МАТЕМАТИКА

УДК 517.929.4 + 519.21

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-1-30-36

Р.И. Кадиев^{1, 2}, З.И. Шахбанова¹

Применение теории положительно обратимых матриц при исследовании устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений Ито

¹ Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; kadiev_r@mail.ru;

² Дагестанский научный центр РАН; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45

Работа посвящена исследованию вопросов экспоненциальной моментной устойчивости решений для систем линейных дифференциальных уравнений Ито. Вопросам устойчивости решений систем со случайными параметрами посвящено большое количество работ. В основном в этих работах исследование стохастической устойчивости проводится традиционными методами, основанными на функционалах Ляпунова–Красовского–Разумихина. Однако применять эти методы во многих случаях весьма затруднительно. Поэтому эффективные признаки устойчивости обычно удается доказывать лишь для сравнительно узких классов стохастических дифференциальных уравнений с последствием. С другой стороны, в теории устойчивости детерминированных функционально-дифференциальных уравнений высокую эффективность показал W-метод, т. е. метод преобразования исходного уравнения с помощью вспомогательного уравнения, разработанный Н.В. Азбелевым и его учениками. Целью такого преобразования является получение интегрального уравнения, для которого проще исследовать нужные свойства решений. В настоящей работе исследуются вопросы экспоненциальной моментной устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений Ито. При этом применяются принципы W-метода и теория положительно обратимых матриц. Отличие от классического W-метода состоит в том, что каждое уравнение системы преобразуется независимо от остальных, а каждая компонента решения оценивается отдельно. Такой подход позволяет получить новые результаты для систем линейных дифференциальных уравнений Ито.

Ключевые слова: *дифференциальные уравнения Ито, устойчивость решений, положительная обратимость матриц.*

Введение

Вопросам устойчивости решений систем со случайными параметрами посвящено большое количество работ. Достаточно полный их список приведен в монографиях [1, 4]. В основном в этих работах исследование стохастической устойчивости проводится традиционными методами, основанными на функционалах Ляпунова–Красовского–Разумихина. Однако применять эти методы во многих случаях весьма затруднительно. Поэтому эффективные признаки устойчивости обычно удается доказывать лишь для сравнительно узких классов стохастических дифференциальных уравнений. С другой стороны, в теории устойчивости детерминированных функционально-дифференциальных уравнений высоко эффективным оказался W-метод, т. е. метод преобразования исходного уравнения с помощью вспомогательного уравнения, разработанный Н.В. Азбелевым и его учениками [5, 8]. Целью такого преобразования является получение интегрального уравнения, для которого проще исследовать нужные свойства решений. Для стохастических функционально-дифференциальных уравнений этот метод применяется в работах [9, 15].

В настоящей работе исследуются вопросы экспоненциальной p -устойчивости ($2 \leq p < \infty$) систем линейных дифференциальных уравнений Ито. При этом применяются принципы W -метода и теория положительно обратимых матриц. Отличие от классического W -метода состоит в том, что каждое уравнение системы преобразуется независимо от остальных, а каждая компонента решения оценивается отдельно. Такой подход позволяет получить новые результаты для систем линейных дифференциальных уравнений Ито.

При исследовании вопросов экспоненциальной моментной устойчивости решений для систем линейных дифференциальных уравнений Ито использованы идеи работы [16].

Предварительные сведения и объект исследования

Пусть: $(\Omega, \mathfrak{F}, (\mathfrak{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ – стохастический базис; k^n – линейное пространство n -мерных $\mathfrak{F}_0$ -измеримых случайных величин; $B_i, i=2, \dots, m$ – скалярные независимые стандартные винеровские процессы; $1 \leq p < \infty$; E – символ математического ожидания; $\|\cdot\|$ – норма в R^n ; $\|\cdot\|$ – норма $n \times m$ -матрицы, согласованная с нормой в R^m ; μ – мера Лебега на $[0, \infty[$; $\bar{E}$ – единичная матрица размерности $n \times n$.

Пусть $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ – $m \times m$ -матрица. Матрица B называется неотрицательной, если $b_{ij} \geq 0, i, j = 1, \dots, m$, и положительной, если $b_{ij} > 0, i, j = 1, \dots, m$.

Определение 1. [17] Матрица $B = (b_{ij})_{i,j=1}^m$ называется M -матрицей, если $b_{ij} \leq 0$ при $i, j = 1, \dots, m$ и $i \neq j$ и выполнено одно из следующих условий:

- для матрицы B существует положительная обратная матрица B^{-1} ;
- диагональные миноры матрицы B положительны.

Лемма 1. [17] Матрица B является M -матрицей, если $b_{ij} \leq 0$ при $i, j = 1, \dots, m$ и $i \neq j$, а также выполнено одно из следующих условий:

- $b_{ii} \geq \sum_{j=1, j \neq i}^m |b_{ij}|, i = 1, \dots, m$;
- $b_{jj} \geq \sum_{i=1, i \neq j}^m |b_{ij}|, j = 1, \dots, m$;

– существуют положительные числа $\xi_i, i = 1, \dots, m$, такие, что $\xi_i b_{ii} \geq \sum_{j=1, j \neq i}^m \xi_j |b_{ij}|, i = 1, \dots, m$;

– существуют положительные числа $\xi_i, i = 1, \dots, m$, такие, что $\xi_j b_{jj} \geq \sum_{i=1, i \neq j}^m \xi_i |b_{ij}|, j = 1, \dots, m$.

Объектом исследований является линейная система дифференциальных уравнений Ито вида

$$dx(t) = A_1(t)x(t)dt + \sum_{j=2}^m A_j(t)x(t)dW_j(t) (t \geq 0), \quad (1)$$

$A_j, j = 0, \dots, m$ – $n \times n$ -матрицы, элементы матрицы A_1 – прогрессивно измеримые случайные процессы, траектории которых почти наверно (п. н.) локально суммируемы, элементы матриц $A_j, j = 0, \dots, m$ – прогрессивно измеримые случайные процессы, траектории которых п. н. локально суммируемы с квадратом.

Отметим, что при сделанных предположениях через любую $\mathfrak{I}_0$ -измеримую n -мерную случайную величину b проходит единственное решение. Обозначим это решение через $x(t, b)$, т. е. решение уравнения (1) такое, что $x(0, b) = b$.

Определение 2. Тривиальное решение $x(t, 0)$ уравнения (1) называют экспоненциально p -устойчивым относительно начальных данных, если при некоторых положительных постоянных $\bar{c}, \beta$ справедливо неравенство $(E|x(t, b)|^p)^{1/p} \leq \bar{c}(E|b|^p)^{1/p} \exp\{-\beta t\} (t \geq 0)$.

Лемма 2. Пусть $f(s)$ – скалярный случайный процесс, интегрируемый по винеровскому процессу $B(s)$ на отрезке $[0, t]$. Тогда справедливо неравенство

$$\left(E \left| \int_0^t f(s) dB(s) \right|^{2p} \right)^{1/2p} \leq c_p \left(E \left(\int_0^t |f(s)|^2 ds \right)^p \right)^{1/2p}, \quad (2)$$

где c_p – некоторое число, зависящее от p .

Справедливость неравенства (2) следует из неравенства 4 работы [18, с. 65], где приведено и конкретное выражение для c_p .

Лемма 3. Пусть $g(s)$ – скалярная функция на $[0, \infty]$, квадрат которой локально суммируем, $f(s)$ – скалярный случайный процесс, такой, что $\sup_{s \geq 0} (E|f(s)|^{2p})^{1/2p} < \infty$. Тогда справедливы следующие неравенства:

$$\sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t g(s) f(s) ds \right|^{2p} \right)^{1/2p} \leq \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t |g(s)| ds \right) \sup_{s \geq 0} (E|f(s)|^{2p})^{1/2p}, \quad (3)$$

$$\sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t (g(s))^2 (f(s))^2 ds \right|^p \right)^{1/2p} \leq \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t (g(s))^2 ds \right)^{1/2} \sup_{s \geq 0} (E|f(s)|^{2p})^{1/2p}. \quad (4)$$

Доказательство. Докажем только неравенство (3), т. к. неравенство (4) доказывается аналогично. Имеем

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq 0} \left(E \left| \int_0^t g(s) f(s) ds \right|^{2p} \right)^{1/2p} &\leq \sup_{t \geq 0} \left(E \left(\int_0^t |g(s)| |f(s)| ds \right)^{2p} \right)^{1/2p} \leq \\ &\sup_{t \geq 0} \left(E \left(\int_0^t |g(s)|^{(2p-1)/2p} |g(s)|^{1/2p} |f(s)| ds \right)^{2p} \right)^{1/2p} \leq \\ &\sup_{t \geq 0} \left(E \left(\left(\int_0^t |g(s)| ds \right)^{2p-1} \int_0^t |g(s)| |f(s)|^{2p} ds \right) \right)^{1/2p} \leq \\ &\sup_{t \geq 0} \left(\left(\int_0^t |g(s)| ds \right)^{2p-1} \int_0^t |g(s)| E |f(s)|^{2p} ds \right)^{1/2p} \leq \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t |g(s)| ds \right) \sup_{s \geq 0} (E|f(s)|^{2p})^{1/2p}. \end{aligned}$$

Основной результат

В дальнейшем через $a_{ij}^k(t)$ обозначим элемент матрицы $A_k(t)$, расположенный на пересечении i -той строки и j -того столбца матрицы A_k при $k=1, \dots, m$. Кроме того, будем считать, что $a_{ll}^1(t)$ – локально суммируемая скалярная функция на $[0, \infty]$ при $l=1, \dots, n$ и существуют положительные числа $\bar{a}_{ij}^k, i, j=1, \dots, n, k=1, \dots, m, a_l, l=1, \dots, n$, такие, что $|a_{ij}^k(t)| \leq \bar{a}_{ij}^k, a_{ll}^1(t) \leq -a_l (t \in [0, \infty))$ $\mu \times P$ – почти всюду при $i, j=1, \dots, n, k=1, \dots, m, l=1, \dots, n$.

Пусть C – $n \times n$ -матрица, элементы которой определены следующим образом:

$$c_{ii} = 1 - \sum_{j=2}^m \frac{c_p \bar{a}_{ii}^j}{\sqrt{2a_i}}, i=1, \dots, n, \quad c_{ij} = -\frac{\bar{a}_{ij}^1}{a_i} - \sum_{l=2}^m \frac{c_p \bar{a}_{ij}^l}{\sqrt{2a_i}}, i, j=1, \dots, n, i \neq j.$$

Теорема. Если матрица C является M -матрицей, то тривиальное решение уравнения (1) экспоненциально p -устойчиво относительно начальных данных.

Доказательство. Если в системе (1) сделаем замену $x(t) = \exp\{-\beta t\}y(t)$, где $0 < \beta < \min\{a_l, l=1, \dots, n\}$, то получим

$$dy(t) = (A_1(t) + \beta \bar{E})y(t)dt + \sum_{j=2}^m A_j(t)y(t)dB_j(t) (t \geq 0). \quad (5)$$

Пусть y_i – i -тая компонента вектора y и $\eta_i(t) = a_{ii}^1(t) + \beta$. Тогда решение системы (5), проходящее через $\mathfrak{F}_0$ -измеримую n -мерную случайную величину $b = (b_1, \dots, b_n)$, является решением системы

$$y_i(t) = \exp\left\{\int_0^t \eta_i(s)ds\right\}b_i + \sum_{l=1, l \neq i}^n \int_0^t \exp\left\{\int_s^t \eta_i(\tau)d\tau\right\}a_{il}^1(s)y_l(s)ds + \sum_{j=2}^m \sum_{l=1}^n \int_0^t \exp\left\{\int_s^t \eta_i(\tau)d\tau\right\}a_{il}^j(s)y_l(s)dB_j(s) (t \geq 0), i=1, \dots, n. \quad (6)$$

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями $\bar{y}_i = \sup_{t \geq 0} (E|y_i(t)|^{2p})^{1/2p}$ и неравенствами (2)–(4). Из системы (6) с учетом предыдущего обозначения и неравенств (2)–(4) получим

$$\bar{y}_i \leq (E|b|^{2p})^{1/2p} + \sum_{l=1, l \neq i}^n \bar{a}_{il}^1 \bar{y}_l \sup_{t \geq 0} \int_0^t \exp\left\{\int_s^t \eta_i(\tau)d\tau\right\}ds + \sum_{j=2}^m \sum_{l=1}^n c_p \bar{a}_{il}^j \bar{y}_l \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t \exp\left\{2 \int_s^t \eta_i(\tau)d\tau\right\}ds \right)^{1/2}, i=1, \dots, n. \quad (7)$$

Так как,

$$\sup_{t \geq 0} \int_0^t \exp\left\{\int_s^t \eta_i(\tau)d\tau\right\}ds = \sup_{t \geq 0} \int_0^t \exp\left\{\int_s^t \eta_i(\tau)d\tau\right\}(-\eta_i(s)) / (-\eta_i(s)) ds \leq \frac{1}{a_i - \beta}, i=1, \dots, n$$

$$\sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t \exp \left\{ 2 \int_s^t \eta_i(\tau) d\tau \right\} ds \right)^{1/2} = \sup_{t \geq 0} \left(\int_0^t \left[\exp \left\{ 2 \int_s^t \eta_i(\tau) d\tau \right\} (-2\eta_i(s)) \right] / (-2\eta_i(s)) ds \right)^{1/2} \leq$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{2(a_i - \beta)}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

то из неравенства (7) получим

$$\bar{y}_i \leq (E | b |^{2p})^{1/2p} + \sum_{l=1, l \neq i}^n \frac{\bar{a}_{il} \bar{y}_l}{a_i - \beta} + \sum_{j=2}^m \sum_{l=1}^n \frac{c_p \bar{a}_{il} \bar{y}_l}{\sqrt{2(a_i - \beta)}}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Обозначим теперь $\bar{y} = \text{col}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$, $C(\beta)$ – $n \times n$ -матрица, элементы которой определены следующим образом:

$$c_{ii}(\beta) = 1 - \sum_{j=2}^m \frac{c_p \bar{a}_{ii}}{\sqrt{2(a_i - \beta)}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$c_{ij}(\beta) = -\frac{\bar{a}_{ij}}{a_i - \beta} - \sum_{l=2}^m \frac{c_p \bar{a}_{ij}}{\sqrt{2(a_i - \beta)}}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j.$$

Тогда из оценок (8) получаем

$$C(\beta) \bar{y} \leq (E | b |^{2p})^{1/2p} \bar{E}. \quad (9)$$

Очевидно также, что $C(0) = C$. В силу условий теоремы матрица C является М-матрицей, а тогда при достаточно малых β матрица $C(\beta)$ также является М-матрицей, а значит, существует $\beta = \beta_0$, такое, что $C(\beta_0)$ положительно обратима. Тогда из неравенства (9) получаем

$$|\bar{y}| \leq K (E | b |^{2p})^{1/2p}, \quad (10)$$

где $K = \|C(\beta_0)^{-1}\|$.

Поскольку $x(t) = \exp\{-\beta t\} y(t)$ и $\sup_{t \geq 0} (E | y(t) |^{2p})^{1/2p} = |\bar{y}|$, то из неравенства (10) следует, что существуют положительные числа $\beta = \beta_0$, $\tilde{n} = K = \|\tilde{N}(\beta_0)^{-1}\|$, такие, что для решения $x(t, b)$ уравнения (1) такое, что $x(0, b) = b$ справедливо неравенство $(E | x(t, b) |^p)^{1/p} \leq \tilde{c} (E | b |^p)^{1/p} \exp\{-\beta t\} (t \geq 0)$.

Теорема доказана.

Следствия основного результата

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx(t) = A(t)x(t)dt \quad (t \geq 0), \quad (11)$$

где A – $n \times n$ -матрица, элементами которой являются локально суммируемые функции на $[0, \infty)$. Кроме того, будем считать, что существуют положительные числа $\bar{a}_{ij}, i, j = 1, \dots, n, a_l, l = 1, \dots, n$, такие, что для элементов матрицы A выполнены неравенства $|a_{ij}(t)| \leq \bar{a}_{ij}, i, j = 1, \dots, n, a_l(t) \leq -a_l, l = 1, \dots, n (t \in [0, \infty))$ $\mu \times P$ почти всюду.

Из теоремы непосредственно получим:

Следствие 1. Если матрица C , элементы которой определены следующими формулами: $c_{ii} = 1, i = 1, \dots, n$, $c_{ij} = -\frac{\bar{a}_{ij}}{a_i}, i, j = 1, \dots, n, i \neq j$, является M -матрицей, то тривиальное решение уравнения (11) экспоненциально устойчиво по Ляпунову относительно начальных данных.

Для проверки, является ли матрица C из следствия 1 M -матрицей, можно применить лемму 1. Из леммы 1 и следствия 1 получим следующее следствие.

Следствие 2. Если $a_i \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n \bar{a}_{ij}$, то тривиальное решение уравнения (11) экспоненциально устойчиво по Ляпунову относительно начальных данных.

Перейдем к рассмотрению системы дифференциальных уравнений Ито следующего вида:

$$dx(t) = Ax(t)dt + Dx(t)dB(t) (t \geq 0), \quad (12)$$

где A, D – $n \times n$ -матрицы, элементами которых являются действительные числа и $a_{ii} < 0, i = 1, \dots, n$, B – стандартный винеровский процесс. Тогда из теоремы получим:

Следствие 3. Если матрица C , элементы которой определены следующими формулами $c_{ii} = 1 - \frac{c_p |d_{ii}|}{\sqrt{2} |a_{ii}|}, i = 1, \dots, n$, $c_{ij} = -\frac{|a_{ij}|}{|a_{ii}|} - \frac{c_p |d_{ij}|}{\sqrt{2} |a_{ii}|}, i, j = 1, \dots, n, i \neq j$, является M -матрицей, то тривиальное решение уравнения (12) экспоненциально p -устойчиво относительно начальных данных.

Для проверки, является ли матрица C из следствия 3. M -матрицей, можно применить также лемму 1.

Литература

1. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1981.
2. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинате, 1989.
3. Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications / Chichester: Horwood Publishing Ltd. – 1997. – 360 p.
4. Mohammed S.-E.F. Stochastic Functional Differential Equations With Memory. Theory, Examples and Applications // Proceeding of The Sixth on Stochastic Analysis. Geilo. Norway. – 1996. – P. 1–91.
5. Азбелев Н.В., Березанский Л.М., Симонов П.М., Чистяков А.В. Устойчивость линейных систем с последействием 1 // Диф. уравнения. – 1987. – Т. 28, № 5. – С. 745–754.
6. Березанский Л.М. Развитие W-метода Н. В. Азбелева в задачах устойчивости решений линейных функционально-дифференциальных уравнений // Диф. уравнения. – 1986. – Т. 22, № 5. – С. 739–750.
7. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1991. – 280 с.
8. Berezansky L., Braverman E. On exponential dichotomy, Bohl Perron type theorems and stability of difference equations // J. Math. Anal. Appl. no 304 (2005), p. 511–530.
9. Kadiev R.I. and Ponomov A.V. Stability of stochastic functional differential equations and the W-transform // Electron J. Diff. Eqns. – 2004. – V.2004. – № 92. – P. 1–36.
10. Кадиев Р.И., Поносов А.В. Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений // Диф. уравнения. – 2007. – Т. 43. – № 7. – С. 879–885.

11. Kadiev R.I., Ponosov A.V. Exponential stability of linear stochastic differential equations with bounded delay and the W-transform // E.J. Qualitative Theory of Diff. Eq. – 2008. № 23. – P. 1–14.

12. Кадиев Р.И. Поносов А.В. Устойчивость решений линейных импульсных систем дифференциальных уравнений Ито с ограниченными запаздываниями // Диф. уравнения. – Минск. – 2010. – Т. 46, № 4. – С. 486–498.

13. Kadiev R., Ponosov A. Stability of impulsive stochastic differential linear functional equations with linear delays // J. of Abstract Differential Equations and Applications. – 2012. – V. 2, № 2. – P. 7–25.

14. Kadiev R., Ponosov A. The W-transform in stability analysis for stochastic linear functional difference equations // J. Mathem. Analysis and Appl. – 2012. – V. 389, № 2. – P. 1239–1250.

15. Кадиев Р.И. Устойчивость решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений с импульсными воздействиями по линейному приближению // Диф. уравнения. – Минск. – 2013. – Т. 49, № 8. – С. 963–970.

16. Berezansky L., Braverman E., Idels L. New Global Exponential Stability Criteria for Nonlinear Delay Differential Systems with Applications to BAM Neural Networks // Applied Mathematics and Computation. – 2014. – № 243. – P. 899–910.

17. A. Berman and R. Plemmons, Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences, Computer Science and Applied Mathematics. – New York–London: Academic Press, 1979.

18. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 19 декабря 2016 г.

UDC 517.929.4 + 519.21

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-1-30-36

The application of the positive invertible matrixes when studying solution stability in Ito linear differential equations

R.I. Kadiev^{1,2}, Z.I. Shakhbanova¹

¹ Dagestan State University; Russia; 367001, Makhachkala, M. Gadzhiyev st., 43a; kadi-ev_r@mail.ru;

² Dagestan Scientific Centre of RAS; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiyev st., 45

The work deals with the issues of the moment exponential stability of solutions for systems of linear differential Ito equations. The questions of stability of system solution with random parameters are studied in a large number of works. Basically, in these works the research of stochastic stability is conducted by conventional methods based on Lyapunov–Krasovskii–Razumikhin’s functionals. However, these methods often face serious difficulties. Therefore, the effective stability characteristics can be usually proved only in a relatively narrow class of stochastic differential equations with an aftereffect. On the other hand, in a deterministic theory of stability of functional differential equations a high efficiency was shown by *W*-method, i.e. the method of transformation of the initial equation by means of the auxiliary equation developed by N.V. Azbelev and his disciples. The purpose of this transformation is to obtain an integral equation that makes the exploration of the desired properties of the solutions much easier. In this paper, we investigate matters of moment exponential stability of linear differential Ito equations. Thus, the principles of *W*-method and the theory of positive invertible matrices are applied in the work. Difference from the classical *W*-method is that each equation of the system is converted independently of others, and each component of the solution is assessed separately. This approach allows us to obtain new results for systems of linear differential Ito equations.

Keywords: *differential Ito equation, stability of solutions, positive reversibility of matrices.*

Received 19 December, 2016