369	1,613097	0,000400	1,615244	0,001747
u_3^3	0,645701	0,645959	0,000258	0,645830	0,000129	0,645540	0,000161	0,647926	0,002225
u_3^5	1,036915	1,037367	0,000452	1,037141	0,000226	1,036656	0,000259	1,038946	0,002031
u_3^8	1,615997	1,616735	0,000738	1,616366	0,000369	1,615597	0,000400	1,617744	0,001747
u_4^1	0,254660	0,254725	0,000065	0,254693	0,000033	0,254595	0,000065	0,257079	0,002419
u_4^4	0,844196	0,844552	0,000356	0,844374	0,000178	0,843986	0,000210	0,846324	0,002128
u_4^6	1,233665	1,234212	0,000547	1,233939	0,000274	1,233359	0,000306	1,235601	0,001936
u_4^8	1,618497	1,619235	0,000738	1,618866	0,000369	1,618097	0,000400	1,620244	0,001747
u_5^3	0,650701	0,650959	0,000258	0,650830	0,000129	0,650540	0,000161	0,652926	0,002225
u_5^5	1,041915	1,042367	0,000452	1,042141	0,000226	1,041656	0,000259	1,043946	0,002031
u_5^7	1,429256	1,429899	0,000643	1,429578	0,000322	1,428903	0,000353	1,431097	0,001841
u_6^1	0,259660	0,259725	0,000065	0,259693	0,000033	0,259595	0,000065	0,262079	0,002419
u_6^4	0,849196	0,849552	0,000356	0,849374	0,000178	0,848986	0,000210	0,851324	0,002128
u_6^6	1,238665	1,239212	0,000547	1,238939	0,000274	1,238359	0,000306	1,240601	0,001936
u_6^7	1,431756	1,432399	0,000643	1,432078	0,000322	1,431403	0,000353	1,433597	0,001841
u_7^2	0,459125	0,459287	0,000162	0,459206	0,000081	0,459012	0,000113	0,451447	0,007678

Анализ численного эксперимента (см. табл.1) показывает, что хорошая сходимость получается с неявным левым углом.

Разные методы

Можно рассматривать также следующие частные случаи уравнения переноса (1):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x} + bu; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (12)$$

Ограничимся в начале только последним уравнением. Для него запишем трехслойную явную схему («Ромб») [11]:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^{n-1}}{\tau^2} = \nu \frac{u_{m+1}^n - (u_m^{n+1} + u_m^{n-1}) + u_{m-1}^n}{h^2}. \quad (13)$$

Можно показать, что схема (13) устойчива. Ошибка аппроксимации для этой схемы есть $E = \nu \left(\frac{\tau}{h} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^2) + O(h^2)$.

Для аппроксимации необходимо, чтобы $\tau/h \rightarrow 0$. Пусть, например, $2\nu\tau/h^2 = const$; тогда главный член имеет вид $\frac{\nu\tau}{h^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Следовательно, при условии $2\nu\tau/h^2 \geq const$

схема (13) дает аппроксимацию первого порядка относительно τ . Качественные свойства решения особенно удобно учитывать с помощью принципа расщепления [7]. Идею этого важного принципа, открывающего широкие возможности для конструирования эффективных сеточных аппроксимаций, изложим на примере уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \nu = \text{const}, \quad a = \text{const}. \quad (14)$$

Уравнение (14) описывает одномерное распространение тепла, обусловленное двумя процессами – теплопроводностью (первое слагаемое в правой части) и конвекцией (второе слагаемое в правой части).

Запишем уравнение (14) для этих процессов отдельно:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Первое уравнение есть уравнение теплопроводности, а второе – волновое уравнение (точнее-одномерное волновое уравнение первого порядка [2]).

Рассмотрим одномерное движение тепла (концентрации), описываемое уравнением (14), которое чаще называют линейным уравнением Бюргерса [5]. Точное стационарное решение уравнения (14) с граничными условиями $u(0, t) = u_0$, $u(l, t) = 0$ имеет вид $u = u_0 \left\{ \frac{1 - \exp[\text{Re}_L(x/L - 1)]}{1 - \exp(-\text{Re}_L)} \right\}$, где Re_L – число Рейнольдса, $\text{Re}_L = al/\nu = a\rho L/\mu$;

$\nu = \mu/\rho$; ρ, μ – плотность и динамическая вязкость среды (жидкости). Точное нестационарное решение уравнения (14) с начальным условием $u(x, 0) = \sin(kx)$ и периодическим граничным условием имеет вид $u(x, t) = \exp(-k^2 \nu t) \sin k(x - at)$. Используя метод конечных разностей по пространству, запишем разностную схему для (14) в форме

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2} - a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{2h}. \quad (15)$$

Это явная одношаговая схема первого порядка точности с погрешностью аппроксимации $O(\tau, h^2)$. Важной характеристикой конечно-разностных схем, используемых для решения уравнения Бюргерса, является появление осцилляций (всплесков) решения [8]. Очевидно, при расчете течений жидкости необходимо избежать появления таких осцилляций. При решении уравнения Бюргерса по схеме (15) осцилляции возникают, если сеточное число Рейнольдса Re_h (или число Пекле) расположено в диапазоне $2 \leq \text{Re}_h \leq 2/e$, где $\text{Re}_h = ah/\nu$, $e = a\tau/h$. Чтобы избежать осцилляции (т. е. большой диссипации) можно аппроксимировать конвективный член разностями против потока с третьим порядком точности. Тогда разностная схема для уравнение (14) при $a > 0$ получается в таком виде

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} + a \left(\frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} - \frac{u_{m+1}^n + 3u_m^n + 3u_{m-1}^n - u_{m-1}^n}{6h} \right) = \nu \frac{u_{m+1}^n - 2u_m^n + u_{m-1}^n}{h^2}, \quad a > 0.$$

Эта схема устойчива при $\text{Re}_h \leq 2/e$. Теперь рассмотрим решение волнового уравнения. Точное аналитическое решение волнового уравнения с начальными данными $u(x, 0) = F(x)$, $-\infty < x < \infty$, имеет вид $u(x, t) = F(x - at)$. Перейдем к изучению конечно-разностных схем решения одномерного волнового уравнения первого порядка (его часто называют и одномерным линейным уравнением переноса).

Запишем явные одношаговые разностные схемы:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = -a \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h}, \quad \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = -a \frac{u_{m+1}^n - u_{m-1}^n}{2h} \quad (16)$$

с погрешностью аппроксимации $O(\tau, h)$ и $\nu(t, h^2)$ соответственно. Обе эти схемы имеют первый порядок аппроксимации, т. к. главный член в выражении для погрешности

имеет первый порядок, разностные схемы (16) явные, т. к. в каждое разностное уравнение входит лишь одно неизвестное u_m^{n+1} . К сожалению, анализ устойчивости разностных схем (16) методом Неймана приводит к тому, что они обе абсолютно неустойчивы и, следовательно, для численного решения волнового уравнения непригодны [4].

Простую явную схему (16) можно сделать устойчивой, если при аппроксимации производной по пространству использовать на разности вперед, а разности назад – в тех случаях, когда скорость волны a положительна. При использовании разностей назад разностные уравнения принимают вид

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = -a \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h}. \quad (17)$$

Эта схема имеет первый порядок точности с погрешностью аппроксимации $O(\tau, h)$. Из условия устойчивости Неймана следует, что схема устойчива при $0 \leq e \leq 1$, где $e = at/h$.

Подставим в (17) вместо u_{m+1}^n и u_{m-1}^n выражения в виде ряда Тейлора. Тогда получим [2]

$$\frac{1}{\tau} \left\{ \left[u_m^n + \tau u_t + \frac{\tau^2}{2} u_{tt} + \frac{\tau^3}{6} u_{ttt} + \dots \right] - u_m^n \right\} + \frac{a}{h} \left\{ u_m^n - \left[u_m^n + hu_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{\tau^2}{6} u_{xxx} + \dots \right] \right\} = 0 \quad (18)$$

После преобразований (18) можем написать

$$u_t + au_x = -\frac{\tau}{2} u_{tt} + \frac{ah}{2} u_{xx} - \frac{\tau^2}{6} u_{ttt} - a \frac{h^2}{6} u_{xxx} + \dots \quad (19)$$

Дифференцируя (19) по времени, получаем

$$u_{tt} + au_{xt} = -\frac{\tau}{2} u_{ttt} + \frac{ah}{2} u_{xxt} - \frac{\tau^2}{6} u_{tttt} - a \frac{h^2}{6} u_{xxxt} + \dots, \quad (20)$$

а дифференцируя (19) по x и умножая на $-a$, находим

$$-au_{tx} - a^2 u_{xx} = \frac{a\tau}{2} u_{ttx} - \frac{a^2 h}{2} u_{xxx} + \frac{a\tau^2}{6} u_{tttx} + \frac{a^2 h^2}{6} u_{xxxx} + \dots \quad (21)$$

Складывая (20) и (21), получаем

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \tau \left(\frac{-u_{ttt}}{2} + \frac{a}{2} u_{ttx} + O(\tau) \right) + h \left(\frac{a}{2} u_{xxt} - \frac{a^2}{6} u_{xxx} + O(h) \right). \quad (22)$$

Аналогично можно получить следующие выражения для производных u_{ttt} , u_{ttx} , u_{xxt} :

$$u_{ttt} = -a^2 u_{xxx} + O(\tau, h), \quad u_{ttx} = a^2 u_{xxx} + O(\tau, h), \quad u_{xxt} = -au_{xxx} + O(\tau, h). \quad (23)$$

Из уравнений (19), (22) и (23) следует, что

$$u_t + au_x = \frac{ah}{2} (1-e) u_{xx} - a \frac{h^2}{6} (2e^2 - 3e + 1) u_{xxx} + O(h^3, h^2\tau, h\tau^2, \tau^3).$$

Это уравнение называется модифицированным уравнением (или дифференциальным приближением разностной схемы).

Пусть для решения волнового уравнения (при $a = 0,75$) с начальным условием $u(x, t) = \sin(6\pi x)$, $0 \leq x \leq 1$ и периодическими граничными условиями используется схема с разностями против потока. Найдем погрешность в определении амплитуды и фазы волны, если $\tau = 0,02$ и $h = 0,02$.

В рассматриваемой задаче можно ограничиться одним значением параметра β , т. к. при заданных граничных и начальном условиях решение волнового уравнения описывается одним членом ряда Фурье. Коэффициент перехода в этом случае определяется также одним членом ряда Фурье, удовлетворяющим волновому уравнению, поэтому частота точного решения совпадает с частотой, используемой для определения коэффициента перехода, т. е. $f_m = k_m/2\pi$. Следовательно, в рассматриваемом случае волновое число задается в виде [2] $k_m = \frac{m\pi}{L} = \frac{6\pi}{1} = 6\pi$. При помощи числа Куранта $e = \frac{a\tau}{h} = \frac{(0,75)(0,02)}{0,02} = 0,75$ легко определить модуль коэффициента перехода:

$$|G| = \left[(1 - e + e \cos \beta)^2 - (-e \sin \beta)^2 \right]^{1/2} = 0,986745.$$

Сравнивая фазовый угол φ после выполнения одного шага по времени $\varphi = \arctg \frac{-e \sin \beta}{1 - e + e \cos \beta} = -0,28359$ с его точным значением φ_c за один шаг $\varphi_c = -\beta e = -0,28274$, получим, что после выполнения десяти шагов по времени ошибка в определении фазы будет равна $10(\varphi_c - \varphi) = 0,0084465$.

Сопоставим точное решение волнового уравнения при $t = 10t = 0,2$ с полученным численно после выполнения десяти шагов по времени. Точное решение имеет вид $u(x; 0,2) = (0,8751) \sin[6\pi(x - 0,15) - 0,0084465]$. Если коэффициент перехода $|G| = 0,986745 \approx 1$, то сравнения точного и приближенного решений можно оценить по табл. 2 [1].

Таблица 2. Результаты численного эксперимента

Шаг сетки	Точное решение	Приближенное решение	Абсолютная погрешность
1	2	3	4
0	-0,31038	-0,30238	0,007996
0,1	-0,80874	-0,81365	0,00491
0,2	0,808736	0,803767	0,00497
0,3	0,31038	0,318354	0,007974
0,4	-1	-0,99994	0,00006
0,5	0,305834	0,297826	0,006008
0,6	0,811537	0,816417	0,00488
0,7	-0,80592	-0,80092	0,00500
0,8	-0,31492	-0,32288	0,00796
0,9	0,999974	0,999879	0,000095
1	-0,30128	-0,29326	0,00802
1,1	-0,81432	-0,81917	0,00485
1,2	0,803079	0,798045	0,005034
1,3	0,31945	0,327398	0,007948
1,4	-0,99993	-0,99979	0,00014
1,5	0,296723	0,28869	0,008033
1,6	0,817083	0,821897	0,004814
1,7	-0,80022	-0,79516	0,005066
1,8	-0,32397	-0,3191	0,00794
1,9	0,99986	0,999684	0,00018
2	-0,29216	-0,24811	0,008044

Из этой таблицы видно, что аппроксимация уравнения (19) по схеме разностей назад достаточно хорошо совпадает с точным решением.

Литература

1. Исмаилов Р.Ш., Гахраманов П.Ф., Рустамова К.Ф. Основные теории турбулентного движения одно- и двухфазных сред // Итоги науки. Избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. – М., 2015. – Вып. 19. – С. 34–64.
2. Рустамова К.Ф., Исмаилов Р.Ш., Гахраманов П.Ф. Численные методы решения краевых задач для уравнений эллиптического типа и уравнений пограничных слоев // Итоги науки. Избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. – М., 2016. – Вып. 28. – С. 44–84.
3. Кожоголов К.Ч., Абдылдаев К.К., Кабаев Г.Д. Моделирование напряженно-деформированного состояния прибортового массива при открытой и комбинированной разработке месторождений // Итоги науки. Избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. – М., 2016. – Вып. 26. – С. 24–43.
4. Прошекальников Д.В., Кульментьева Е.И., Рамазанов Р.Р., Солодов С.Д. Расчет коэффициентов тепло- и массоотдачи в стволе нефтяной скважины с использованием к-ε модели турбулентности // Вестник Казанского ТУ. – 2014. – Т. 17, № 5. – С. 235–238.
5. Насырова А.М., Куряшов Д.А., Баширицева Н.Ю., Идрисов А.Р. Повышение эффективности солянокислотных обработок нефтяных скважин в карбонатных коллекторах // Вестник Казанского ТУ. – 2013. – № 8. – С. 290–292.
6. Войнов Н.А., Жукова О.П., Курганский О.В., Вырина Е.Е. Массообмен в проточном биореакторе с рециркуляцией жидкости // Химия растительного сырья. – 2014. – № 3. – С. 241–246.
7. Малинин В.В., Остапенко Е.Н., Пенский О.Г. Математические модели многоимпульсного погружения строительных элементов в грунт из артиллерийских орудий // Фундаментальные и прикладные проблемы науки. – Т. 1. Материалы X Международного симпозиума, посвященного 70-летию Гобеды. – М., 2015. – Т. 1. – С. 75–83.
8. Еришов Н.П., Еришов П.Н. Оценка несущей способности неоднородных оболочек // Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Материалы VIII Международного симпозиума. – М., 2013. – Т. 3. – С. 36–70.
9. Курир В.И. К оптимизации формы лопасти гидротурбины Френсиса // Итоги науки, избранные труды Международного симпозиума по фундаментальным и прикладным проблемам науки. – М., 2016. – Вып. 26, – С. 13–24.
10. Еришов Н.П., Еришов П.Н. Оценка надежности неоднородных оболочек // Фундаментальные и прикладные проблемы науки. – Т. 2. Материалы VII Международного симпозиума. – М., 2012. – Т. 2. – С. 190–215.
11. Еришов Н.П., Еришов П.Н., Шестаков А.Л. Вклад академика В.П. Макеева в развитие механики конструкций из композиционных материалов // Фундаментальные и прикладные проблемы науки. Материалы IX Международного симпозиума, посвященного 90-летию со дня рождения акад. В.П. Макеева. – М., 2014. – Т. 1. – С. 5–43.

Поступила в редакцию 19 сентября 2017 г.

UDC 532 (075.8)

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-4-38-46

Application of methods of finite differences for solving model equations of thermal association

S.S. Gadieva, P.F. Gahramanov

Sumgayit State University; Azerbaijan, AZ5008, Sumgayit, 43rd block; smsff125@mail.ru

Mathematical description of many processes of hydrogasdynamics, magnetohydrodynamics, theory of surface bending, membrane theory of shells with curvature of a variable sign, the theory of infinitesimal bending of surfaces, the process of heat and mass transfer, etc. lead to boundary-value problems for a mixed-type equation.

Precise solutions of boundary value problems for a mixed-type equation can be obtained only in special cases. Therefore, we must be able to solve these problems approximately (that is, numerically using a computer).

A universal and effective method for solving boundary value problems for a mixed-type equation that degenerate by equations of elliptic and hyperbolic types is the finite difference method or the grid method.

The finite difference method is currently one of the most common methods for approximate solution of boundary value problems for partial differential equations.

The basis of the method of finite differences is discretization – the replacement of a continuous domain by a set of isolated points (a grid), and the solution of the equations is sought only at these points (grid nodes). Derivatives are approximated by finite differences and the solution of partial differential equations reduces to solving a system of algebraic equations.

With the development of computer technology, it became possible to apply not only analytical but also numerical methods for solving heat transfer and diffusion problems in continuous media. Note in this connection that the actual calculation of analytical solutions using a computer sometimes requires the preparation of very complex programs, the implementation of which on the computer can cause certain technical difficulties (for example, the calculation of various special functions). Therefore, the "direct" application of numerical methods in some cases may be more appropriate than an analytical approach.

Methods for the numerical solution of problems of heat conduction and diffusion in continuous media (including the case of variable properties of the medium) are now well developed and are widely used. The same numerical methods can be applied in those frequently occurring cases where heat and mass change do not affect the motion of liquid and gaseous media, and the movement of the medium itself is known.

The paper deals with convective heat transfer (or concentration) by a one-dimensional flow of a medium with thermal conductivity (or diffusion) and possible sources or sinks, the intensity of which is specified by the function.

Keywords: approximation, inaccuracy, one-dimensional, stability, phase.

Received 19 September, 2017