УДК 517.444

DOI: 10.21779/2542-0321-2016-31-3-41-46

О.А. Очаковская

Аналог теоремы Зальцмана на гиперболической плоскости

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; ochakovskaja@yandex.ua

Изучаются функции, заданные на подмножестве гиперболической полуплоскости и имеющие нулевые интегралы по гиперболическим кругам фиксированного радиуса. Основной результат статьи содержит условия на допустимые характеристики роста функций такого класса. В частности невыполнение этих условий означает равенство нулю таких функций. В работе используются элементы методов гармонического анализа, интегральной геометрии и теории целых функций. При проведении доказательств используются свойства специальной характеристической функции, которая возникает при проведении подобных исследований. Структура множества задания исследуемой функции существенно влияет на ее поведение. Получение главной оценки центрального результата базируется на свойствах квазианалитических классов функций. Характеристика их роста задается в оценке интеграла, заданной в терминах расходимости специального ряда.

Ключевые слова: *теорема о двух радиусах; сферические средние, гиперболическая плоскость.*

Введение. Рассмотрим явление двух радиусов, которое возникает при изучении многих классов отображений, занимающих важное место в анализе. Это явление состоит в следующем: если некоторый класс отображений характеризуется в терминах свойств, связанных с достаточно широкой совокупностью подмножеств $\mathbb{R}^n$, то во многих случаях вместо всех этих подмножеств достаточно рассматривать шары, радиусы которых выбирают из определенного двухэлементного множества положительных чисел. Исторически первыми примерами теорем о двух радиусах являются соответствующая теорема Дельсарта о характеристизации класса гармонических функций в терминах шаровых средних, а также теорема о тривиальности класса функций с нулевыми интегралами по шарам подходящих радиусов r_1 и r_2 .

Для локально суммируемой функции f , определенной на вещественном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, и некоторого множества A положительных чисел рассмотрим следующее условие

$$\int_{|x| \leq r} f(x+y) dx = 0 \quad (1)$$

для всех $r \in A$ и $y \in \mathbb{R}^n$. При специальных свойствах множества A отсюда будет следовать, что функция f нулевая. Впервые условие на радиусы r_1 и r_2 было получено в известной теореме Зальцмана. Им было доказано, что если множество A состоит из таких чисел r_1 и r_2 , что отношение $\frac{r_1}{r_2}$ не является отношением корней функции Бесселя $J_{\frac{n}{2}}$, то f будет нулевой (см. [1]). В дальнейших его исследованиях было показано (см. [2]), что указанное условие является необходимым.

Теорема о двух радиусах развивалась и уточнялась многими другими авторами, начиная с 70-х годов прошлого века. Были получены ее локальные варианты (см. [3]), а также обобщения на гиперболические и симметрические пространства (см. [4–12] и библиографию в них). Дальнейший научный интерес представляет изучение этой проблемы на различных подмножествах $\mathbf{R}^n$, поскольку характер поведения функции может существенно измениться.

В данной работе изучается гиперболический аналог уравнения (1) при $r = r_1, r_2$. А именно, вместо условия (1) рассмотрены подобные уравнения для двух функций f_1, f_2 с нулевыми средними по всем геодезическим кругам радиусов r_1 и r_2 соответственно, при этом указана асимптотическая оценка для разности $f_1 - f_2$, позволяющая сделать вывод, что $f_1 = f_2 = 0$ при подходящих r_1 и r_2 .

Формулировка и доказательство основного результата. Рассмотрим гиперболическую плоскость, реализованную в виде круга $D = \{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$ с гиперболическим расстоянием

$$d(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \ln \frac{|1 - \overline{z_1} z_2| + |z_2 - z_1|}{|1 - \overline{z_1} z_2| - |z_2 - z_1|}$$

между точками $z_1, z_2 \in D$. Пусть o – центр круга D .

Группа $SU(1,1)$ состоит из матриц вида $g = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbf{C}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$, и

действует на D посредством конформных отображений $gz = \frac{az + b}{bz + a}$, $z \in D$. Нетрудно

видеть, что для любых $z \in D$, $g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & a_1 \end{pmatrix} \in SU(1,1)$, $g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ b_2 & a_2 \end{pmatrix} \in SU(1,1)$ выпол-

нено равенство $g_1 g_2 z = g z$, где g равно произведению матриц g_1 и g_2 . Расстояние d

и мера $d\mu(z) = \frac{dx dy}{(1 - |z|^2)^2}$ инвариантны относительно $SU(1,1)$ (см. [14]).

Пусть $r > 0$, $z \in D$. Положим $K_r(z) = \{w \in D : d(z, w) \leq r\}$. Множество $K_r(z)$ называется *геодезическим кругом* радиуса r с центром в точке z .

Рассмотрим некоторые важные подгруппы группы $SU(1,1)$. Пусть

$$A = \left\{ a_t = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R}^1 \right\}, N = \left\{ n_s = \begin{pmatrix} 1 + is & -is \\ is & 1 - is \end{pmatrix}, s \in \mathbf{R}^1 \right\}.$$

Орбитами группы A являются дуги окружностей, проходящих через точки -1 и 1 , содержащиеся в круге D . Орбитами группы N являются орициклы, т. е. окружности, содержащиеся в D и касающиеся границы D в точке $z = 1$. Отметим следующие соотношения:

$$a_{t+\tau} = a_t a_\tau \text{ для любых } t, \tau \in \mathbf{R}^1;$$

$$n_s a_t = a_t n_{se^{-2t}} \text{ для любых } t, s \in \mathbf{R}^1.$$

Из определений A и d видно, что $d(o, a_t o) = d(o, tht) = t$ при всех $t \in \mathbf{R}^1$.

Кроме того, всякое $z \in D$ имеет вид

$$z = n_s a_t o,$$

где числа $s, t \in \mathbf{R}^1$ определяются однозначно и имеет место равенство

$$z = \frac{sh t - i s e^{-t}}{ch t - i s e^{-t}}. \quad (2)$$

Вычисления показывают, что элемент длины орицикла $z = n_s a_t o$ (t – фиксировано, $s \in \mathbb{R}^1$) имеет вид

$$\frac{|dz|}{1-|z|^2} = e^{-2t} ds. \quad (3)$$

Для гиперболической меры получается следующее выражение

$$d\mu(z) = e^{-2t} ds dt.$$

Для любого $z = n_s a_t o \in \mathbb{D}$ мы положим $\langle z, 1 \rangle = t$. Аналогом полуплоскости в гиперболическом случае является множество

$$H_\alpha = \{z = n_s a_t o : \langle z, 1 \rangle > \alpha, s \in \mathbb{R}^1\},$$

где $\alpha \in \mathbb{R}^1$. Мы также положим $H_{-\infty} = \mathbb{D}$.

Пусть $r > 0$, $z \in \mathbb{C}$ и

$$\Phi_r(z) = 2chr \int_{-r}^r e^{-izt} \sqrt{th^2 r ch^2 t - sh^2 t} dt.$$

Тогда функция Φ_r имеет бесконечно много нулей. Все нули функции Φ_r являются вещественными, простыми и расположены симметрично относительно точки $z = 0$ (см. [4]). Положим $N(r) = \{z > 0 : \Phi_r(z) = 0\}$. Для $t \in \mathbb{R}^1$ обозначим $\Gamma_t = \{z = n_s a_t o \in \mathbb{D} : s \in \mathbb{R}^1\}$.

Теорема. Пусть $\alpha \in [-\infty; +\infty)$, $r_1, r_2 > 0$ фиксированы и $N(r_1) \cap N(r_2) = \emptyset$. Пусть также $f_1, f_2 \in C(H_\alpha)$ и

$$\int_{K_{r_1}(z)} f_1(\xi) d\mu(\xi) = \int_{K_{r_2}(z)} f_2(\xi) d\mu(\xi) = 0 \text{ для всех } K_{r_1}(z) \subset H_\alpha, K_{r_2}(z) \subset H_\alpha.$$

Тогда, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$f_1(z) - f_2(z) = O\left(e^{-\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-|z|}}}\right) \text{ при } z \rightarrow 1, z \in \mathbb{D}. \quad (4)$$

то $f_1 = f_2 = 0$.

Для доказательства потребуются следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $\alpha \in [-\infty; +\infty)$ – фиксировано, $f \in C(H_\alpha)$ и для любых $t > \alpha$, $s \in \mathbb{R}^1$

$$|f(n_s a_t o)| \leq C_1 e^{-C_2 |s|}, \quad (5)$$

где положительные постоянные C_1, C_2 не зависят от s (но могут зависеть от t, α, f). Тогда для любого $k \in \mathbb{Z}_+$ и всех $t \in \alpha$ выполнено условие

$$M_k(t) = \int_{\Gamma_t} \frac{|f(\zeta)| \cdot |d\zeta|}{(1-|\zeta|^2)^{k+1}} < \infty$$

и, кроме того,

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\inf_{q \geq m} (M_q(t))^{1/q}} = \infty.$$

Доказательство. Учитывая оценку (5), из формулы (3) для любого $t > \alpha$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} \frac{|f(\zeta)| |d\zeta|}{(1-|\zeta|^2)^{\frac{k}{2}+1}} &= \int_{\mathbb{R}^1} |f(n_s a_t o)| e^{-2t} (\text{ch}^2 t + s^2 e^{-2t})^{\frac{k}{2}} ds \leq \\ &\leq C_1 e^{-2t} (\text{ch} t)^k \int_{\mathbb{R}^1} e^{-C_2 |s|} (1+s^2)^{\frac{k}{2}} ds. \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^1} e^{-C_2 |s|} (1+s^2)^{\frac{k}{2}} ds &\leq \int_{\mathbb{R}^1} e^{-C_2 |s|} (1+|s|)^k ds \leq \\ &\leq \int_{-1}^1 e^{-C_2 |s|} (1+|s|)^k ds + \left(\int_{|s| \geq 1} e^{-C_2 |s|} |s|^k ds \right) 2^k. \end{aligned} \quad (7)$$

Интеграл в скобках не превосходит выражения

$$2 \int_0^\infty e^{-C_2 s} s^k ds = \frac{2}{C_2^{k+1}} \Gamma(k+1) \leq \frac{2k^k}{C_2^k}.$$

Отсюда и из (6), (7) получаем утверждение леммы 1.

Лемма 2. Пусть $\eta \in [-\infty, +\infty)$ – фиксировано, $f \in C(H_\eta)$ и для любых $t > \eta$, $s \in \mathbb{R}^1$

$$|f(n_s a_t o)| \leq C e^{-\alpha(t)(t-\ln(\beta(t)))} e^{-\beta(t)|s|}, \quad (8)$$

где $C > 0$ не зависит от s , t , и непрерывные положительные функции $\alpha, \beta \in C(\eta, +\infty)$ таковы, что $\alpha(t) \rightarrow +\infty$ и $\beta(t) = O(1)$ при $t \rightarrow +\infty$. Тогда для любых $\nu > \eta$, $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \iint_{H_\nu \setminus H_T} \frac{|f(\zeta)| e^{(k+1)\langle \zeta, 1 \rangle}}{(1-|\zeta|^2)^{k/2}} d\mu(\zeta) = 0. \quad (9)$$

Доказательство. Используя равенство (2) для любых $T > \nu > \eta$, $k \in \mathbb{Z}_+$, находим

$$\begin{aligned} &\iint_{H_\nu \setminus H_T} \frac{|f(\zeta)| e^{(k+1)\langle \zeta, 1 \rangle}}{(1-|\zeta|^2)^{k/2}} d\mu(\zeta) = \\ &= \int_\nu^T e^{(k-1)t} \int_{\mathbb{R}^1} |f(n_s a_t o)| (\text{ch}^2 t + s^2 e^{-2t})^{\frac{k}{2}} ds dt. \end{aligned} \quad (10)$$

Из (8) заключаем, что правая часть в (10) не превосходит выражения

$$C \int_\nu^T e^{(k-1)t} (\text{ch} t)^k \int_{\mathbb{R}^1} (1+s^2)^{\frac{k}{2}} e^{-\alpha(t)(t-\ln(\beta(t)))} e^{-\beta(t)|s|} ds dt.$$

Повторяя рассуждения из доказательства леммы 1 (см. (7)) и используя ограниченность $\beta(t)$, получаем, что это выражение оценивается сверху величиной

$$C \int_\nu^T e^{(k-1)t} (\text{ch} t)^k e^{-\alpha(t)(t-\ln(\beta(t)))} \left(1 + \frac{2k^k}{(\beta(t))^k} \right) 2^k dt \leq$$

$$\leq C_1 \int_v^T e^{2kt} (\beta(t))^{-k} e^{-\alpha(t)t} e^{\alpha(t)\ln(\beta(t))} dt, \quad (11)$$

где $C_1 > 0$ не зависит от T . Поскольку $\alpha(t) \rightarrow +\infty$, имеем $e^{2kt} (\beta(t))^{-k} e^{-\alpha(t)t} e^{\alpha(t)\ln(\beta(t))} \leq e^{\frac{1}{2}\alpha(t)t}$ при всех достаточно больших t . Отсюда и из (10), (11) получаем (9). Лемма 2 доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Для любого $\zeta \in H_{\alpha+r_2}$ положим

$$f(\zeta) = \int_{K_{r_2}(\zeta)} u(z) d\mu(z),$$

где $u = f_1 - f_2$. Тогда f удовлетворяет оценке (4) и имеет нулевые интегралы по всем $K_{r_1}(z) \subset H_{\alpha+r_2}$ (см. [13]). Из (2) следует, что для некоторого $\varepsilon > 0$

$$f(n_s a_t o) = O\left(e^{-\frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-|z|}}} e^{-\frac{\varepsilon|s|}{2e^t}}\right) \text{ при } z \rightarrow 1, z \in D. \quad (12)$$

Далее, используя геометрически очевидное при $t > 0$ неравенство

$$|z| = |n_s a_t o| \geq |a_t o| = \text{th } t,$$

имеем

$$\frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-|z|}} \geq \frac{\varepsilon}{2\sqrt{1-|z|^2}} \geq \frac{\varepsilon \text{sh } t}{2}, \text{ при } t > 0. \quad (13)$$

Пусть теперь

$$\alpha(t) = \frac{\varepsilon \text{sh } t}{2\left(t - \ln \frac{\varepsilon}{2}\right)} \text{ при } t > \max\{\eta, \varepsilon\}.$$

Если $\varepsilon > \eta$, то для $t \in (\alpha, \varepsilon)$ положим

$$\alpha(t) = \frac{\varepsilon \text{sh } \varepsilon}{2\left(\varepsilon - \ln \frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

Пусть также $\beta(t) = \frac{\varepsilon}{2e^t}$ при $t > \eta$. Тогда из оценок (12), (13) следует неравенство (8) с указанными функциями $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и постоянной $C > 0$, не зависящей от s , t . Из лемм 1, 2 имеем $f = 0$ (см. [13]). Тогда, как и выше, $f_1 = f_2$. По теореме о двух радиусах [4] $f_1 = f_2 = 0$, и теорема доказана.

Заключение. Итак, получены достаточные условия существования ненулевых функций с нулевыми интегралами по гиперболическим кругам фиксированного радиуса. При этом функция задана на множестве, которое является неким аналогом гиперболической полуплоскости. Указанное условие получено в виде допустимой скорости убывания разности таких функций. Доказано, что эта разность имеет экспоненциальное убывание при подходе к границе круга. Есть предположение, что условие (4) является точным.

Литература

1. Zalcman L. Analyticity and the Pompeiu problem // Arch. Rat. Anal. Mech. – 1972. – V. 47. – P. 237–254.

2. Berenstein C.A. and Zalcman L. Pompeiu's problem on symmetric spaces // Comment. Math. Helv. – 1980. – V. 55. – P. 593–621.
3. Berenstein C.A. and Gay R. A local version of the two-circles theorem // Israel J. Math. – 1986. – V. 55. – P. 267–288.
4. Волчков В.В. Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах на гиперболических пространствах // Известия РАН. – 2001. – Т. 65, № 2. – С. 3–26.
5. Волчков В.В. Теоремы о шаровых средних на симметрических пространствах // Матем. сборник. – 2001. – Т. 192, – № 9. – С. 17–38.
6. Dalmasso R., Picardello M.A. The 2-circle and 2-disk problem on trees // Israel J. Math. – 1988. – V. 64. – P. 73–86.
7. Volchkov V.V. Integral Geometry and Convolution Equations // Kluwer Academic Publishers. – Dordrecht–Boston–London, 2003. – 454 p.
8. Волчков В.В., Волчков Вит.В. Локальные теоремы о двух радиусах на многомерной сфере // Изв. РАН. Сер. Математика. – 2014. – Т. 78, № 1. – С. 3–24.
9. Volchkov V.V., Volchkov Vit.V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces, Birkhauser-Springer. – Basel–Heidelberg–New York–Dordrecht–London, 2013. – 592 p.
10. Волчков В.В., Волчков Вит.В. Спектральный анализ на группе конформных автоморфизмов единичного круга // Мат. сб. – 2016. – Т. 207, № 7. – С. 57–80.
11. Волчков В.В., Волчков Вит.В. Сферические средние на двухточечно-однородных пространствах и их приложения // Изв. РАН. Сер. Математика – 2013. – Т. 77, № 2. – С. 3–34.
12. Трофименко О.Д. Теорема о двух радиусах для решений некоторых уравнений средних значений // Мат. Студії. – 2013. – Т. 40, № 2. – С. 137–143.
13. Очаковская О.А. Отображения со свойством сохранения гиперболической меры // Вестник ДонНУ. Сер. «А» Природничі науки. – 2003. – Вип. 1. – С. 365–367.
14. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987.
15. Корнев Б.Г. Введение в теорию бесселевых функций. – М.: Наука, 1971.

Поступила в редакцию 4 сентября 2016 г.

UDC 517.444

DOI: 10.21779/2542-0321- 2016-31-3-41-46

Hyperbolic analogue of Saltzman theorem

O.A. Ochakovskaya

Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiyev st., 43a; ochakovskaja@yandex.ua

Functions defined on subset of hyperbolic half-plane with zero integrals over hyperbolic circles of fixed radius are studied. The paper reveals conditions on the admissible growth functions of such classes. In particular, failing these conditions means that each of the functions is equal to zero. The methods of harmonic analysis, integral geometry, and entire functions are used in the paper. The properties of the special characteristic function are used for the proof. It appears along the similar investigations. The special construction of domain function significantly affects its behavior. Some properties of quasianalytic functions are the base of the main estimate. The growth characterization is defined by the estimation of the integral, given in terms of the special row.

Keywords: *two radii theorem, spherical means, hyperbolic plane.*

Received 4 September, 2016