УДК 519.6

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-1-37-41

Н.Ш. Загиров, З.А. Дибирова**Последовательности конечного порядка и их суммирование***Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; zydi@mail.ru*

В работе изучены свойства последовательностей конечного порядка. Установлена их связь с известными циклическими последовательностями. Определяется порядок конечной последовательности. Найден метод, позволяющий находить сумму любого конечного числа членов последовательности порядка m по известным первым $m + 1$ членам этой последовательности. Тем самым в статье определен алгоритм, позволяющий находить суммы конечного порядка для любой заданной последовательности чисел.

Ключевые слова: *последовательность порядка m , суммирование последовательностей порядка m .*

1. Свойства последовательностей конечного порядка. Обозначим через π_m множество всех многочленов степени не выше m .

Последовательность x_n будем называть последовательностью порядка m , если существует $p \in \pi_m$: $p(k) = x_k$, $k = 1, 2, \dots$

Множество всех последовательностей порядка m обозначим через Π_m .

Отметим простые, легко проверяемые свойства последовательностей конечного порядка:

- 1) Π_m – линейное множество;
- 2) Если $x_n \in \pi_m$, $y_n \in \pi_k$, то $x_n \cdot y_n \in \pi_{m+k}$;
- 3) Если $x_n \in \pi_m$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^{m+1}} = 0$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Последовательность $x_n \in \pi_m$ тогда и только тогда, когда $\Delta^{m+1} x_n = 0$ для любого n .

Доказательство. Напомним (см. [3]), что конечная разность первого порядка

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x); \Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)) \text{ для } k \geq 2.$$

Аналогично для последовательностей $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$, $\Delta^k x_n = \Delta(\Delta^{k-1} x_n)$, $k \geq 2$.

Легко проверить (см. [3]), что

$$\Delta^k x_n = \sum_{i=0}^k (-1)^{i-1} C_k^i x_{n+i}. \quad (1)$$

Пусть $x_n \in \pi_m$. Тогда существует $p \in \pi_m$ такой, что $x_i = p(i)$, $i = 1, 2, \dots$

Поэтому, как следует из равенства (1), $\Delta^k x_n = \Delta^k p(n)$. Следовательно, $\Delta^{m+1} x_n = \Delta^{m+1} p(n) = 0$ для любого $n = 1, 2, \dots$

Если же выполняется условие $\Delta^{m+1} x_n = 0$ для любого n , то для последовательности x_n строим интерполяционный многочлен степени n в форме Ньютона [3]

$$L(x) = x_1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \Delta^k x_1 (x-1) \dots (x-k).$$

Если $k \geq m+1$, то $\Delta^k x_1 = 0$, поэтому $L \in \pi_m$ и $L(i) = x_i$ $i = 1, 2, \dots$

Теорема доказана.

Замечание. Если x_n – бесконечная последовательность, то невозможно проверить условие $\Delta^{m+1}x_n = 0$ для всех n . Напротив, для сколь угодно большого N можно с помощью критерия теоремы 1 узнать, имеет ли последовательность $x_1, x_2, \dots, x_N$ порядок m .

Рассмотрим пример. Пусть $x_i = i$, $i = 1, 2, \dots$. Положим для фиксированного $m \in \mathbb{N}$ и $n \in \mathbb{N}$ последовательность $S_{m,n} = \sum_{i=1}^n x_i^m = \sum_{i=1}^n i^m$ есть сумма степеней m -го порядка первых n натуральных чисел и $\sigma_{k,n} = x_1 \dots x_k + \dots + x_{n-k+1} \dots x_n$, $k = 1, \dots, n$ – сумма всех произведений по k сомножителей из $x_1 \dots x_n$. Считают $\sigma_{0,n} = 1$ при любом n . Покажем, что $S_{m,n} \in \pi_{m+1}$, $\sigma_{k,n} \in \pi_{2k}$. Первое утверждение есть следствие равенства Бернулли [3]

$$S_{m,n} = \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(0)}{m+1},$$

где $B_{m+1}(x)$ есть многочлен Бернулли степени $m+1$.

Второе утверждение будем доказывать методом математической индукции. Если $k = 1$, то $\sigma_{1,n} = x_1 \dots x_n = 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, т. е. $\sigma_{1,n} = p_2(n)$ с $p_2(x) = \frac{1}{2}x(x+1)$.

Последовательности $S_{m,n}$ и $\sigma_{k,n}$ связаны известным тождеством Ньютона:

$$S_{l,n} - \sigma_{1,n} S_{l-1,n} + \dots + (-1)^l \sigma_l = 0.$$

Пусть имеем $\sigma_{k,n} \in \pi_{2k}$.

Так как $(l = k+1)$

$$\sigma_{k+1,n} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (-1)^{k+1-i} \sigma_{i,n} S_{k+1-i,n},$$

$S_{k+1-i,n} \in \pi_{k+2-i}$ и по допущению индукции $\sigma_{i,n} \in \pi_{2i}$, то $S_{k+1-i,n} \sigma_{i,n} \in \pi_{k+2+i}$.

Следовательно, $\sigma_{k+1,n} \in \pi_{k+2+k}$.

Напомним, [7] последовательность x_n называется возвратной порядка k , если существуют такие числа $a_1, \dots, a_k$ ($a_k \neq 0$) и натуральное число m , что для всех $n \geq m$ справедливо равенство

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + \dots + a_k x_n.$$

Как показывает свойство 3, геометрическая прогрессия $x_n = q^n$ ($0 < q$, $q \neq 1$) не имеет конечный порядок, тогда как она является возвратной порядка 1 ($x_{n+1} = qx_n$). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Всякая последовательность порядка m является возвратной последовательностью порядка $m+1$.

Доказательство. Пусть $x_n \in \pi_m$. Для фиксированного n по точкам $n, n+1, \dots, n+m$ строим интерполяционный многочлен Лагранжа $L(x)$, $L \in \pi_m$,

$$L(k) = x_k, \quad k = n, \dots, n+m;$$

$$L(x) = \sum_{k=n}^{n+m} \frac{w(x)x_k}{(x-k)w'(k)}, \quad w(x) = (x-n) \dots (x-n-m).$$

$$\text{Подсчитав } w'(k), \text{ получим } L(x) = \frac{1}{m!} \sum_{k=n}^{n+m} (-1)^{m+n-k} C_m^{k-n} \frac{(x-n) \dots (x-n-m) x_k}{x-k}$$

или, положив $j = k-n$,

$$L(x) = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} C_m^j \frac{(x-n) \dots (x-n-m)}{x-n-j} x_{n+j}.$$

Так как $x_n \in \pi_m$, то $L(n+m+1) = x_{n+m+1}$. Следовательно,

$$x_{n+m+1} = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} C_m^j \frac{(m+1)!}{m+1-j} x_{n+j}.$$

Это означает, что $x_{n+m+1} = a_1 x_{n+m} + \dots + a_{m+1} x_n$, причем $a_v = (-1)^{v-1} C_m^v$ не зависит от n .

Следствие. Для любого $n \geq m + 1$ справедливо равенство

$$n^m = \sum_{v=1}^{m+1} (-1)^{v-1} C_{m+1}^v (n-v)^m. \quad (2)$$

Для доказательства положим $x_k = k^m$ и затем берем $k + m + 1 = n$.

Замечание. Для $m = 2$ формула доказана, для $m = 3$ выписана в [7].

Задача суммирования последовательностей встречается в самых различных ситуациях, [3, 7, 8].

2. Задача суммирования. Задача суммирования встречается в различных прикладных вопросах, см., например, [4, 5, 6, 8, 9, 10].

Положим для $n \geq 1$ $S_n = \sum_{k=1}^n x_k$.

В работе [7] доказано, что если x_n является возвратной последовательностью порядка k , т. е.

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + \dots + a_k x_n,$$

то S_n является также возвратной, имеет порядок $k + 1$, причем

$$S_{n+k+1} = b_1 S_{n+k} + \dots + b_{k+1} S_n, \quad (3)$$

$$b_j = a_j - a_{j-1}, j = 1, 2, \dots, k + 1$$

(Считаем $a_0 = -1, a_{k+1} = 0$).

В качестве примера рассмотрим сумму степеней $S_{m,n} = \sum_{k=1}^n k^m$.

Как отмечалось, $S_{m,n} \in \pi_{m+1}$.

Согласно теореме 2 последовательность $S_{m,n}$ является возвратной порядка $m + 2$, причем

$$S_{m,n+m+2} = \sum_{v=1}^{m+2} a_v S_{m,n+m+2-v}, a_v = (-1)^{v-1} C_{m+2}^v,$$

$$\text{т. е. } S_{m,n+m+2} = \sum_{v=1}^{m+2} (-1)^{v-1} C_{m+2}^v S_{m,n+m+2-v}.$$

С помощью (3) в [7] найдены значения S_n для некоторых возвратных последовательностей.

Для последовательностей конечного порядка S_n можно найти более простым способом.

Теорема 3. Пусть $x_n \in \pi_m$. Тогда $S_n = nx_1 + \sum_{k=1}^m C_n^{k+1} \Delta^k x_1$.

Доказательство. Пусть $x_n \in \pi_m$ и $p \in \pi_m$ такой многочлен, что $p(k) = x_k$, $k = 1, 2, \dots$. Представим p в форме Ньютона ($\Delta^0 x_1 = x_1$)

$$p(x) = \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \Delta^k x_1 (x-1) \dots (x-k).$$

Если считать $x^{(k)} = (x-1) \dots (x+k)$, то, как указано в [3], $(x+1)^{(k)} - x^{(k)} = kx^{(k-1)}$ и $\sum_{x=1}^n x^{(k)} = \frac{(n+1)^{(k+1)}}{k+1} = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)}$.

Теперь имеем $p(x) = x_1 + \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \Delta^k x_1 x^{(k)}$,

$$\begin{aligned} S_m &= \sum_{j=1}^n x_j = \sum_{x=1}^n p(x) = nx_1 + \\ \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!} \Delta^k x_1 \cdot \sum_{x=1}^n x^{(k)} &= nx_1 + \sum_{k=1}^m \frac{n!}{k!(n-k-1)!(k+1)} \Delta^k x_1 = nx_1 + \\ &\quad \sum_{k=1}^m C_n^{k+1} \Delta^k x_1. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

3. Суммирование степеней. Здесь мы разбираем способы нахождения $S_{m,n} = \sum_{k=1}^n k^m$.

Эти суммы находят с помощью чисел и многочленов Бернулли [3], но результаты носят громоздкий характер. Суммы $S_{m,n}$ можно находить с помощью рекуррентных соотношений.

Теорема 4. Справедливо равенство $S_{m,n} = \frac{(n+1)^{(m+1)} - (n+1)}{(m+1)} - \frac{1}{m+1} \sum_{j=1}^{m-1} C_{m+1}^j S_{j,n}$.

Доказательство. Из равенства $(x+1)^{m+1} - x^{m+1} = \sum_{j=0}^m C_{m+1}^j x^j$ суммированием в пределах от 1 до n получаем $(n+1)^{m+1} - 1 = \sum_{j=0}^m C_{m+1}^j \sum_{x=1}^n x^j$ или $(n+1)^{(m+1)} - 1 = n + \sum_{j=1}^m C_{m+1}^j S_{j,n}$.

Из этого равенства выводим: $(m+1) S_{m,n} = (n+1)^{m+1} - (n+1) - \sum_{j=1}^{m-1} C_{m+1}^j S_{j,n}$, что совпадает с утверждением теоремы.

В качестве примера найдем $S_{4,n} = \sum_{k=1}^n k^4$.

Сначала находим $S_{1,n}, S_{2,n}$ и $S_{3,n}$:

При $m=1$ из теоремы 4 имеем: $S_{1,n} = \frac{(n+1)^2 - (n+1)}{2} - \frac{(n+1)n}{2}$.

Далее, $S_{2,n} = \frac{(n+1)^3 - (n+1)}{3} - \frac{1}{3} 3S_{1,n} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$,

$S_{3,n} = \frac{(n+1)^4 - (n+1)}{4} - \frac{1}{4} (4S_{1,n} + 6S_{2,n}) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}$.

Теперь по этой же теореме 4 имеем:

$$S_{4,n} = \frac{(n+1)^5 - (n+1)}{5} - \frac{1}{5} (5S_{1,n} + 10S_{2,n} + 10S_{3,n}).$$

После преобразований получим:

$$S_{4,n} = \frac{(n+1)n(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Удобнее воспользоваться теоремой 3. Сначала надо вычислить $\Delta^k x_1$ для $k=1, \dots, m$.

Найдем $S_{4,n}$, т. е. $m=4$. Составим таблицу:

k	k^4	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1	1	15	50	60	24
2	16	65	110	84	
3	81	175	194		
4	256	369			
5	625				

По теореме 3 для $x_n = n^4$ имеем: $S_{4,n} = n + 15c_n^2 + 50c_n^3 + 60c_n^4 + 24c_n^5$.

После элементарных выкладок получится, что $S_{4,n} = \frac{(n+1)n(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

Литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1. – М., 2014.
2. <https://ru.wikipedia.org>.
3. Гельфонд А.Г. Исчисление конечных разностей. – М., 1967.
4. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценка скорости сходимости сплайнов по рациональным интерполянтам через индуцированные функции // Вестник ДГУ. Сер. 1. Естественные науки. – 2016. – Т. 31, вып. 2. – С. 35–39.
5. Вагабов А.И. О частичных суммах ряда чисел, обратных простым числам, с логарифмическим множителем // Вестник ДГУ. – 2016. – Вып. 6. – С. 73–76.
6. Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г. Оценка наилучших полиномиальных приближений ограниченных функций со знакочувствительным весом // Вестник ДГУ. – 2015. – Т. 30, вып. 6. – С. 105–111.
7. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. – М., 1975. – 48 с.

8. Загиров Н.Ш., Эфендиев Э.И. Вычисление одной суммы // Тр. межвузовского семинара "Актуальные вопросы математики и смежные вопросы". – Махачкала 2013. – С. 49–52.

9. Загиров Н.Ш., Ахмедова М.А., Шамхалова Т.Н. Постоянная Маркова для весовых пространств // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 75–80.

10. Загиров Н.Ш., Пашаева З.Ш. Оценка значений многочленов внутри отрезка // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 67–74.

Поступила в редакцию 29 января 2017 г.

UDC 519.6

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-1-37-41

A sequence of finite order and their summation

N.Sh. Zagirov, Z.A. Dibirowa

Dagestan State University; Russia; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiyev st., 43a; zydi@mail.ru

The article studies the properties of sequences of finite order and their connection with the known circular sequence. The order of a finite sequence is determined. A method allowing to find the sum of any finite number of members of the sequence of order m in the first $m + 1$ members of this sequence. Thus, the algorithm of finding sums of finite order for any given sequence of numbers is determined in the article.

Keywords: *sequence of order m , the summation of the sequence of the order of meters.*

Received 29 January, 2017