УДК 517.9

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-3-85-91

З.Г. Меджидов^{1, 2}, Д.А. Алипова¹

Восстановление векторного поля по данным его поперечного лучевого преобразования в ограниченном угловом диапазоне на плоскости

¹ Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; ziyaudinmedzhidov@yandex.ru;

² Дагестанский научный центр РАН; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45

Доказаны формулы для определения неизвестного векторного поля на плоскости, заданного своим поперечным лучевым преобразованием в ограниченном угловом диапазоне. В первой формуле используется интегральная формула интерполяции функции с ограниченным спектром. Восстанавливается преобразование Фурье дивергенции неизвестного поля. Во второй формуле интерполяция производится по дискретным значениям функции. Восстанавливаются координатные функции потенциальной части искомого поля. Векторное поле ищется в классе вектор-функций, сосредоточенных в некоторой полосе, достаточно быстро убывающих на бесконечности и имеющих непрерывные вторые производные.

Ключевые слова: поперечное лучевое преобразование, векторное поле, преобразование Радона, функции с ограниченным спектром.

Поперечное лучевое преобразование $P^\perp$ на евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ отображает векторное поле $f = (f_1, f_2)$ в функцию $P^\perp f$, определенную формулой

$$P^\perp f(\xi, s) = \int_{-\infty}^{\infty} (\xi_1 f_1(s\xi + t\eta) + \xi_2 f_2(s\xi + t\eta)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi, f(s\xi + t\eta) \rangle dt, \quad (1)$$

$s \in \mathbb{R}$. Интегрирование ведется вдоль прямой $l = l_{\xi, s}: x = s\xi + t\eta$ (или $x \cdot \xi = s$) с направляющим вектором $\eta = (\eta_1, \eta_2) = (-\sin \alpha, \cos \alpha) \in \mathbb{R}^2$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) = \eta^\perp = (\cos \alpha, \sin \alpha) \in \mathbb{R}^2$ – ортогональный вектор: $\xi \perp \eta$.

Аналогично определяется продольное лучевое преобразование:

$$Pf(\eta, s) = \int_{-\infty}^{\infty} (\eta_1 f_1(s\xi + t\eta) + \eta_2 f_2(s\xi + t\eta)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \eta, f(s\xi + t\eta) \rangle dt, \quad (2)$$

т. е. интеграл, вычисленный вдоль прямой $l_{\xi, s}$ компоненты поля f , параллельной прямой $l_{\xi, s}$, тогда как в преобразовании (1) интегрируется вдоль той же прямой компонента поля f , ортогональная прямой $l_{\xi, s}$.

Семейство ориентированных прямых в $\mathbb{R}^2$ можно параметризовать точками единичного цилиндра $Z = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^3$.

Преобразования вида (1) возникают в задачах измерения температуры в газах с использованием дистанционных измерений. Преобразования вида (2) возникают в физике плазмы, в фотоэластичности, в акустической томографии, в задачах визуализации движения крови в человеческом теле путем измерений ультразвуковых сигналов и т. д. [1, 2].

Целью данной статьи является восстановление неизвестного поля f по известной функции $P^\perp f(\xi, x)$. Практически обоснованным является решение этой задачи в случае, когда функция $P^\perp f$ задана не на всем множестве Z , а лишь на некоторой его части. Мы будем предполагать, что вектор ξ меняется в произвольно малом угловом диапазоне. Однозначное решение задачи на таком подмножестве Z возможно в специальном классе функций – функций с ограниченным спектром. Поведение функций этого класса легко предсказуемо, для этих функций имеются теоремы интерполяции на произвольный интервал. Мы доказываем две формулы обращения, основанные на разных методах интерполяции.

Введем необходимые обозначения и установим простейшие свойства преобразований (1), (2) (обозначения заимствованы из работ [2, 3]).

Символом $S_{m,k}$ обозначим класс функций, имеющих непрерывные частные производные до k -го порядка, причем сами функции и все их производные до k -го порядка убывают на бесконечности со скоростью $O\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$. Будем говорить, что векторное поле $f = (f_1, f_2)$ принадлежит классу $S_{m,k}$, если координатные функции $f_1, f_2 \in S_{m,k}$. В частности, финитное гладкое (класса C^k) поле принадлежит $S_{m,k}$ с любым $m \geq 0$.

Для градиента функции φ и дивергенции поля $f = (f_1, f_2)$ применим обозначения

$$d\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \right), \quad (\delta f) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}.$$

По аналогии введем операторы ортогонального градиента $d^\perp$ и ортогональной дивергенции $\delta^\perp$:

$$d^\perp \varphi = \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right), \quad \delta^\perp f = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}.$$

Векторное поле f называется потенциальным, если существует функция φ (потенциал), такая, что $f = d\varphi$. Поле g называется соленоидальным, если $\delta f = 0$. Для всякого соленоидального векторного поля g также существует функция ψ , такая, что $g = d^\perp \psi$.

Сформулируем некоторые свойства потенциалов и преобразований (1), (2) векторных полей с компонентами из пространства $S_{m,k}$.

Лемма 1. Для любых гладких (класса C^k , $k \geq 2$) функций φ, ψ справедливы равенства:

1. а) $\delta(d\psi) = \Delta\psi$, б) $\delta^\perp(d\psi) = 0$, в) $\delta^\perp(d^\perp\varphi) = \Delta\varphi$, г) $\delta(d^\perp\psi) = 0$.

Пусть u – потенциальное, v – соленоидальное векторные поля: $u = d\varphi$, $v = d^\perp\psi$, $\varphi, \psi \in S_{2,1}$. Тогда справедливы следующие свойства:

2. а) $(Pu)(\xi^\perp, s) = 0$, б) $(P^\perp v)(\xi, s) = 0$;

3. Поперечное лучевое преобразование поля u и продольное лучевое преобразование поля v связаны с преобразованиями Радона потенциалов ψ, φ соотношениями

$$(P^\perp u)(\xi, s) = \frac{\partial}{\partial s} R\psi(\xi, s),$$

$$(Pv)(\xi^\perp, s) = \frac{\partial}{\partial s} R\varphi(\xi, s).$$

Доказательства свойств достаточно просты и состоят в непосредственной проверке.

Разложение векторного поля на потенциальную и соленоидальную части занимает важное место в векторном и тензорном анализе и, в частности, в векторной и тензорной томографии. Прodelав выкладки п. 4.12 из книги [4] для двумерного случая, в наших обозначениях теорему об указанном разложении векторного поля на всей плоскости можно сформулировать следующим образом (см. также [2, 3]).

Теорема 2. (Гельмгольца). Любое векторное поле f из класса $S_{3,1}$, заданное во всем пространстве, может быть единственным образом (с точностью до векторной постоянной) представлено в виде суммы потенциального u и соленоидального v полей:

$$f = u + v = d\varphi + d^\perp\psi,$$

где

$$\begin{aligned}\varphi(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \delta f \cdot \ln r \, dy_1 dy_2, \\ \psi(x_1, x_2) &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \delta^\perp f \cdot \ln r \, dy_1 dy_2, \quad r = |x - y|.\end{aligned}$$

Замечание 1. Утверждение теоремы справедливо при более слабых предположениях относительно поведения на бесконечности. А именно, достаточно потребовать, чтобы $|f(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\right)$, $|\delta f(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{2+\varepsilon}}\right)$, $|\delta^\perp f(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^{2+\varepsilon}}\right)$ при $|x| \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$.

Приведем формулы обращения для компонент векторного поля в предположении, что заданы продольные и поперечные лучевые преобразования поля f . Запишем эти преобразования в форме системы уравнений

$$\begin{cases} Pf = \eta_1 \cdot Rf_1 + \eta_2 \cdot Rf_2, \\ P^\perp f = \xi_1 \cdot Rf_1 + \xi_2 \cdot Rf_2, \end{cases} \quad (3)$$

где R – преобразование Радона:

$$Rh(\xi, s) = \int_{x \cdot \xi = s} h(x) dx.$$

Разрешая эту систему относительно неизвестных $(Rf_1), (Rf_2)$, получим выражения для преобразования Радона Rf_1, Rf_2 компонент неизвестного векторного поля f через известные лучевые преобразования Pf и $P^\perp f$:

$$\begin{aligned}Rf_1 &= \eta_1 \cdot Pf + \eta_2 \cdot P^\perp f, \\ Rf_2 &= \xi_1 \cdot Pf + \xi_2 \cdot P^\perp f.\end{aligned}$$

Применяя к обеим частям полученных выражений любую из формул обращения оператора Радона, получим компоненты искомого поля.

Однако на практике бывает известно лишь одно из лучевых преобразований: продольное или поперечное. Пусть, например, известно поперечное преобразование поля f . По теореме Гельмгольца имеет место разложение $f = d\varphi + d^\perp\psi = u + v$. В силу свойства 2 леммы 1 $P^\perp(d^\perp\psi) = 0$, поэтому речь может идти о восстановлении лишь потенциальной части $u = (u_1, u_2)$ поля f . Но в силу того же свойства 2 потенциальная часть принадлежит ядру продольного лучевого преобразования: $Pu = 0$. Имеем также $P^\perp f = P^\perp u$. Получаем систему, аналогичную системе (3):

$$\begin{cases} 0 = \eta_1 \cdot Ru_1 + \eta_2 \cdot Ru_2, \\ P^\perp f = \xi_1 \cdot Ru_1 + \xi_2 \cdot Ru_2, \end{cases}$$

разрешая которую, находим

$$Ru_1 = \xi_1 \cdot P^\perp f \equiv \cos \alpha \cdot P^\perp f, \quad Ru_2 = \xi_2 \cdot P^\perp f \equiv \sin \alpha \cdot P^\perp f. \quad (4)$$

Другой способ обращения поперечного лучевого преобразования заключается в следующем. В силу теоремы 2 задача определения потенциальной части равносильна задаче восстановления функции $\delta f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$. Действительно, формула этой теоремы дает выражение потенциальной части u через дивергенцию δf . С другой стороны, в силу свойства 1 d) леммы 1

$$\delta f = \delta u + \delta v = \delta u + \delta(d^\perp \psi) = \delta u.$$

Следующая лемма сводит задачу нахождения δf к задаче обращения преобразования Радона функции δf (в [5, с. 49] аналогичное утверждение доказано для случая продольного лучевого преобразования).

Лемма 3. Преобразование $P^\perp f$ поля $f = (f_1, f_2)$ на плоскости связано с двумерным преобразованием Радона $R(\delta f)(\xi, s) = \int_{x \cdot \xi = s} (\delta f)(x) dx$ функции $\delta^\perp f$ соотношением

$$R(\delta f)(\xi, s) = \frac{\partial}{\partial s} P^\perp f(\xi, s). \quad (5).$$

Доказательство. Зафиксируем $\xi = \xi_0$ и проинтегрируем функцию $R(\delta f)(\xi, s)$ по s от s_1 до s_2 . Получится двойной интеграл от функции $\delta f(x_1, x_2)$ по полосе $\pi \subset \mathbb{R}^2$, заключенной между прямыми $l_1 = (\xi_0, s_1)$ и $l_2 = (\xi_0, s_2)$. Поэтому по формуле Грина

$$\begin{aligned} \int_{s_1}^{s_2} R(\delta f)(\xi_0, s) ds &= \iint_{\pi} \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = \int_{l_2} (-f_2(x_1, x_2) dx_1 + f_1(x_1, x_2) dx_2) - \\ &- \int_{l_1} (-f_2(x_1, x_2) dx_1 + f_1(x_1, x_2) dx_2) = P^\perp f(\xi_0, s_2) - P^\perp f(\xi_0, s_1). \end{aligned}$$

Заменяя s_2 на s , ξ_0 на ξ и беря производную по s от обеих частей, получим (5).

Лемма доказана.

Для восстановления функции δf достаточно теперь применить к функции $\frac{\partial}{\partial s} P^\perp f(\xi, s)$ любую формулу обращения преобразования Радона.

Функцией с a -ограниченным спектром, где $a > 0$, назовем функцию h одной переменной, преобразование Фурье $\tilde{h}(y)$ которой равно нулю почти всюду вне промежутка $[-a, a]$.

Следующая лемма позволяет определить функцию с ограниченным спектром на всей комплексной плоскости по заданным значениям этой функции в дополнении произвольного интервала вещественной оси.

Лемма 4 [6, 7]. Для любых положительных a и ρ функцию $h \in L_2(\mathbb{R})$ с a -ограниченным спектром, заданную вне интервала $(-\rho, \rho)$, можно интерполировать на этот интервал по формуле

$$\begin{aligned} h(\xi) &= \exp\left(a\sqrt{\rho^2 - \xi^2}\right) \int_{\rho}^{\infty} \frac{\sin(a\sqrt{z^2 - \rho^2})}{\pi(z - \xi)} h(z) dz - \\ &- \int_{-\infty}^{-\rho} \frac{\sin(a\sqrt{z^2 - \rho^2})}{\pi(z - \xi)} h(z) dz, \end{aligned} \quad (6)$$

где у квадратного корня выбрана ветвь, удовлетворяющая условию $\operatorname{Re} \sqrt{\rho^2 - \xi^2} > 0$.

Заметим, что формула (6) задает функцию h на всей комплексной плоскости.

Задача восстановления функции $\delta f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ по заданной в ограниченном угловом диапазоне функции $P^\perp f = P^\perp f(\xi, s)$ решается в следующей теореме. Через $g(\xi, \sigma)$ мы обозначаем преобразование Фурье функции $P^\perp f(\xi, s)$ по переменной s :

$$g(\xi, \sigma) = \widetilde{P^\perp f}(\xi, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} P^\perp f(\xi, s) e^{-is \cdot \sigma} ds.$$

Теорема 5. Пусть носитель поля $f \in S_{2,1}$ лежит в полосе $\{|x_1| \leq r\}$, функция $P^\perp f(\xi, s)$ задана на множестве $\mathbb{S}_I^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, где $I = (-\alpha_0, \alpha_0)$, $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$, $\mathbb{S}_I^1 = \{\xi = (\cos \alpha, \sin \alpha), \alpha \in I\}$. Тогда преобразование Фурье $\widetilde{\delta f}$ функции δf восстанавливается по формуле

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta f}(y_1, y_2) = i \exp \left(r \sqrt{K^2 y_2^2 - y_1^2} \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{-K|y_2|} \frac{\sin r \sqrt{z^2 - K^2 y_2^2}}{\pi(z - y_1)} \sigma g(\xi, \sigma) dz - \right. \\ \left. - \int_{K|y_2|}^{\infty} \frac{\sin r \sqrt{z^2 - K^2 y_2^2}}{\pi(z - y_1)} \sigma g(\xi, \sigma) dz \right), \end{aligned} \quad (7)$$

где $K = \operatorname{ctg} \alpha_0$, $\sigma = \sqrt{z^2 + y_2^2}$, $g(\xi, \sigma)$ – преобразование Фурье (по переменной s) функции $P^\perp f(\xi, s)$; у квадратного корня выбрана ветвь, у которой $\operatorname{Re} \sqrt{K^2 y_2^2 - y_1^2} > 0$.

Доказательство. Применим преобразование Фурье по переменной s к обеим частям равенства (5) и воспользуемся теоремой проекций [5, 8]:

$$\widetilde{\delta f}(\xi \sigma) = i \sigma g(\xi, \sigma).$$

Таким образом, функция $\widetilde{\delta f}(y_1, y_2)$ оказывается заданной на множестве $U_k = \{y \in \mathbb{R}^2: |y_1| \geq K y_2\}$, где $K = \operatorname{ctg} \alpha_0$. Рассмотрим прямую вида $y_2 = y_2^0$ и положим $h(y_1) = \widetilde{\delta f}(y_1, y_2^0)$. Функция $h(y_1)$ имеет r -ограниченный спектр, и ее значения известны вне интервала $(-K|y_2|, K|y_2|)$ и неизвестны на этом интервале. Для интерполяции функции h на этот интервал воспользуемся леммой 4, положив в ней $\rho = K|y_2|$. Теорема доказана.

Отметим, что подынтегральная функция g , участвующая в формуле, при каждом фиксированном y_2 оказывается определенной вне интервала $|z| < K|y_2|$.

Для решения задачи восстановления потенциальной части достаточно к функции $\widetilde{\delta f}(y_1, y_2)$, определенной в силу теоремы 5 во всем пространстве $\mathbb{C}^2$, применить обратное двумерное преобразование Фурье:

$$\delta f(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\mathbb{R}^2} \widetilde{F}(y_1, y_2) e^{i(x_1 y_1 + x_2 y_2)} dy_1 dy_2.$$

Изложенный выше метод применен в работе [7] для послойного восстановления векторного поля в трехмерном пространстве по заданному продольному лучевому преобразованию. Восстановление векторного поля по данным на комплексах прямых в трехмерном евклидовом пространстве проведено в [9] и процитированных в ней работах.

Приведем другую формулу обращения, основанную на формулах (4) и на другой интерполяционной формуле. Интерполяционная формула следующей леммы обобщает формулу Котельникова ([10]).

Лемма 6. Пусть $a > 0$, $b > 0$, $h \in L_2(\mathbb{R})$ причем $\text{supp } \tilde{h} \subset \left[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}\right]$. Тогда

$$h(z) = \frac{a}{\pi} \text{ch} \left(\frac{\pi}{a} \sqrt{b^2 - z^2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos \beta_k \left(\frac{h(a_k)}{-z + a_k} + \frac{h(-a_k)}{z + a_k} \right), \quad (8)$$

где $a_k = \left| a \cdot \left(k + \frac{1}{2} \right) + ib \right|$, $\beta_k = \arg \left(a \cdot \left(k + \frac{1}{2} \right) + ib \right)$.

Формула (8) позволяет определить функцию h на всей комплексной плоскости по заданным ее значениям на дискретном множестве точек a_k , $k \geq 0$.

Теорема 7. Пусть носитель поля $f \in S_{2,1}$ лежит в круге $\{x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$, функция $P^\perp f(\xi, s)$ задана на множестве $\mathbb{S}_I^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$, где $I = (-\alpha_0, \alpha_0)$, $0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$, $\mathbb{S}_I^1 = \{\xi = (\cos \alpha, \sin \alpha), \alpha \in I\}$. Тогда для преобразований Фурье координатных функций u_1 и u_2 потенциальной части поля f справедливы формулы:

$$\tilde{u}_1(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi r} \text{ch} \left(2\pi r \sqrt{b^2 - y_1^2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos \alpha_k \cdot \frac{\rho_k}{\sigma_k} \left(\frac{g(\xi_k, \sigma_k)}{y_1 - \rho_k} - \frac{g(\xi_k', \sigma_k)}{y_1 + \rho_k} \right),$$

$$\tilde{u}_2(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi r} \text{ch} \left(2\pi r \sqrt{b^2 - y_1^2} \right) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cos \alpha_k \cdot \frac{y_2}{\sigma_k} \left(\frac{g(\xi_k, \sigma)}{y_1 - \rho_k} + \frac{g(\xi_k', \sigma)}{y_1 + \rho_k} \right),$$

где $b = \sqrt{\rho^2 - \left(\frac{1}{4r}\right)^2}$, $\alpha_k = \arg(\rho_k + ib)$, $\rho = K|y_2|$, $k = \text{ctg } \alpha_0$, $\rho_k = \sqrt{\rho^2 + \frac{k(k+1)}{4r^2}}$, $\sigma_k = \sqrt{\rho_k^2 + y_2^2}$, $\xi_k = \left(\frac{\rho_k}{\sigma_k}, \frac{y_2}{\sigma_k}\right)$, $\xi_k' = \left(-\frac{\rho_k}{\sigma_k}, \frac{y_2}{\sigma_k}\right)$.

Доказательство. Применим к обеим частям формул (4) преобразование Фурье по переменной s и воспользуемся теоремой проекций:

$$\tilde{u}_j(\sigma\xi) = \xi_j g(\xi, \sigma), \quad j = 1, 2.$$

Положив, как и в доказательстве теоремы 5, $y = (y_1, y_2) = \sigma\xi$, мы видим, что функции $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ определены в угловом множестве $U_K = \{y \in \mathbb{R}^2: |y_1| \geq Ky_2\}$, где $K = \text{ctg } \alpha_0$. Зафиксируем $y_2 = y_2^0$ и рассмотрим функции $h_j(y_1) = \tilde{u}_j(y_1, y_2^0)$. Эти функции удовлетворяют условию леммы 6 с $a = \frac{1}{2r}$. То, что они являются функциями с ограниченным спектром, следует из «теоремы о дыре» [8, с. 39]. Формула леммы позволяет интерполировать эти функции на интервал $(-\rho, \rho)$, если положить в ней $b^2 = \rho^2 - \left(\frac{1}{4r}\right)^2$.

Замечание 2. Методы доказательств теорем 5 и 7 схожи. Тем не менее требование о финитности поля f в теореме 7 нельзя заменить более слабым требованием о сосредоточенности поля в полосе из теоремы 5. Дело в том, что в условиях теоремы 5 функция $P^\perp f$, а стало быть, и функции Ru_1 и Ru_2 , вычисленные по формулам (4), вообще говоря, не будут финитными, и мы не можем гарантировать, что функции $\tilde{u}_1$ и $\tilde{u}_2$ будут функциями с ограниченным спектром.

Литература

1. Braun H., Hauck A. Tomographic reconstruction of vector fields // IEEE Trans. Signal Proc. – 1991. – V. 39, № 2. – P. 464–471.
2. Деревцов Е.Ю. Вычислительные технологии решения задач рефракционной, векторной и тензорной томографии: дис. ... докт. ф.-м. н. – Новосибирск, 2014. – 357 с.

3. Деревцов Е.Ю., Мальцева С.В. Восстановление сингулярного носителя тензорного поля, заданного в рефрагирующей среде, по его лучевому преобразованию // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2015. – Т. 18, № 3 (63). – С. 11–25.
4. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. – М.: Высшая школа, 1966. – 252 с.
5. Гельфанд И.М., Гиндикин С.Г., Граев М.И. Избранные задачи интегральной геометрии. – М.: Добросвет, КГУ, 2012. – 236 с.
6. Palamodov V.P. Reconstructive Integral Geometry. – Tel Aviv University, 2004. – 174 с.
7. Меджидов З.Г. Восстановление векторного поля по данным его лучевого преобразования на трехмерных многообразиях прямых // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 159–166.
8. Намтереп Ф. Математические аспекты компьютерной томографии. – М.: Мир, 1990. – 286 с.
9. Меджидов З.Г. Обращение лучевого преобразования симметричного тензорного поля с источниками на кривой // Вестник ДГУ. – 2013. – Вып. 6. – С. 107–113.
10. Паламодов В.П. Интегральная геометрия и компьютерная томография. Специальный курс. – М.: Изд-во МК НМУ, 1997. – 68 с.

Поступила в редакцию 4 июля 2017 г.

UDC 517.9

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-3-85-91

**Reconstruction of a vector field from the data of the transverse ray transform
in a limited angular range in the plane**

Z.G. Medzhidov, D.A. Alipova

¹ Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; ziyaudinmedzhidov@yandex.ru;

² Dagestan Scientific Centre of RAS; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiyev st., 45

Formulas to determine the unknown vector field in the plane defined by its transverse ray transform in a limited angular range are proven. The first formula uses the integral interpolation formula for the bandlimited functions. The Fourier transform of the divergence of the unknown field is reconstructed. In the second formula, interpolation is performed on the discrete function values. The coordinate functions of the potential part of the desired field are recovering. A vector field is sought in the class of vector functions concentrated in a band, quickly decreasing at infinity and has continuous second derivatives.

Keywords: *transverse ray transform, vector field, the Radon transform, bandlimited functions.*

Received 4 July, 2017