УДК 517. 512

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-3-67-73

М.С. Алиев, Г.Й. Бру Мантч

Об определителях Вандермонда с двумя вычеркнутыми степенями

Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; aliev.mingazhudin@yandex.ru

Известно, что определитель Вандермонда по степеням x от 0 до n в $n + 1$ числах промежутка $[a, b]$ расположенных в порядке возрастания, равен произведению всевозможных положительных разностей этих чисел. При нахождении значения подобного определителя с вычеркнутыми $n - q$ степенями значение определителя Вандермонда n чисел умножается еще на q -симметричное произведение этих n чисел. В статье получены формулы, по которым вычисляются определители, в которых вычеркнуты степени α и q ($0 \leq \alpha < q \leq n, q \leq n < \infty$).

Доказательство опирается на полученные формулы, выражающие определители n -го порядка через определители $n - 1$ -го порядка. Еще доказательства упрощаются благодаря симметрии значения определителей относительно значения чисел, в которых они вычисляются.

Ключевые слова: определитель, α -симметричная сумма, Вандермонт, система степеней.

Как хорошо известно, является определителем Вандермонда

$$D^n = |1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^n|_{i=1}^{n+1} = \prod_{1 \leq j < i \leq n+1} (x_i - x_j).$$

В статье исследуются определители

$$D_{q-\alpha, q}^n = |1, x_i, \dots, x_i^{q-\alpha-1}, x_i^{q-\alpha+1}, \dots, x_i^{q-1} x_i^{q+1}, \dots, x_i^n|_{i=1}^{n-1},$$

где $1 \leq \alpha < q \leq n, q \leq n < \infty$. Положим $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1}$,

$$\mu_{k-1}^k = \prod_{i=1}^{k-1} (x_k - x_i), \mu_k = \prod_{1 \leq j < i \leq k} (x_i - x_j).$$

Исключим легко вычисляемые случаи:

$$D_{0,1}^n = |x_i^2, \dots, x_i^n|_{i=1}^{n-1} = \mu_{n-1} x_1^2 x_2^2 \dots x_{n-1}^2,$$

$$D_{0,n}^n = |x_i, x_i^2, \dots, x_i^{n-1}|_{i=1}^{n-1} = \mu_{n-1} x_1 x_2 \dots x_{n-1}, \quad (1)$$

$$D_{n-1,n}^n = |1, x_i, x_i^2, \dots, x_i^{n-2}|_{i=1}^{n-1} = \mu_{n-1},$$

при $q = n, 1 < \alpha < n - 2$ определитель вычислен в [1, с. 111],

$$D_{\alpha,n}^n = |1, x_i, \dots, x_i^{\alpha-1}, x_i^{\alpha+1}, \dots, x_i^{n-1}|_{i=1}^{n-1} = \mu_{n-1} \sum x_{i_1} x_{i_2} \dots, \quad (2)$$

где слагаемыми суммы являются $n - 1 - \alpha$ -симметричные функции $n - 1$ чисел $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. При $\alpha = 0, 0 < q \leq n = 1$

$$D_{0,q}^n = |x_i, \dots, x_i^{q-1}, x_i^{q+1}, \dots, x_i^n|_{i=1}^{n-1} = \mu_{n-1} x_1 x_2 \dots x_{n-1} \sum_{n-q} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{n-q}}. \quad (2)$$

Далее рассмотрим случай $1 \leq \alpha < q \leq n - 1$.

ЛЕММА 1.

$$D_{q-1,q}^n = \mu_{n-2}^{n-1} [x_{n-1}^2 D_{q-1,q}^{n-1} + x_{n-1} D_{q-2,q}^{n-1} + D_{q-2,q-1}^{n-1}], \quad (3)$$

при $\alpha = 1$, при $\alpha \geq 2$

$$D_{q-\alpha,q}^n = \mu_{n-2}^{n-1} [x_{n-1}^2 D_{q-\alpha,q}^{n-1} + x_{n-1} (D_{q-\alpha-1,q}^{n-1} + D_{q-\alpha,q-1}^{n-1}) + D_{q-\alpha-1,q-1}^{n-1}]. \quad (4)$$

Схему доказательства леммы проиллюстрируем в частном случае

$$D_{2,3}^6 = |1, x_i x_i^4 x_i^5 x_i^6|_{i=1}^5.$$

Для вычисления этого определителя пятую строку умножим на -1 и прибавим к каждой предыдущей строке, вынесем знак минус из всех четырех строк и разложим определитель по элементам первого столбца

$$\begin{aligned}
 D_{2,3}^6 &= (-1)^{5+1}(-1)^4\mu_4^5 \left| 1 \sum_{k=0}^3 x_5^{3-k} x_i^k \sum_{k=0}^4 x_5^{4-k} x_i^k \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 \\
 &= \left| \sum_{k=0}^3 x_5^{3-k} x_i^k \sum_{k=0}^4 x_5^{4-k} x_i^k \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 = \\
 &= x_5^3 0 + x_5^2 \left| 1 x_i \sum_{k=0}^4 x_5^{4-k} x_i^k \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 = \\
 &= x_5 \left| 1 x_i^2 \sum_{k=0}^4 x_5^{4-k} x_i^k \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 + \left| 1 x_i^3 \sum_{k=0}^4 x_5^{4-k} x_i^k \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 = \\
 &= x_5^2 \left\{ x_5^2 \left| 1 x_i x_i^2 \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 + x_5 \left| 1 x_i x_i^3 \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 \right\} + \\
 &+ x_5^2 \left\{ x_i x_i^4 \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 + x_5 \left\{ x_5^3 \left| 1 x_i^2 x_i \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 \right\} + \\
 &+ x_5 \left\{ x_5 \left| 1 x_i^2 x_i^3 \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 + \left| 1 x_i^2 x_i^4 \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 \right\} + \\
 &+ x_5^3 \left| 1 x_i^3 x_i \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 + x_5^2 \left| 1 x_i^3 x_i^2 \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 + \\
 &+ \left| 1 x_i^3 x_i^4 \sum_{k=0}^5 x_5^{5-k} x_i^k \right|_{i=1}^4 = x_5^2 \left\{ x_5^3 \left| 1 x_i x_i^4 x_i^2 \right|_{i=1}^4 \right\} + \\
 &+ x_5^2 \left\{ x_5^2 \left| 1 x_i x_i^4 x_i^3 \right|_{i=1}^4 + \left| 1 x_i x_i^4 x_i^5 \right|_{i=1}^4 \right\} + \\
 &+ x_5 \left\{ x_5^4 \left| 1 x_i^2 x_i^4 x_i \right|_{i=1}^4 + x_5^2 \left| 1 x_i^2 x_i^4 x_i^3 \right|_{i=1}^4 + \left| 1 x_i^2 x_i^4 x_i^5 \right|_{i=1}^4 \right\} + \\
 &+ x_5^4 \left| 1 x_i^3 x_i^4 x_i \right|_{i=1}^4 + x_5^3 \left| 1 x_i^3 x_i^4 x_i^2 \right|_{i=1}^4 + \left| 1 x_i^3 x_i^4 x_i^5 \right|_{i=1}^4 = \\
 &= x_5^2 D_{2,3}^5 + x_5 D_{1,3}^5 + D_{1,2}^5.
 \end{aligned}$$

Остальные слагаемые уничтожились как имеющие попарно противоположные знаки. Аналогично рассуждаем и при $\alpha \geq 2$.

ЛЕММА 2. $\frac{1}{\mu_{n-1}} D_{12}^n = \sum_1^{n-1} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{n-2}}^2 + \sum_1^{n-1} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{n-3}}^2 x_{i_{n-2}} x_{i_{n-1}}$

Доказательство проведем методом математической индукции.

$$D_{12}^3 = (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2),$$

$$D_{12}^4 = \mu_3 [\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3}].$$

Предположим, что лемма верна при $n = m - 1$

$$\frac{1}{\mu_{m-2}} D_{12}^{m-1} = \sum_1^{m-2} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{m-3}}^2 + \sum_1^{m-2} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{m-4}}^2 x_{i_{m-3}} x_{i_{m-2}}$$

$$D_{12}^m = \mu_{m-2}^{m-1} [x_{m-1}^2 D_{12}^{m-1} + x_{m-1} D_{02}^{m-1} + D_{01}^{m-1}]$$

$D_{02}^{m-1}, D_{01}^{m-1}$ после вынесения общих множителей вычисляем по формуле (2)

$$\frac{1}{\mu_{m-1}} D_{12}^m = x_{m-1}^2 [\sum_1^{m-2} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{m-3}}^2 + \sum_1^{m-2} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{m-4}}^2 x_{i_{m-3}} x_{i_{m-2}}] +$$

$$+ x_{m-1} x_1 \dots x_{m-2} \sum_1^{m-2} x_{i_1} \dots x_{i_{m-3}} + x_1^2 x_2^2 \dots x_{m-2}^2 =$$

$$= \sum_1^{m-1} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{m-2}}^2 + \sum_1^{m-1} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{m-3}}^2 x_{i_{m-2}} x_{i_{m-1}}.$$

Замечание. Для облегчения доказательства можно воспользоваться симметрией определителя $D_{q-1,q}^n$ относительно чисел $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ и проследить только за слагаемыми, содержащими x_{n-1} в формулах (3), (4). Также в процессе выкладок не обращаем внимания на μ_k . Сумму первых двух слагаемых формул (3), (4) обозначим через $D_{q,q-1}^{0n}$ и при вычислениях вместо знака равенства вставим знак $\rightarrow$.

Лемма 3. $D_{2,3}^n = \mu_{n-1} [\sum_1^{n-1} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{n-3}}^2 + \sum_1^{n-1} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{n-4}}^2 x_{i_{n-3}} x_{i_{n-2}} + 2 \sum_1^{n-1} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{n-5}}^2 x_{i_{n-4}} x_{i_{n-3}} x_{i_{n-2}} x_{i_{n-1}}]$ при $n \geq 6$.
 $D_{2,3}^4 = \mu_3 [\sum_1^3 x_i^2 + \sum_1^3 x_{i_1} x_{i_2}]$, $D_{2,3}^5 = \mu_4 [\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} + 2x_1 x_2 x_3 x_4]$.

Доказательство. Непосредственно вычисляем (1) $D_{2,3}^3 = \mu_2 \cdot 1$, $D_{1,3}^3 = \mu_2 \cdot \sum_1^2 x_i$, $D_{0,3}^3 = \mu_2 \cdot x_1 x_2$, $D_{1,2}^3 = \mu_2 \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)$,
 $D_{2,3}^{04} \rightarrow x_3^2 D_{2,3}^3 + x_3 D_{1,3}^3 \rightarrow x_3^2 + \sum_1^2 x_3 x_i$. Из-за симметрии имеем
 $D_{2,3}^4 = \mu_3 (\sum_1^3 x_i^2 + \sum_1^3 x_{i_1} x_{i_2})$. $D_{1,3}^{04} \rightarrow x_3^2 D_{1,3}^3 + x_3 (D_{0,3}^3 + D_{1,2}^3) \rightarrow x_3^2 \sum_1^2 x_i + x_3 (x_1 x_2 + x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) = \sum_1^2 x_i x_3^2 + \sum_1^2 x_i^2 x_3 + 2x_1 x_2 x_3$.
 $D_{1,3}^4 = \mu_3 (\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} + 2x_1 x_2 x_3)$. $D_{2,3}^{05} \rightarrow x_4^2 D_{2,3}^4 + x_4 D_{1,3}^4 \rightarrow$
 $\rightarrow x_4^2 (\sum_1^3 x_i^2 + \sum_1^3 x_{i_1} x_{i_2}) + x_4 (\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} + 2x_1 x_2 x_3) =$
 $= \sum_1^3 x_4^2 x_i^2 + \sum_1^3 x_4^2 x_{i_1} x_{i_2} + \sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_4 + 2x_1 x_2 x_3 x_4$.
 $D_{2,3}^5 = \mu_4 (\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} + 2x_1 x_2 x_3 x_4)$
 $D_{1,3}^{05} \rightarrow x_4^2 D_{1,3}^4 + x_4 (D_{0,3}^4 + D_{1,2}^4) \rightarrow x_4^2 (\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} + 2x_1 x_2 x_3) +$
 $+ x_4 (\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} + \sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3}) = \sum_1^3 x_4^2 x_{i_1}^2 x_{i_2} + 2x_4^2 x_1 x_2 x_3 +$
 $+ 2\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_4$. $D_{1,3}^5 = \mu_4 (\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} + 2\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4})$.

Далее с увеличением n количество сумм и коэффициент 2 не меняются, только под знаком всех сумм добавляется квадрат еще одного множителя.

Докажем этот факт методом математической индукции. В качестве предположения индукции примем значения $D_{2,3}^6$ и $D_{1,3}^6$ и подсчитаем $D_{2,3}^7$.

$D_{2,3}^{06} \rightarrow x_5^2 D_{2,3}^5 + x_5 D_{1,3}^5 \rightarrow x_5^2 (\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} + 2x_1 x_2 x_3 x_4) +$
 $+ x_5 (\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} + 2\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4})$. Отсюда имеем

$D_{2,3}^6 = \mu_5 (\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 + \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} + 2\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5})$

$D_{1,3}^{06} \rightarrow x_5^2 D_{1,3}^5 + x_5 (D_{0,3}^5 + D_{1,2}^5) \rightarrow x_5^2 (\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} + 2\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) +$
 $+ x_5 ((\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} + \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 + \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}^2))$.

$D_{1,3}^6 = \mu_5 (\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_{i_4} + 2\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5})$

$D_{2,3}^{07} \rightarrow x_6^2 D_{2,3}^6 + x_6 D_{1,3}^6 \rightarrow$

$x_6^2 (\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 + \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} + 2\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}) +$
 $+ x_6 (\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_{i_4} + 2\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}) = \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_6^2 +$
 $+ \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_6^2 x_{i_3} x_{i_4} + 2\sum_1^5 x_6^2 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} + \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_{i_4} x_6 +$
 $2\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_6$. В силу симметрии $D_{2,3}^7 =$

$= \mu_6 [\sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_{i_4}^2 + \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_{i_4} x_{i_5} + 2\sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6}]$,
 что и требовалось доказать.

Однотипные слагаемые определителя $D_{q-1,q}^n$ соберем в отдельные суммы.

Теорема 1. Число сумм в выражении $D_{q-1,q}^n$ при $q+1 \leq n \leq 2q-1$ растет от 2 до q . Числовой множитель при суммах растет от 1 при первых двух до $q-1$ при последней q -той сумме.

Доказательство. Вычисление $D_{q-1,q}^n$ по формулам (3), (4) завершается в двух случаях: индекс n уменьшается и достигает q , далее определитель вычисляется по формуле (2) или нижний индекс $q-1$ уменьшается и достигает нуля и опять по формуле (2). При $q+1 \leq n \leq 2q-1$ индекс n уменьшается и достигает q быстрее, чем $q-1$ до нуля. При $n = q+1$ число сумм равно двум, а числовые коэффициенты равны 1. Далее с увеличением n на единицу количество сумм и коэффициенты при них увеличиваются также на единицу. Максимальное число сумм достигается при $n = 2q-1$ и равно q . Для доказательства содержание лемм 2 и 3 примем как предположение индукции при $q = 3$ и докажем теорему при $q = 4$.

$$\begin{aligned}
 D_{3,4}^4 &= \mu_3 1, D_{2,4}^4 = \mu_3 \sum_1^3 x_i, D_{2,3}^4 = \mu_3 (\sum_1^3 x_i^2 + \sum_1^3 x_{i_1} x_{i_2}), \\
 D_{0,4}^4 &= \mu_3 x_1 x_2 x_3, D_{1,4}^4 = \mu_3 \sum_1^3 x_{i_1} x_{i_2}, D_{1,3}^4 = \mu_3 (\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} + 2x_1 x_2 x_3) \\
 D_{3,4}^{05} &\rightarrow x_4^2 D_{3,4}^4 + x_4 D_{2,4}^4 \rightarrow x_4^2 + x_4 \sum_1^3 x_i \\
 \frac{1}{\mu_4} D_{3,4}^5 &= \sum_1^4 x_i^2 + \sum_1^4 x_{i_1} x_{i_2}, D_{2,4}^{05} \rightarrow x_4^2 D_{2,4}^4 + x_4 (D_{1,4}^4 + D_{2,3}^4) \rightarrow x_4^2 \sum_1^3 x_i + \\
 &+ x_4 (\sum_1^3 x_{i_1} x_{i_2} + \sum_1^3 x_i^2 + \sum_1^3 x_{i_1} x_{i_2}), \frac{1}{\mu_4} D_{2,4}^5 = \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} + 2 \sum_1^4 x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \\
 D_{3,4}^{06} &\rightarrow x_5^2 D_{3,4}^5 + x_5 D_{2,4}^5 \rightarrow \\
 x_4^2 (\sum_1^4 x_i^2 + \sum_1^4 x_{i_1} x_{i_2}) &+ x_5 (\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} + 2 \sum_1^4 x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}). \frac{1}{\mu_5} D_{3,4}^6 = \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \\
 \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} &+ 2 \sum_1^5 x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}. \\
 D_{1,4}^{05} &\rightarrow x_4^2 D_{1,4}^4 + x_4 (D_{0,4}^4 + D_{1,3}^4) \\
 &\rightarrow x_4^2 \sum_1^3 x_{i_1} x_{i_2} + x_4 (x_1 x_2 x_3 + \sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} + 2x_1 x_2 x_3), \frac{1}{\mu_4} D_{1,4}^5 \\
 &= \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} + 3x_1 x_2 x_3 x_4. \\
 D_{2,4}^{06} &\rightarrow x_5^2 D_{2,4}^5 + x_5 (D_{1,4}^5 + D_{2,3}^5) \rightarrow x_5^2 (\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} + 2 \sum_1^4 x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3}) + \\
 &+ x_5 (\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} + 3x_1 x_2 x_3 x_4 + \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3}), \\
 \frac{1}{\mu_5} D_{2,4}^6 &= \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} + 2 \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} + 3x_1 x_2 x_3 x_4 x_5. \\
 D_{3,4}^{07} &\rightarrow x_6^2 D_{3,4}^6 + x_6 D_{2,4}^6 \rightarrow x_6^2 (\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} + 2 \sum_1^5 x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4}) + \\
 &+ x_6 (\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} + 2 \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} + 3x_1 x_2 x_3 x_4 x_5), \\
 \frac{1}{\mu_6} D_{3,4}^7 &= \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 + \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} + 2 \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} + \\
 &+ 3x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6.
 \end{aligned}$$

Теорема 2. $\frac{1}{\mu_{n-1}} D_{q-1,q}^n = \sum_{\gamma} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{n-q}}^2 + \sum_{\gamma} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{n-q-1}}^2 x_{i_{n-q}} x_{i_{n-q+1}} +$
 $+ 2 \sum_{\gamma} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_{n-q-2}}^2 x_{i_{n-q-1}} x_{i_{n-q}} x_{i_{n-q+1}} x_{i_{n-q+2}} + \dots +$
 $(q-1) \sum_{\gamma} x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \dots x_{i_k}^2 x_{i_{k+1}} \dots x_{i_{\gamma-2k}},$ при $n \geq 2q$, $\gamma = 2(n-q)$ – суммарная степень произведения под знаком сигма.

Докажем методом математической индукции по q и по n .

При $q = 4$ и $n = 2q - 1 = 7$ определители $D_{3,4}^7$ из теоремы 1 и $\frac{1}{\mu_6} D_{2,4}^7 = \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_{i_4} + 2 \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} + 3 \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6}$ будем считать заданными и подсчитаем $\frac{1}{\mu_7} D_{3,4}^8$.

$$D_{3,4}^{08} \rightarrow x_7^2 D_{3,4}^7 + x_7 D_{2,4}^7 \\ \rightarrow x_7^2 \left(\sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 + \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} + 2 \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} + 3 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 \right) \\ x_7 \left(\sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_{i_4} + 2 \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} + 3 \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6} \right)$$

Отсюда, пользуясь симметрией, получим $\frac{1}{\mu_7} D_{3,4}^8 = \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3}^2 x_{i_4}^2 + \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}^2 + 2 \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}^2 + 3 \sum_1^6 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5} x_{i_6}^2$. Таким образом, с увеличением n число сумм и числовые коэффициенты при них не меняются, только под знаком сумм появляется еще один x_i^2 .

Теорема 3. $\frac{1}{\mu_{n-1}} D_{q-\alpha,q}^n = \sum_{\gamma} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{n-q}}^2 x_{j_1} \dots x_{j_{\alpha-1}} + \alpha \sum_{\gamma} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{n-q-1}}^2 x_{j_1} \dots x_{j_{\alpha+1}} + (\alpha + 1) \sum_{\gamma} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{n-q-2}}^2 x_{j_1} \dots x_{j_{\alpha+3}} + \dots + (q - 1) \sum_{\gamma} x_{i_1}^2 \dots x_{i_k}^2 x_{j_1} \dots x_{i_{j_2(n-k)q} + \alpha - 1}$, при $\alpha \geq 2, \gamma = 2(n - q) + \alpha - 1$ – суммарная степень произведения под знаком суммы.

Для доказательства заметим, что после $n - q$ кратного применения формулы (3) получим первую сумму определителя $\rightarrow \sum_{\kappa} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{n-q}}^2 D_{q-\alpha,q}^q$ и после применения формулы (2) имеем $\rightarrow \sum_{\kappa} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{n-q}}^2 x_{j_1} \dots x_{j_{\alpha-1}}$.

Далее рассуждаем как при доказательстве теоремы 2.

Теорема 4. Числовой коэффициент при второй сумме в выражении $\frac{1}{\mu_{n-1}} D_{q-\alpha,q}^n$ при любом n и q равен α ($\alpha \geq 1$).

Докажем методом математической индукции. Пусть q – любое число, а $n = q + 1$.

Утверждение справедливо при $\alpha = 1$ по теореме 1. Допустим, при $\alpha = k - 1$

$$D_{q-k,q-1}^{0q} \rightarrow \sum_{\gamma} x_{i_q}^2 x_{j_1} \dots x_{j_{k-2}} + (k - 1) \sum_{\gamma} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k}. \text{ При } \alpha = k$$

$$D_{q-k,q}^{0q+1} \rightarrow x_q^2 D_{q-k,q}^q + x_q (D_{q-k-1,q}^q + D_{q-k,q-1}^q) \rightarrow \sum_{\gamma} x_{i_q}^2 x_{j_1} \dots x_{j_{k-1}} +$$

$$+ x_q \left(\sum_{\gamma} x_{j_1} \dots x_{j_k} + \sum_{\gamma} x_{q-1}^2 x_{j_1} \dots x_{j_{k-2}} + (k - 1) \sum_{\gamma} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_k} \right)$$

$$\frac{1}{\mu_q} D_{q-k,q}^{q+1} = \sum_{\gamma} x_{i_1}^2 x_{j_1} \dots x_{j_{k-1}} + k \sum_{\gamma} x_{j_1} x_{j_2} \dots x_{j_{k+1}}.$$

Теорема 5. При фиксированных q и α максимальное число сумм равно $q - \alpha + 1$, числовые коэффициенты растут от α при второй сумме до $q - 1$ при $q - \alpha + 1$ сумме. При $n \geq 2q - \alpha + 1$ число сумм и коэффициенты при них не меняются.

Для доказательства повторим ход рассуждений доказательства теоремы 1. При заданных q и α число сумм увеличивается $q, q + 1, \dots$, максимальное количество сумм получается, когда величина $n - q$ равна величине $q - \alpha - 0$, т. е. $n = 2q - \alpha$.

Примеры. Найдём значение определителей при $n = 2q - \alpha$.

$$D_{2,4}^6 = \mu_5 \left(\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 x_{j_1} + 2 \sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} + 3 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \right),$$

$$D_{1,4}^5 = \mu_4(\sum_1^4 x_{i_1}^2 x_{j_1} x_{j_2} + 3x_1 x_2 x_3 x_4),$$
$$D_{1,5}^6 = \mu_5(\sum_1^5 x_{i_1}^2 x_{j_1} x_{j_2} x_{j_3} + 4x_1 x_2 x_3 x_4 x_5).$$

Литература

1. Сега Г., Полиа Г. Задачи и теоремы из анализа Ч. 2. – М.: Наука, 1978.
2. Суетин С.П. Распределение нулей полинома Паде и аналитическое продолжение // УМН. – 2015. – Т. 70, вып. 5 (425). – С. 121–134.
3. Рахманов Е.А., Суетин С.П. Асимптотика полиномов Эрмита–Паде I рода для пары функций, образующих систему Никишина // УМН. – 2012. – Т. 67, вып. 5 (407). – С. 177–192.
4. Дубинин В.Н. Методы геометрической теории функций в классических и современных задачах для полиномов // УМН. – 2012. – Т. 67, вып. 4 (406). – С. 3–7.
5. Севастьянов Е.А., Долгобродов А.А. Нули функций в весовых пространствах со смешанной нормой // Мат. заметки. – 2013. – Т. 94, вып. 2. – С. 249–258.
6. Алиев М.С. О приближении функций слабой системой Чебышева // Вестник ДГУ. – 2011. – Вып. 6. – С. 120–123.
7. Алиев М.С. К вопросу реализации нормы одного функционала // Вестник ДГУ. – 2013. – Вып. 1. – С. 85–88.
8. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценка наилучших приближений ограниченных функций со знакочувствительным весом // Вестник ДГУ. – 2015. – Вып. 6.
9. Загиров Н.Ш., Пашаева З.Ш. Оценка значений многочленов внутри отрезка // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6.
10. Алиев М.С. Свойства полиномов по одной системе функций // Вестник ДГУ. – 2016. – Вып. 2. – С. 41–44.
11. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценка скорости сходимости сплайнов по рациональным интерполянтам через индуцированные функции // Вестник ДГУ. – 2016. – Вып. 2. – С. 35–40.

Поступила в редакцию 19 августа 2017 г.

UDC 517. 512

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-3-67-73

The Vandermonde determinants with two powers crossed out

M.S. Aliev, G.Y. Bru Mantch

Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; aliev.mingazhudin@yandex.ru

It is common knowledge that, the Vandermonde determinant in powers of x from 0 to n in $n + 1$ numbers of the interval $[a, b]$, arranged in ascending order, is equal to the product of all possible positive differences of these numbers. When the value of such a determinant is found with a crossed $n - q$ power the value of the Vandermonde determinant of n numbers is multiplied by the q -symmetric product of these n numbers. The research has obtained formulas for calculating determinants in which the degrees α and q are deleted ($0 \leq \alpha < q \leq n, q \leq n < \infty$).

The proof is based on the obtained formulas that express the determinants of the n -th order in determinants of the $n - 1$ order. The proofs are simplified due to the symmetry of the value of the determinants relative to the values of the numbers in which they are calculated.

Keywords: *determinant, α -symmetric sum, Vandermonde, system of degrees.*

Received 19 August, 2017