Квантовый размерный эффект и квантовое туннелирование с диссипацией как основа представлений современной наноэлектроники. Часть II. Квантовое туннелирование с диссипацией

В. Д. Кревчик

Пензенский государственный университет, Россия, 440026 г. Пенза, ул. Красная, 40

П. В. Кревчик

Пензенский государственный университет, Россия, 440026 г. Пенза, ул. Красная, 40

М. Б. Семенов

Пензенский государственный университет, Россия, 440026 г. Пенза, ул. Красная, 40

Аннотация. Исследование движения квантовой частицы, взаимодействующей с термостатом, является одной из важных проблем современной теоретической физики. Интерес к дальнейшему развитию науки о квантовом туннелировании с диссипацией возродился в последнее время в связи с активизацией исследований туннельно-связанных мезоскопических систем, которые, в частности, можно рассматривать как реактивные молекулярные комплексы. При этом существенным оказывается тот факт, что в искусственных, доступных современным нанотехнологиям структурах с квантовыми точками и квантовыми молекулами возможно наличие нетривиальных нелинейных квантовых эффектов (типа бифуркаций, изломов и т.д.), которые в отличие от «естественных» химических реакций являются устойчивыми. Актуальность дальнейшего развития науки о диссипативном туннелировании применительно к структурам с квантовыми точками, несмотря на использование квазиклассических (инстантонных) подходов, связана с возможностью получения основных результатов в аналитической форме, что в других часто используемых подходах, при необходимости учитывать принципиально важное влияние среды-термостата на процесс туннельного переноса, не представляется возможным. Таким образом, изучение квантовых эффектов, связанных с диссипативной туннельной динамикой в системах с квантовыми точками является актуальной проблемой современной физики конденсированного состояния. Вторая часть обзора посвящена вопросам, связанным с формированием науки о квантовом туннелировании с диссипацией.

Ключевые слова: туннельный эффект, квантовое туннелирование с диссипацией, метод инстантонов.

Под туннельным эффектом в физике понимается возможность подбарьерного прохождения микрообъекта. Классическая частица, полная механическая энергия которой меньше высоты потенциального барьера, не сможет оказаться справа от барьера, если не получает дополнительную энергию извне (рис. 2.1).

Область под барьером в этом случае принято называть классически запрещенной. Для квантовой частицы этот барьер снимается соотношением неопределенностей $\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$. До встречи с потенциальным барьером квантовая частица могла сколь угодно долго находиться в состоянии свободного движения, а значит, в состоянии с определенной энергией (см. Тарасов Л. В. Основы квантовой механики : учеб. пособие для вузов. – М. : Высш. шк., 1978. – 287 с.).

Рис. 2.1. Классически запрещенная область потенциального барьера

При взаимодействии квантовой частицы с барьером (или теми объектами, которые сформировали потенциальный барьер) время этого взаимодействия оказывается конечным Δt . В соответствии с соотношением неопределенности энергия квантовой частицы уже не будет определенной, а будет характеризоваться неравенством $\Delta E \geq \hbar / \Delta t$. Если эта неопределенность будет порядка или больше высоты потенциального барьера, то квантовая частица с некоторой вероятностью окажется справа от барьера, т.е. «протуннелирует» (рис. 2.2).

Рис. 2.2. Процесс туннелирования с позиций соотношения неопределенностей

Соответствующий эффект в литературе получил название туннельного. Этим эффектом, в частности, впервые объяснили явление α -распада атомных ядер.

2.1. Макроскопическое квантовое туннелирование с диссипацией

При исследовании низкоразмерных и низкотемпературных мезоскопических систем различной природы (а также предмезоскопических) вполне продуктивной может оказаться наука о квантовом туннелировании с диссипацией. Другими словами, речь пойдет об исследовании движения квантовой частицы, взаимодействующей с термостатом, что является одной из важных проблем современной теоретической физики [1–56]. Интерес к такому исследованию в значительной степени связан с изучением туннельных сверхпроводящих контактов при низких температурах, с решением проблемы квантового туннелирования с диссипацией в кристаллах, с изучением скорости ряда химических реакций при низких температурах, а также, по-видимому, с исследованием полупроводниковых наноструктур, которые в их мезоскопической реализации представляют собой квантовые ямы, нити и точки [1–56]. Этим и ряду других интересных приложений теории макроскопического квантового туннелирования с диссипацией посвящены многочисленные работы, обзоры и монографии [1]. Поскольку контакты Джозефсона оказались удобными для экспериментального наблюдения макроскопического квантового туннелирования (так как в них из независимых экспериментов можно найти высоту потенциального барьера и коэффициент вязкости η среды-термостата), впервые именно для описания затухания метастабильного токового состояния в этих контактах теория квантового туннелирования с диссипацией и была развита [1–56]. Другим примером коллективного квантового туннелирования является деление атомных ядер. Роль коллективной координаты q в этом случае играет квадрупольный момент ядра или его форма, а роль термостата – одноклонные возбуждения. Отдельным интересным приложением развитой теории о квантовом туннелировании с диссипацией может быть описание температурной зависимости скорости ряда химических реакций, идущих по туннельному механизму [1].

Специального обсуждения требуют перспективы использования настоящей науки в описании динамики частиц в полупроводниковых наноструктурах [1], т.е. перспектива возможного представления этих структур как туннельных систем с диссипацией. Со времени открытия эффекта Джо-

зефсона разрабатывается также наука о слабой сверхпроводимости в одиночном контакте, системе контактов, сужении, тонкой проволоке, очень тонкой пленке и других объектах пониженной размерности – все то, что позже нашло обширные применения в мезоскопии [3]. Возникла также потребность в понимании особенностей макроскопических квантовых эффектов (дискуссии по проблемам терминологии в этой связи продолжают по сей день). Достаточно наглядно эта проблема обсуждается в обзоре К. К. Лихарева по «реально-квантовым» («вторичным») макроскопическим эффектам в случае слабой сверхпроводимости [6].

Утверждается, что с момента становления квантовой механики неоднократно обсуждался вопрос о возможности наблюдения квантового поведения макроскопических тел. При этом речь обычно идет о динамике какой-либо одной из огромного числа степеней свободы макротела. В качестве примера в [6] рассматривался плоский физический маятник – твердое тело с закрепленной горизонтальной осью (не проходящей через центр масс) в поле силы тяжести. Механическое движение маятника как целого характеризуется обобщенной координатой φ – углом отклонения от положения равновесия, и соответствующим обобщенным импульсом – моментом импульса M . Хотя движение микрочастиц, составляющих данное тело, может быть существенно квантовым, а φ является функцией координат этих частиц, в обычных условиях изменение φ во времени может быть достаточно точно описано классической механикой. Тем не менее в некоторых условиях может стать необходимым учет квантовых эффектов и в динамике этой степени свободы. Действительно, как следует из соотношения коммутации для операторов сопряженных переменных $\cos \varphi$ ($\sin \varphi$) и M_z

$$[\sin \varphi, M_z] = i\hbar \cos \varphi; \quad [\cos \varphi, M_z] = -i\hbar \sin \varphi, \quad (2.1)$$

причем эти величины никогда не могут быть точно определены одновременно. В силу этого центр масс маятника даже при $T=0$ не может находиться в состоянии покоя ($\varphi=0, M=0$). На другом языке, кроме тепловых флуктуаций, центр масс имеет и флуктуации квантовой природы. Само существование подобных квантовых эффектов в макроскопических системах уже давно воспринимается большинством физиков как должное, несмотря на отсутствие их прямых наблюдений до экспериментов [6] со сверхпроводящими туннельными переходами, проведенных в течение 1981 г., когда удалось уверенно наблюдать квантовомеханическое поведение одной из степеней свободы макроскопической системы. Тем не менее вопрос об адекватном описании таких явлений вызвал значительные дискуссии. Суть дискуссии можно сформулировать следующим образом: достаточно ли совершить обычное квантование движения по данной степени свободы, не обращая внимания на наличие в макротеле огромного числа других («внутренних») мод. Так, в примере с маятником, достаточно ли использовать обычную функцию Гамильтона

$$H = \frac{M^2}{2J} + E_C(1 - \cos \varphi), \quad (2.2)$$

(где E_C – амплитуда потенциальной энергии; J – момент инерции), считая $\cos \varphi$ ($\sin \varphi$) и M_z операторами (2.1). Истоки сомнений в этом лежат в двух основных отличиях макросистем от микросистем:

- 1) параметры макросистемы (например, E_C и J) являются средними по движению составляющих микрочастиц;
- 2) выделенная степень свободы может иметь связь с внутренними модами, приводящую, например, к эффектам затухания (трения, диссипации).

Эксперименты [6] дали положительный ответ на поставленный выше вопрос. Они подтвердили, что в пределе пренебрежимо малого затухания адекватное описание квантовой динамики макротел дается непосредственным квантованием классических уравнений движения именно данной степени свободы, а если затухание является существенным, оно может быть правильно описано существующими методами квантовой статистики. Проведение экспериментов стало возможным благодаря использованию уникальных объектов – сверхпроводящих туннельных переходов. Использование явления сверхпроводимости, однако, создало некоторые трудности в интерпретации экспериментов и даже возможность путаницы.

Рассмотрим два типа квантовых макроскопических эффектов в сверхпроводимости. Кроме рассматриваемых реально-квантовых (вторичных) макроскопических эффектов, в сверхпроводимости, как известно с начала 60-х гг., имеют место и другие эффекты, обычно называемые либо квантовыми

макроскопическими, либо когерентными (первичными). Наиболее известными из когерентных явлений в сверхпроводниках являются квантование магнитного потока и эффект Джозефсона [2]. Суть этих эффектов состоит в том, что некоторые макроскопические величины, характеризующие сверхпроводящие системы, оказываются связанными друг с другом соотношениями, которые вытекают из основ квантовой механики и в явном виде содержат постоянную Планка. Так, например, электрический ток I через слабый контакт двух сверхпроводников (джозефсоновский переход) содержит специфическую компоненту – сверхток I_S , который в простейшем случае является периодической функцией типа

$$I_S = I_C \sin \varphi, \quad \varphi = \chi_1 - \chi_2, \quad (2.3a)$$

от разности фаз $\chi_{1,2}$ волновых функций $\psi_{1,2}$, описывающих состояние конденсата куперовских пар контактирующих сверхпроводников. При этом φ зависит от напряжения V на переходе по закону

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2e}{\hbar} V, \quad (2.3b)$$

прямо следующему из уравнения Шредингера [6].

В реальных джозефсоновских переходах наблюдаются значительные отклонения от соотношения (2.3a); кроме этого, ток I может содержать ряд других компонент. Более того, необычная зависимость (2.3a) тока от электромагнитного поля обуславливает весьма сложную и специфическую электродинамику джозефсоновских переходов и содержащих их структур. Но практически для всех случаев приведенный выше принцип описания когерентных эффектов оказался вполне достаточным. Все величины, относящиеся к данной степени свободы ($\varphi, V, I, Q = \int I dt$ и т.п.), могут одновременно иметь точные значения. Иначе говоря, несмотря на «квантовость» соотношений (2.3), входящие в них величины фактически являются классическими переменными, и в этом смысле когерентные эффекты можно считать классическими. Последнее утверждение становится еще очевиднее, если переписать формулы (2.3) в энергетическом виде: наличие у перехода сверхтока I_S эквивалентно наличию у него дополнительной энергии связи

$$U_i = E_C(1 - \cos \varphi) + \text{const}, \quad E_C = \frac{\hbar}{2e} I_C. \quad (2.4)$$

Убедиться в этом легко, вычисляя ΔU_i как сумму от элементарных работ $I_S V dt$ при медленном изменении фазы

$$\Delta U_i = \int_1^2 I_S V dt = \frac{\hbar}{2e} \int_1^2 I_S d\varphi = -\frac{\hbar}{2e} I_C [\cos \varphi]_1^2.$$

Таким образом, когерентные эффекты лишь создают дополнительную «потенциальную» энергию $U_i(\varphi)$ для движения системы вдоль координаты φ , но само это движение может носить вполне классический характер.

Подводя итог, можно сказать, что когерентные (первичные) квантовые эффекты суть не что иное, как квантовое когерентное движение микрочастиц (например, куперовских пар в сверхпроводнике). В то же время «реально-квантовые» (вторичные) эффекты представляют собой квантовое движение макрообъекта в целом. Легетт [1, 6] ввел количественный критерий для различия этих эффектов. Естественно, возникает вопрос о возможности сосуществования этих двух типов квантовых эффектов в одной системе, например, в джозефсоновских переходах. Несмотря на то, что возможность малых квантовых флуктуаций в таких переходах обсуждалась довольно давно, только последние работы принесли достаточно ясное понимание условий проявления реально-квантовых (вторичных) макроскопических эффектов в сверхпроводимости. Рассматривается в качестве примера [6] одиночный джозефсоновский переход. Учитывая в нем, кроме «потенциальной» энергии (2.4), еще и «кинетическую» энергию электрического поля

$$T = \frac{Q^2}{2C} = \frac{M^2}{2J}, \quad J = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C, \quad (2.5)$$

где C – емкость перехода; для функции Гамильтона мы снова приходим к выражению (2.2), где роль углового момента M теперь играет величина

$$M = J\dot{\Phi} = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 C\dot{\Phi} = \frac{Q\hbar}{2e}, \quad (2.6)$$

пропорциональная разбалансу Q электрических зарядов сверхпроводников, образующих джозефсоновский переход. Из аналогии свойств рассматриваемой системы хорошо изученным свойствам плоского маятника следует, что ее квантовые свойства ясно проявляются, когда энергия основного состояния становится сравнимой с характерной энергией E_C и, с другой стороны, больше маскирующей тепловой энергии $k_B T$:

$$\hbar\omega \geq kT, \quad aE_C, \quad (2.7)$$

где a – некоторый коэффициент порядка 1; здесь ω – классическая частота малых колебаний системы вблизи положения равновесия $\Phi = \Phi_0$:

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \quad k = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \Phi^2} \right|_{\Phi=\Phi_0}, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial \Phi} \right|_{\Phi=\Phi_0} = 0 \quad (2.8)$$

(в данном случае $\Phi_0 = 0$). В теории эффекта Джозефсона эта частота обычно называется плазменной. Ситуация, однако, может усложняться тем, что джозефсоновские переходы могут обладать заметным затуханием. Основной механизм такого затухания – присутствие в токе через переход существенной квазичастичной компоненты I_Q , которая в отличие от I_S (2.3) является функцией напряжения на переходе V . В простейшем случае эту функцию можно считать линейной и бездисперсионной:

$$I_Q = \frac{V}{R}, \quad (2.9)$$

где R обычно близко к сопротивлению перехода в нормальном состоянии. Как следует из (2.3) и (2.9), в классическом пределе учет такой компоненты дает для малых колебаний закон

$$\omega^{-2}\ddot{\Phi} + \omega_C^{-1}\dot{\Phi} + \Phi = 0, \quad (2.10)$$

где ω_C обычно называется характерной частотой перехода:

$$\omega_C = \frac{k}{\eta}, \quad \eta = \left(\frac{\hbar}{2e}\right)^2 R^{-1}. \quad (2.11)$$

Отношение частот ω и ω_C , характеризующее интенсивность затухания, существенно зависит от типа джозефсоновского перехода. Для туннельных переходов величина ω/ω_C лежит обычно в диапазоне $10^{-1} \div 10^{-3}$, затухание мало, и условие перехода в квантовый режим по-прежнему дается соотношением (2.7). Наоборот, для переходов с непосредственной (нетуннельной) проводимостью типа точечных контактов или тонкопленочных микромостиков реальна обратная ситуация: затухание велико, $\omega/\omega_C \gg 1$. Качественный анализ показывает, что в большинстве формул достаточно заменить ω на ω_C с некоторым коэффициентом порядка 1. Учитывая это, можно выписать итоговое условие проявления реально-квантовых (вторичных) макроскопических эффектов:

$$\min[\hbar\omega, \hbar\omega_C] \geq k_B T, \quad aE_C. \quad (2.12)$$

Это условие ясно показывает, почему реально-квантовые макроскопические эффекты удалось наблюдать именно с помощью туннельных джозефсоновских переходов. Действительно, именно эти системы при гелиевых температурах ($k_B T \leq 10^{-15}$ эрг) сохраняют сильную нелинейность, т.е. не-

большую величину E_C (так, для перехода с реальной величиной $I_C \approx 30$ мкА из формулы (2.4) следует $E_C \approx 10^{-14}$ эрг). Вместе с тем входящие в (2.12) частоты могут быть довольно высоки. Так, при современной технике изготовления туннельных переходов критические плотности тока могут достигать значений порядка 10^5 А/см² и более, что соответствует плазменным частотам $\omega \geq 10^{13}$ с⁻¹. При этом характерная частота ω_C остается близкой к теоретическому пределу $\pi\Delta(0)/\hbar$, где $\Delta(T)$ – энергетическая щель, что для типичных сверхпроводников (Pb, Nb) составляет около 10^{13} с⁻¹. Таким образом, величина $\hbar\omega_C$ для современных туннельных переходов может быть доведена до $\approx 10^{-14}$ эрг, так что выполненными оказываются оба условия (2.12).

Проблема экспериментальной регистрации реально-квантовых (вторичных) макроскопических эффектов (макроскопической визуализации квантовых эффектов) подробно обсуждается в [6]; там же приведены схемы экспериментов по макроскопическому квантовому туннелированию с диссипацией в джозефсоновских переходах.

В итоге, используя специфические нелинейные свойства джозефсоновских переходов, удалось экспериментально доказать существование в слабой сверхпроводимости не только ранее известных квантовых макроскопических, или когерентных (первичных), но и реально-квантовых (вторичных) эффектов, т.е. впервые экспериментально наблюдалось квантовомеханическое поведение выделенной степени свободы макроскопической физической системы.

Макроскопические квантовые, когерентные (первичные) эффекты в сверхпроводимости	Реально-квантовые (вторичные) макроскопические эффекты в слабой сверхпроводимости
Макроскопическое квантование магнитного потока, эффект Джозефсона, макроскопическая квантовая интерференция (эффект Мерсеро)	Квантовые флуктуации (тока и напряжения), туннельный распад метастабильных токовых состояний в системах с контактами Джозефсона, макроскопическое наблюдение квантового туннелирования с диссипацией

Проведенные эксперименты, по мнению автора обзора [6] К. К. Лихарева, дают нам важное ощущение, что с квантовой механикой «все в порядке» и на макроскопическом уровне, т.е. переход от классического поведения к квантовому в макрообъектах происходит точно так же, как в микрообъектах (еще одно удивительное подтверждение принципа природного подобия и самоподобия). Это дает возможность смело планировать реальные квантовые эксперименты и (что может быть не менее важным) ставить мысленные эксперименты с макрообъектами.

Наконец, эксперименты [6] показали, что туннельные джозефсоновские переходы, изготовленные по современной технологии (т.е. имеющие большие плотности тока), являются наиболее подходящими объектами для проведения экспериментов с макрообъектами на квантовом уровне. При этом возникает возможность реализации ряда предложенных схем оптимального приема предельно слабых сигналов и, как следствие, возможность преодолеть так называемый *квантовый предел* чувствительности приемных устройств в широком диапазоне частот от десятков килогерц до сотен гигагерц. Кроме того, могут быть поставлены эксперименты по проверке фундаментальных положений квантовой теории измерений. Дело в том, что эта теория, развитая на заре квантовой механики, существенно ориентировалась на измерение характеристик микрообъектов. В этом случае квантовомеханический анализ измерительных приборов не представляется реальным в силу его сложности, что и явилось причиной резкого разграничения объекта и прибора в теории измерений.

Появление макрообъектов с квантовым поведением радикально изменяет ситуацию. Например, эксперименты по макроскопическому квантовому туннелированию являются очевидной реализацией знаменитого парадокса «кот Шредингера». Однако в этом эксперименте роль измерительного прибора играет фактически не вольтметр, а сам джозефсоновский переход. Действительно, его нелинейность приводит к увеличению сигнала до такого уровня, что реализация одной из квантовых альтернатив (произошло или нет туннелирование до текущего момента времени) может быть зарегистрирована весьма грубым внешним прибором, заведомо никак не влияющим на динамику процессов. Таким образом, становится возможным полное квантовомеханическое описание системы («объект + измерительный прибор»). Не исключено [6], что реальные или мысленные эксперименты с подобными системами помогут пролить свет на принципиальные основы квантовой механики.

2.2. Квантовая локализация в нерегулярных системах разной мерности. Метод инстантонов

В изложении сформулированной проблемы мы будем следовать обзору А. И. Ларкина, К. К. Лихарева и Ю. Н. Овчинникова «Вторичные квантовые эффекты в слабой сверхпроводимости» [47], книге И. М. Тернова, В. Ч. Жуковского и А. В. Борисова «Квантовая механика и макроскопические эффекты» [2], а также серии работ на эту тему [1–56].

Как отмечалось выше, следует различать два вида квантовых макроскопических эффектов в сверхпроводимости. Хорошо известные явления квантования магнитного потока, эффекты Джозефсона или Мерсеро и другое выявляют существенно квантовое поведение куперовских пар электронов, т.е. *микроскопических объектов*. Эти эффекты приводят к квантовым по природе соотношениям между макроскопическими переменными, т.е. соотношениям Джозефсона между фазой и напряжением (2.3b), только в результате *когерентности* этих микроскопических объектов. Для того чтобы дать адекватное описание этих *первичных* эффектов, макроскопические величины φ , V и т.д. могут быть рассмотрены как классические переменные. С другой стороны, если контакт Джозефсона очень маленького размера S охладить до очень низких температур T , квантовый характер макроскопических переменных становится существенным. Другими словами, может наблюдаться квантовое поведение целого контакта как *макроскопического объекта*, что и было продемонстрировано в ряде экспериментов [6, 47]. Для того, чтобы описать такие *вторичные* квантовые макроскопические эффекты, необходимо выполнить вторичное квантование классических уравнений движения системы вдоль координаты φ . Эксперименты стимулировали быстрое развитие соответствующей теории, в частности, рассмотрение эффекта диссипации (*вязкости*) для этих квантовых эффектов, включая флуктуации, туннелирование и интерференцию. Существенные результаты в этой области были получены для ситуации, когда рассматривался единичный контакт Джозефсона малых размеров S (малой площади) с током $I(t)$, фиксированным внешней системой. Подходящий гамильтониан композитной системы («контакт + источник тока»)

$$H = H_J + \frac{Q^2}{2C} - \left(\frac{\hbar}{2e} \right) \dot{\varphi} I(t), \quad (2.13)$$

где H_J – гамильтониан самого контакта, $Q = CV$ – электрический заряд емкости C , образованной сверхпроводящими электродами контакта.

Если пренебречь вторичным квантованием, т.е. трактовать φ и Q как классические переменные, (2.13) эквивалентно следующему уравнению движения I_J

$$\dot{Q} = I(t) - I_J, \quad (2.14)$$

где I_J – ток через контакт. Для нахождения I_J необходимо определить модель для H_J .

Микроскопический подход. Наиболее известной из микроскопических моделей для H_J является *туннельный гамильтониан* [47] в рамках приближения БКШ для функций Грина, описывающих сверхпроводящий конденсат в электродах. В классическом приближении для φ и V соответствующие выражения для «средней» части I_J были получены в [45], а для случая флуктуаций – [47]. Эти результаты оказались в хорошем соответствии с экспериментальными данными для типичных контактов Джозефсона. Основным недостатком туннельного гамильтониана (помимо его сложности) является отсутствие описания конечного квазичастичного сопротивления R контакта для низких напряжений при низких температурах. Эта не исчезающая проводимость R^{-1} связана с неоднородностями оксидного слоя контактов.

Макроскопический подход. Если напряжение V на контакте Джозефсона достаточно мало, то разность фаз φ меняется медленно (см. (2.3b)), $|\dot{\varphi}| \ll \Delta(T)/\hbar$, и в нулевом приближении по отношению к $\dot{\varphi}$ туннельный гамильтониан может быть сведен к джозефсоновской энергии спаривания

$$U_J(\varphi) = -E_J \cos \varphi. \quad (2.15)$$

Для того, чтобы описать неисчезающую энергию диссипации, необходима следующая аппроксимация, которая дает «адиабатический» гамильтониан

$$H_J = U_J(\varphi) + \left(\frac{\hbar}{2e} \right) \varphi I_q(x) + H_q(x), \quad (2.16)$$

где H_q и x – соответственно гамильтониан и набор координат для квазичастиц контакта, играющих роль среды-термостата (тепловой бани) для подсистемы сверхпроводящего конденсата. Эта подсистема связана со средой-термостатом «через» оператор I_q тока квазичастиц. При этом делаются только самые общие предположения относительно оператора H_q (или непрерывности его энергетического спектра). Если среда-термостат остается в своем термическом равновесии, то ее внутренняя структура участвует в итоге (в окончательных результатах) исключительно через единственную комплексную функцию $Y(\omega)$ существенно квазичастичной полной проводимости контакта. В этом случае соотношения (2.13) и (2.16) эквивалентны модели резистивно-шунтированного контакта:

$$I_J = I_C \sin \varphi + I_q, \quad I_q = \langle I \rangle_q + I(t), \\ \langle I_q \rangle = V / R, \quad R^{-1} = Y(0), \quad \langle \tilde{I}(t) \rangle = 0, \quad (2.17)$$

где скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по координатам x среды-термостата. В пределах классического приближения к φ и Q спектральная плотность $S_I(\omega)$ флуктуационного тока $\tilde{I}(t)$ подчиняется обычной формуле Найквиста. С адиабатическим гамильтонианом (2.16) можно получить разумное описание поведения контакта любого типа при низком напряжении, особенно если E_J и R рассматриваются как эмпирические параметры (так что R^{-1} не должна исчезать при $T \rightarrow 0$). Более того, эта модель количественно корректна для контактов с внешними низкоомными ($R \ll R_N$) шунтами.

Механическая аналогия. Дополнительное преимущество макроскопической модели (2.16) состоит в том, что поведение контакта Джозефсона в этом приближении в точности *подобно* ситуации нерелятивистского квантового одномерного движения механической частицы массы m вдоль оси φ в периодическом потенциале (2.15) под действием дополнительной внешней силы $F(t)$ и силы вязкого трения $F_q = -\eta \dot{\varphi}$, если

$$m = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 C, \quad p = \left(\frac{\hbar}{2e} \right) Q, \quad \eta = \left(\frac{\hbar}{2e} \right)^2 R^{-1}, \quad F(t) = \left(\frac{\hbar}{2e} \right) I(t), \quad F_q = \left(\frac{\hbar}{2e} \right) I_q. \quad (2.18)$$

Эта аналогия может дать достаточно полезное проникновение в динамику контакта Джозефсона, а также обеспечивает более общий характер результатов, полученных в этой области [47]. Проблема квантовых флуктуаций тока и напряжения подробно изложена в [47].

Эксперименты. Эксперименты [6, 47] показали непосредственную очевидность квантовых флуктуаций (т.е. «нулевого» движения или «нулевых» колебаний) макроскопического объекта и оказались в хорошем соответствии с макроскопическим подходом Андерсона. Учитывая важность проблемы макроскопической визуализации рассматриваемых реально-квантовых (вторичных) эффектов в макроскопическом квантовом туннелировании с диссипацией, вернемся к анализу, рассматриваемому в обзоре К. К. Лихарева [6]. Анализируя конкретные эксперименты, можно отметить, что даже при выполнении условия (2.12) вопрос о регистрации реально-квантовых макроскопических эффектов не является тривиальным. Действительно, непосредственное измерение квантовых флуктуаций встречается с принципиальными трудностями, поскольку такими же флуктуациями (нулевыми колебаниями) обладает и любой измерительный прибор. Выход из этих трудностей состоит в использовании внутренней нелинейности изучаемой системы для того, чтобы тем или иным образом «усилить» квантовые флуктуации, т.е. стимулировать ими некоторый процесс относительно высокой интенсивности. Если эта интенсивность находится на вполне «классическом» уровне, можно проводить измерения такого процесса обычными приборами, полностью пренебрегая их квантовыми свойствами.

Первая из таких возможностей, реализованная в экспериментах, была предложена еще в 1978 г. Легеттом [1, 6], хотя общая возможность квантовых измерений такого типа неоднократно обсуждалась Блохинцевым [6]. Пусть джозефсоновский переход включен в простейшую внешнюю цепь – источник постоянного тока I , несколько меньшего, чем критический ток перехода. В этом случае в гамильтониане системы необходимо учесть еще и член U_e , равный произведению обобщенной координаты φ на соответствующую обобщенную силу

$$F_\varphi = -\frac{\partial U}{\partial \varphi} = \frac{\hbar}{2e} I, \quad (2.19)$$

так что полный потенциал $U = U_i + U_e$ принимает форму «стиральной доски» (или «гофрированного» потенциала):

$$U = E_C \left(1 - \cos \varphi - \frac{I}{I_C} \varphi \right), \quad (2.20)$$

причем локальные минимумы в точках

$$\varphi_0 = \arcsin \frac{I}{I_C} + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2.21)$$

соответствуют «классическим» устойчивым состояниям разности фаз, т.е. обычному сверхпроводящему состоянию джозефсоновского перехода. При конечной температуре T существует конечная вероятность термически активированного распада такого метастабильного состояния. Классическая теория [6] дает для скорости τ^{-1} этого распада выражение

$$\tau_{cl}^{-1} = \frac{\omega_A}{2\pi} \exp \left(-\frac{U_0}{k_B T} \right), \quad (2.22)$$

где U_0 – высота энергетического барьера (рис. 2.3), а «частота попыток» ω_A приближенно (точно в пределах малого и большого затуханий) совпадает с величиной $\min[\omega, \omega_C]$.

Рис. 2.3. Схемы экспериментов по макроскопическому квантовому туннелированию в джозефсоновских переходах с малым (а) и большим (б) затуханием и зависимость потенциальной энергии U от джозефсоновской разности фаз φ , реализуемая в этих экспериментах (в).

Стрелки на последнем рисунке схематически показывают механизмы распада метастабильного состояния $\varphi \approx \varphi_0$: термическую активацию через энергетический барьер U_0 (I) и квантовое туннелирование под барьером (2)

Формула (2.22) для времени жизни τ справедлива при обычном условии $\omega_A \tau \gg 1$, без выполнения которого само понятие времени жизни является неоднозначным. Частоты ω и ω_C опять определяются формулами (2.20) и (2.23), но уже с учетом вклада тока I в потенциал U (2.20). В наиболее важном случае $I \rightarrow I_C$ имеем

$$\omega = \left(\frac{2eI}{\hbar c} \right)^{1/2} (2\varepsilon)^{1/4}, \quad \omega_C = \left(\frac{2eI_C R}{\hbar} \right) (2\varepsilon)^{1/2}, \quad (2.23)$$

$$U_0 = \frac{2}{3} E_C (2\varepsilon)^{3/2}, \quad \varepsilon \equiv \frac{I}{I_C} - 1 \ll 1, \quad (2.24)$$

так что при $I \rightarrow I_C$ высота барьера снижается, и скорость распада растет. Способ возможной регистрации такого распада существенно зависит от величины затухания перехода. Если затухание достаточно мало

$$\frac{\omega}{\omega_C} \leq (2\varepsilon)^{-1/2}, \quad (2.25)$$

то из-за конечной инерции система не остановится в следующем минимуме и будет скользить вниз по «стиральной доске», постепенно набирая скорость $\dot{\phi}$ до тех пор, пока средняя скорость $\bar{\dot{\phi}}$ не выйдет на константу из-за нарастания диссипации. С точки зрения наблюдателя такой процесс соответствует скачку из сверхпроводящего состояния перехода ($\bar{\dot{\phi}} = 0, \bar{V} = 0$) в «резистивное» состояние с довольно значительным напряжением $\bar{V} = (\hbar / 2e) \bar{\dot{\phi}}$, обычно порядка нескольких милливольт. Это напряжение уже может быть легко измерено классическим прибором, поскольку оно значительно превышает не только квантовые, но и тепловые флуктуации реальных вольтметров. Именно таким образом термически активированный распад метастабильных состояний джозефсоновских переходов был впервые измерен еще в 1974 г., причем было получено хорошее согласие скорости распада τ^{-1} с формулой (2.22) (при $\omega / \omega_C \ll 1$). Напротив, если выполняется соотношение, обратное (2.25), то затухание приводит к остановке системы уже в ближайшем локальном минимуме $\Phi_1 = \Phi_0 + 2\pi$, опять соответствующем сверхпроводящему состоянию. Возникающий при этом короткий ($\approx \omega_C^{-1} \approx 10^{-12}$ с) и слабый ($\int U dt \approx \hbar / 2e \approx 10^{-15}$ В·с) импульс напряжения измерить очень трудно. Более удобным является другой путь: включить джозефсоновский переход в сверхпроводящее кольцо с не слишком малой индуктивностью $L \geq (\hbar / 2e) I_C^{-1}$. Ток I при этом можно задавать, прикладывая к получившейся системе («одноконтактному интерферометру») внешнее магнитное поле B_e :

$$I \approx \frac{\Phi_e}{L}, \quad \Phi_e = \int B_e dS. \quad (2.26)$$

Скачок системы в соседнее метастабильное состояние ($\Delta\phi \approx 2\pi$) приведет при этом к небольшому скачку магнитного потока и тока

$$\Delta I \approx \frac{\Delta\Phi}{L}, \quad \Delta\Phi \approx \Phi_0 = \frac{\hbar}{2e}, \quad (2.27)$$

который легко зарегистрировать, например, с помощью сверхпроводящего квантового интерферометра – *сквида*. Такие измерения [6] показали хорошее согласие с формулой (2.10) для переходов с большим затуханием ($\omega / \omega_C \gg 1$). Если теперь снижать температуру, тем самым увеличивая τ_{cl} , то реально-квантовые (вторичные) эффекты приведут к тому, что время жизни метастабильного состояния не будет возрастать бесконечно и выйдет при $T \rightarrow 0$ на некоторую константу τ_q . Действительно, согласно квантовой механике должна существовать конечная вероятность прохождения

«частицы» (в данном случае – макроскопической системы) под энергетическим барьером U_0 . Отметим также, что макроскопическое квантовое туннелирование может наблюдаться в сверхпроводящих структурах и другого типа [6]. В настоящее время можно считать доказанным, что низкотемпературный хвост кривой $R(T)$ резистивного фазового перехода достаточно тонких сверхпроводящих пленок является следствием термической активации пар антиполярных вихрей Абрикосова [6]. При этом для ширины перехода остается справедливой оценка, следующая из теории Асламазова и Ларкина [6] для высокотемпературного хвоста перехода

$$\Delta T \approx T_C \frac{R_0}{R_q}, \quad (2.28)$$

где $R_0 = (\sigma_N d)^{-1}$ – нормальное сопротивление пленки «на квадрат», а $R_q = 4\hbar / e^2 \approx 16,5$ кОм – квантовая единица сопротивления. Естественно предположить, что сопротивление еще более тонких пленок ($R_0 \geq R_q$) должно быть конечно, даже при $T = 0$ из-за того, что пары вихрей будут генерироваться квантовыми флуктуациями сверхпроводящего конденсата.

Макроскопическое квантовое туннелирование. Термическая активация. Еще в 1968 г. Иванченко и Зильберман отмечали [47], что даже малые флуктуации должны приводить к существенно нелинейным эффектам, если ток I достаточно близок к критическому значению I_C . Фактически, в соответствии с (2.1) и (2.4) полная потенциальная энергия системы («контакт + источник тока»)

$$U(\varphi) = U_J(\varphi) - \frac{\hbar}{2e} I \varphi = 2(\varepsilon \tilde{\varphi}^2 - \frac{2}{3} \tilde{\varphi}^3) E_J, \quad (2.29)$$

$$\varepsilon = \left[1 - (I / I_C)^2 \right]^{1/2} \ll 1, \quad \tilde{\varphi} = \varphi - \varphi_0, \quad (2.30)$$

формирует барьер малой высоты

$$U_0 = (2/3) E_J \varepsilon^3, \quad (2.31)$$

ограничивающий метастабильное состояние $\varphi = \varphi_0 = \arcsin(I / I_C)$ (рис. 2.4).

Рис. 2.4. Потенциальная энергия U (функция кубической параболы, адекватно аппроксимирующая фрагмент потенциала типа «стиральной доски») как функция джозефсоновской разницы фаз $\tilde{\varphi}$ для случая макроскопического квантового туннелирования

Флуктуации приводят к неисчезающей вероятности для системы уходить из состояния $\varphi = \varphi_0$. Эта вероятность может быть описана как скорость распада (обратная величина времени жизни) Γ , если эта скорость не слишком велика

$$\Gamma \ll \omega_A, \quad (2.32)$$

где ω_A – «частота попыток»:

$$\omega_A = \left(\omega_0^2 + \frac{1}{4\tau^2} \right)^{1/2} - \frac{1}{2\tau} = \begin{cases} \omega_0 & \text{для } \omega_0 \tau \gg 1, \\ \omega_C & \text{для } \omega_0 \tau \ll 1, \end{cases} \quad (2.33)$$

где $\omega_0 = \omega_p \varepsilon^{1/2}$ – частота малых осцилляций около Φ_0 в случае малой вязкости ($\omega_0 \tau \gg 1$) и ω_C – обратное время релаксации для случая сильной вязкости ($\omega_0 \tau \ll 1$): $\omega_C = \omega_0^2 \tau = (E_J / \eta) \varepsilon$. Если температура T достаточно выше точки «перехода»¹ $T_0 \approx \hbar \omega_A$, термические флуктуации доминируют как источник распада, и Γ может быть выражена известной формулой Крамерса [1]

$$\Gamma = C \frac{\omega_A}{2\pi} \exp(-U_0 / T) \text{ для } U_0 / T \gg 1. \quad (2.34)$$

Если вязкость не слишком мала

$$\omega_0 \tau \ll U_0 / T, \quad (2.35)$$

распределение вероятности системы внутри потенциала ($\Phi = \Phi_0$) близко к равновесному

$$f(E_i) = \exp(-E_i / T) / Z, \quad Z = \sum_i \exp(-E_i / T), \quad (2.36)$$

что дает $C = 1$ в предэкспоненциальном факторе соотношения (2.34).

В противоположном пределе (для $U_0 / T \ll \omega_0 \tau$) состояния с энергиями $E_i > U_0$ существенно пусты благодаря потоку вероятности через барьер. Для энергетического барьера (2.17) это дает $C = 4(U_0 / T) / \omega_0 \tau$.

Макроскопическое туннелирование. Для $T < T_0$ скорость распада определяется квантовыми флуктуациями, так что при $T \rightarrow 0$ можно описать распад как результат «макроскопического квантового туннелирования с диссипацией» системы как целого через энергетический барьер (2.17). Этот эффект привлек значительное внимание после стимулирующей работы Легетта, первых [47] и двух решающих экспериментов [6]. Для того чтобы вычислить Γ в присутствии существенной вязкости, в основном используется техника континуального интеграла Фейнмана [1, 2]. Эта техника обобщалась на распадные процессы [1], в том числе для контактов Джозефсона. Говоря о развитии теории квантового туннелирования с диссипацией, отметим, что в ряде статей и обзоров [1–56] обсуждаются достаточно общие и важные результаты по времени жизни метастабильных состояний в зависимости от температуры и вязкости при заданном потенциальном барьере. При высоких температурах метастабильные системы хорошо описываются теорией Крамерса [1] или ее обобщением на случай зависящей от времени вязкости [1], и распад (метастабильного состояния) осуществляется классическим надбарьерным переходом. При достаточно низких температурах переход обусловлен квантовомеханическим туннелированием. При нулевой температуре туннелирование происходит из состояния с низшей энергией. С повышением температуры увеличивается энергия состояния, из которого наиболее эффективно происходит туннелирование [1, 20].

Переход по температуре к классическому надбарьерному прохождению может быть переходом первого или второго рода. Род определяется формой потенциального барьера. Для потенциала с плоской вершиной (близкого к прямоугольному барьеру) осуществляется переход первого рода. В этом случае квантовое туннелирование происходит с глубоких уровней при всех допустимых температурах. Полная вероятность распада в таком потенциале есть сумма вероятностей квантового туннелирования и вероятности классического надбарьерного перехода. В зависимости от температуры существенен только один из механизмов распада. В ряде случаев вблизи границы метастабильности потенциал может иметь форму кубической параболы (например, для сверхпроводящих контактов (2.29)). В этом случае при повышении температуры уровень энергии, с которого туннелирование наиболее вероятно, непрерывно растет и при температуре перехода T_0 достигает высоты потенциального барьера. Для достаточно высокого потенциального барьера вероятность распада Γ в единицу времени экспоненциально мала:

$$\Gamma = B \exp(-A). \quad (2.37)$$

¹ За исключением тех мест, где это особо оговорено, ниже используется система единиц, в которой $\hbar = k_B = 1$.

Коэффициенты A, B зависят от температуры и вязкости. При этом на плоскости (T, η) можно выделить несколько областей. При температуре $T > T_0$ выполняется закон Аррениуса

$$A = U / T, \quad (2.38)$$

где U – высота потенциального барьера. Показано [20], что в точке T_0 функция $A(T)$ имеет скачок во второй производной. При $T < T_0$ показатель $A(T)$ – плавная функция температуры, выходящая на конечное значение при $T \rightarrow 0$, например, в пределе сильной вязкости и для потенциала, имеющего вид кубической параболы

$$A(T) = \frac{U}{T_0} \left[\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \right]. \quad (2.39)$$

В узкой области вблизи T_0 шириной порядка $T_0(T_0/U)^{1/2}$ флуктуации замыкают особенность. В этой области

$$\Gamma(T) = \frac{1}{2} B [1 - \Phi(x)] \exp \left(x^2 - \frac{U}{T} \right), \quad (2.40)$$

где величина $x = \lambda(T - T_0)$. Коэффициенты λ, B и температура T_0 зависят от вязкости и найдены в [20]. В зависимости от вероятности распада Γ и вязкости η можно выделить два характерных значения вязкости $\eta_{1,2}$ [20]:

$$\eta_1 = m\Omega T / U, \quad \eta_2 = m\Omega, \quad (2.41)$$

где частота колебаний в перевернутом потенциале

$$\Omega = (-U'' / m)^{1/2}, \quad (2.42)$$

m – масса частицы, U'' – вторая производная от потенциала в точке максимума. При значении вязкости $\eta \approx \eta_1$ энергия δ , теряемая частицей за период, порядка T . При $\eta \geq \eta_2$ энергия $\delta \approx U$, и классическое движение становится аperiодическим. В классической области высоких температур $T \gg T_0$ предэкспоненциальный множитель B был найден в работе Крамерса в предельных случаях $\eta \gg \eta_1$ и $\eta \ll \eta_1$ [1, 20], а при $\eta \approx \eta_1$ – в [20]. Область промежуточных температур $T \geq T_0$, в которой происходит переход от классического закона распада к квантовому, описываемому формулой (2.40), исследовалась в [20] при $\eta_1 \ll \eta \ll \eta_2$ и в [1, 20] при $\eta \geq \eta_2$. В области малой вязкости $\eta \ll \eta_2$ вероятность распада Γ выражается через вероятность $\gamma(E)$ прохождения через потенциальный барьер частицы с энергией E :

$$\Gamma = \int \frac{dE}{2\pi} N(E) \gamma(E) / \sum_i N(E_i), \quad (2.43)$$

где $N(E)$ – функция распределения квантовой частицы по энергии.

Наиболее просто исследуется случай промежуточной вязкости $\eta_1 \ll \eta \ll \eta_2$ [20]. При этом функцию распределения $N(E)$ можно считать равновесной:

$$N(E) = \exp(-E / T), \quad (2.44)$$

и выражение (2.43) вообще не зависит от вязкости.

Если температура T достаточно низкая ($T \leq T_0$), то существенные энергии в интеграле (2.43) меньше высоты барьера, и для $\gamma(E)$ можно воспользоваться обычным квазиклассическим выражением

$$\gamma(E) = \exp\{-2 \int p dx\}. \quad (2.45)$$

При $T \geq T_0$ существенные энергии близки к вершине барьера, и квазиклассическая формула (2.45) неверна, но потенциал вблизи вершины можно считать перевернутым осциллятором с частотой Ω . В этом случае

$$\gamma(E) = [1 + \exp(-2\pi E / \Omega)]^{-1}. \quad (2.46)$$

Подставляя выражения (2.44), (2.45), (2.46) в формулу (2.43), можно убедиться, что переход от классического надбарьерного прохождения к квантовому туннелированию происходит при температуре

$$T_0 = \frac{\Omega}{2\pi}. \quad (2.47)$$

Вблизи T_0 энергетическую зависимость показателя в формуле (2.45) можно считать параболой. При этом интеграл в формуле (2.43) сводится к функции ошибок, и температурная зависимость вероятности распада $\Gamma(T)$ имеет вид (2.40). Афлек [8] показал, что выражение (2.43) с учетом (2.44) совпадает с формулами

$$\Gamma = 2 \operatorname{Im} F, \quad T \leq T_0; \quad (2.48)$$

$$\Gamma = 2(T_0 / T) \operatorname{Im} F, \quad T \geq T_0, \quad (2.49)$$

где F – свободная энергия системы. Важно, что формулы (2.48), (2.49) справедливы и в случае большой вязкости $\eta \geq \eta_2$. При этом формула (2.40) справедлива только в классическом пределе $T \gg T_0$; тогда вместо (2.46) можно подставить $\gamma(E) = \theta(E)$. В квантовом случае нельзя ввести функцию распределения $N(E)$, так как энергия при большой вязкости не является «хорошим» квантовым числом. Вероятность туннелирования $\gamma(E)$ зависит от вязкости. Как отмечается в [20], главная трудность заключается в том, что наличие вязкости требует уточнения постановки задачи о квантовом туннелировании. Классическое уравнение движения

$$m\ddot{q} = -\frac{\partial U}{\partial q} - \eta \dot{q} \quad (2.50)$$

справедливо при любой вязкости η . Большая вязкость $\eta > \eta_2$ соответствует аperiодическому движению в классически доступной области. Проквантовать уравнение (2.50) можно только при $\eta = 0$, когда оно является гамильтоновым. Чтобы найти вероятность квантового туннелирования при большой вязкости, нужно сделать шаг назад и понять, что вязкость в (2.50) возникла от взаимодействия частицы с координатой q с термостатом (системой с большим числом степеней свободы). Большая система – частица и термостат – является гамильтоновой и может быть проквантована. Чтобы найти время жизни метастабильного состояния с большим числом степеней свободы, нужно обратиться к понятию «инстантона» [1, 57, 63]. Можно убедиться, что формула (2.48) справедлива при низких температурах для системы с любым числом степеней свободы. Для метастабильного состояния распадное граничное условие приводит к появлению мнимой части в спектре энергий. Затухание со временем волновой функции метастабильного состояния определяется величиной $E_1 = -\operatorname{Im} E$. При нулевой температуре вероятность распада

$$\Gamma = -2 \operatorname{Im} E. \quad (2.51)$$

При низких температурах распад происходит из возбужденных состояний. Если время жизни этих состояний велико ($E_1 \ll \operatorname{Re} E$), то в системе успевает установиться тепловое равновесие. В результате для средней вероятности распада

$$\Gamma = \frac{\sum \exp(-E / T) 2 \operatorname{Im} E}{\sum \exp(-E / T)} \approx 2T \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z} = 2 \operatorname{Im} F. \quad (2.52)$$

Таким образом, для вычисления вероятности распада нужно найти мнимую часть статистической суммы Z , которую удобно записать в виде континуального интеграла [63]

$$Z = \int Dq(\tau) \exp\{-A[q]\}, \quad (2.53)$$

где эффективное действие A определяется усреднением по степеням свободы термостата Q :

$$\begin{aligned} A[q] &= A_0 + A_1; \\ A_0 &= \int_0^{1/T} d\tau \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2 + V(q) \right\}; \\ \exp(A_1) &= \text{Sp}_Q \exp \left\{ - \int_0^{1/T} d\tau [q(\tau)Q + H(Q)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Часто шум термостата можно считать гауссовым. В этом случае действие термостата определяется корреляционной функцией шумов

$$A_1 = \int_0^{1/T} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' K(\tau - \tau') [q(\tau) - q(\tau')]^2. \quad (2.55)$$

Между корреляционной функцией на мнимых временах $K(\tau)$ и функцией трения существует дисперсионное соотношение, аналогичное соотношению между мацубаровскими и временными функциями Грина [20].

Если коэффициент трения η не имеет дисперсии, то

$$K(\tau) = \eta / (4\pi\tau^2). \quad (2.56)$$

Определенный интерес представляет предельный случай малой вязкости $\eta \ll \eta_1$. При низких температурах $T < T_0$ этот случай не отличается от случая промежуточной вязкости $\eta_1 \ll \eta \ll \eta_2$. Вероятность распада Γ определяется формулами (2.43), (2.44), (2.45) и не зависит от вязкости. Однако при $T > T_0$ возникает зависимость Γ от вязкости, так как при этом происходит туннелирование с верхних энергетических уровней, где функцию распределения нельзя считать равновесной. В предельном случае высоких температур $T \gg T_0$, когда существенно надбарьерное прохождение, при малой вязкости число надбарьерных частиц пропорционально вязкости. Поэтому предэкспоненциальный множитель B в выражении (2.37) для Γ также пропорционален вязкости η [1, 20]. Чтобы получить грубую оценку для Γ в переходной области [20], можно считать, что в (2.43) функция распределения $N(E)$ равна равновесному значению (2.41) при $E < E_c$, а при $E > E_c$ быстро убывает. Энергия E_c находится из условия равенства вероятностей туннелирования $\gamma(E)$ и перехода под действием сил трения

$$\gamma(E_c) = \exp(E_c / T_0) = \delta / T, \quad (2.57)$$

где $\delta \approx \eta U / m\Omega$ – энергия, теряемая из-за трения за один период. В результате существенное туннелирование происходит из состояний, меньших высоты барьера на величину $|E_c|$, и в вероятности туннелирования появляется дополнительный множитель

$$\gamma(E_c) \exp(-E_c / T) = (\delta / T)^{1-T_0/T}. \quad (2.58)$$

Температура T_0 в формуле (2.57) определяет температуру перехода от квантового к классическому режиму и равна $\Omega / 2\pi$, где Ω – частота движения в перевернутом потенциале с энергией E_c .

При малой вязкости эта частота несколько меньше частоты осциллятора в (2.46), поэтому T_0 медленно убывает с уменьшением вязкости. Для получения точной формулы для Γ в переходной области нужно вывести и решить квантовое кинетическое уравнение для частицы в поле шумов термостата [20]. Этот шум при низких температурах следует считать не «белым», а «красным», так как характерная частота шумов порядка температуры и сравнима с частотой движения частицы.

Для оценки влияния квантовых флуктуаций на вероятность туннелирования при низких температурах $T < T_0$ вернемся к формуле (2.48), где свободная энергия

$$F = -T \ln Z ; Z = Z_0 + iZ_1 = \int Dq(\tau) \exp\{-A[q]\}. \quad (2.59)$$

Поскольку мнимая часть статистической суммы Z_1 мала по сравнению с вещественной частью Z_0 , формула (2.48) может быть представлена в виде

$$\Gamma = 2TZ_1 / Z_0 = 2TZ_0^{-1} \operatorname{Im} \int Dq(\tau) \exp\{-A[q]\}. \quad (2.60)$$

Функциональный интеграл в (2.60) берется по функциям $q(\tau)$, определенным на интервале $[-1/2T, 1/2T]$ и удовлетворяющим условию $q(-1/2T) = q(1/2T)$. Для вычисления величины $\operatorname{Im} Z$ можно воспользоваться методом, разработанным и развитым в [20]. Существует функция $\tilde{q}(\tau)$, для которой действие $A[q]$ принимает экстремальное значение. Функция $\tilde{q}(\tau)$ находится из уравнения

$$\frac{\delta A[q]}{\delta q} = 0. \quad (2.61)$$

Вблизи экстремальной траектории функцию $q(\tau)$ можно представить в виде

$$q(\tau) = \tilde{q}(\tau) + \sum_n C_n q_n(\tau), \quad (2.62)$$

где $q_n(\tau)$ – нормированные собственные функции оператора $\delta^2 A / \delta q^2$,

$$\frac{\delta^2 A}{\delta q^2} q_n = \Lambda_n q_n, \quad (2.63)$$

с периодическими граничными условиями $q_n(1/2T) = q_n(-1/2T)$. Одно собственное значение Λ_0 – отрицательное. Контур интегрирования по C_0 необходимо сместить на мнимую ось, что приводит к появлению мнимой части в статистической сумме.

При $T < T_0$ функция $\tilde{q}(\tau)$ отлична от const, и при произвольном значении τ_0 периодическая функция $\tilde{q}(\tau - \tau_0)$ (с периодом $1/T$) также является решением уравнения (2.61). Отсюда следует, что функция $\partial \tilde{q} / \partial \tau$ удовлетворяет уравнению (2.63) с нулевым собственным значением. Для каждой функции $q(\tau)$ выберем τ_0 такое, чтобы наилучшим образом приблизить $q(\tau)$ функцией $\tilde{q}(\tau - \tau_0)$, т.е. определим τ_0 из условия минимума функционала [20]:

$$D(\tau' | q) = \int_{-1/2T}^{1/2T} d\tau [q(\tau) - \tilde{q}(\tau - \tau')]^2 ; \left. \frac{\partial D}{\partial \tau'} \right|_{\tau' = \tau_0} = 0. \quad (2.64)$$

Величина Z_1 может быть записана в виде

$$Z_1 = \operatorname{Im} \int_{-1/2T}^{1/2T} d\tau' \int Dq(\tau) \exp\{-A[q]\} \delta(\tau' - \tau_0(q(\tau))) =$$

$$= \text{Im} \int_{-1/2T}^{1/2T} d\tau' \int Dq(\tau) \exp\{-A[q]\} \delta\left(\frac{\partial D(\tau'|q)}{\partial \tau'}\right) \left| \frac{\partial^2 D(\tau'|q)}{\partial \tau'^2} \right|. \quad (2.65)$$

Из (2.62), (2.64) следует, что

$$\frac{\partial D(\tau'|q)}{\partial \tau'} = 2C_1 \left[\int_{-1/2T}^{1/2T} d\tau \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tau} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \frac{\partial^2 D(\tau'|q)}{\partial \tau'^2} = 2 \int_{-1/2T}^{1/2T} d\tau \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tau} \right)^2. \quad (2.66)$$

Подставляя выражения (2.66) в (2.65), получим

$$Z_1 = \left[\int_{-1/2T}^{1/2T} d\tau \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tau} \right)^2 \right]^{1/2} \int_{-1/2T}^{1/2T} d\tau' \int_0^\infty \frac{dC_0}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{C_0^2}{2} |\Lambda_0|\right\} \times \\ \times \prod_{n \neq 0} \int_{-\infty}^\infty \frac{dC_n}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{C_n^2}{2} \Lambda_n\right\} \delta(C_1) \exp\{-A[q]\}. \quad (2.67)$$

Аналогично величина Z_0 может быть записана в виде гауссова интеграла по области значений $q(\tau)$ вблизи минимума эффективного действия. В результате для времени жизни метастабильного состояния Γ^{-1} получается выражение

$$\Gamma = B \exp(-A), \quad (2.68)$$

где

$$A = A[\tilde{q}] - A[q_{\min}], \quad B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-1/2T}^{1/2T} d\tau \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tau} \right)^2 \right]^{1/2} \left| \frac{\text{Det}'\left(\frac{\delta^2 A}{\delta q^2}\right)_{q=\tilde{q}}}{\text{Det}\left(\frac{\delta^2 A}{\delta q^2}\right)_{q=q_{\min}}} \right|^{-1/2}. \quad (2.69)$$

Здесь Det' означает, что в определителе Det опущено нулевое собственное значение. При движении частицы в потенциальном поле в пределе нулевой температуры

$$\int_{-1/2T}^{1/2T} d\tau \left(\frac{\partial \tilde{q}}{\partial \tau} \right)^2 = \frac{A}{m}. \quad (2.70)$$

Однако при наличии вязкости соотношение (2.70) неверно даже при нулевой температуре [20]. Вывод формулы (2.69) приводится [1, 20], как правило, для того, чтобы продемонстрировать ее справедливость для произвольной температуры $T < T_0$ и для любого вида эффективного действия, в том числе и при наличии диссипации. При исследовании затухания тока в сверхпроводящих контактах при неравновесной функции распределения электронов [20] было показано, что неравновесность приводит к резкому росту эффективной температуры контакта и увеличению вероятности распада метастабильного токового состояния. При уровне неравновесности, превышающем пороговое значение, эффективная температура становится отрицательной. В этом случае на контакте возникают колебания фазы и напряжения при токе, меньшем критического.

При описании этих неравновесных явлений [20] использовалось кинетическое уравнение для функции распределения электронов. Функция распределения N_i , равная вероятности найти квантовую частицу в i -м состоянии, удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial N_i}{\partial t} = \sum_i (N_i W_{ij} - N_j W_{ji}). \quad (2.71)$$

При равновесном распределении электронов [20] вероятности перехода W_{ij} удовлетворяют соотношению

$$W_{ij} = W_{ji} \exp[-(E_j - E_i) / T]. \quad (2.72)$$

Отсюда следует, что уравнение (2.71) имеет в этом случае стационарное решение

$$N_i = \exp(-E_i / T). \quad (2.73)$$

При неравновесном распределении электронов вероятности перехода W_{ij} не связаны простым соотношением вида (2.72). Однако и в этом случае стационарное решение уравнения (2.71) можно искать в виде

$$N_i = \exp\left(-\int^E dE_i / T^*(E_i)\right). \quad (2.74)$$

Величина $T^*(E)$ играет роль эффективной температуры и мало меняется на энергиях порядка расстояния между уровнями. Матричные элементы W_{ij} быстро убывают с ростом разности $|i - j|$. Поэтому из формул (2.71), (2.73) следует уравнение для эффективной температуры

$$\sum_i \left\{ W_{ij} - W_{ji} \exp[-(E_j - E_i) / T^*(E_i)] \right\} = 0. \quad (2.75)$$

Рассматривается также важный частный случай [20], когда эффективная температура велика по сравнению с характерной частотой $\omega_{ij} \approx \Omega$, на которой происходит падение вероятности перехода W_{ij} . При выполнении этого условия функция распределения меняется медленно, и уравнение (2.71) сводится к дифференциальному:

$$-\frac{1}{\omega(E)} \frac{\partial N(E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{AN(E)}{\omega(E)} + \frac{B}{\omega(E)} \frac{\partial N(E)}{\partial E} \right] = 0, \quad (2.76)$$

где $\omega(E)$ – расстояние между ближайшими уровнями, равное частоте классического движения в потенциальной яме $U(\varphi)$,

$$A = \sum_j (E_j - E_i) W_{ji}, \quad B = \frac{1}{2} \sum_j (E_j - E_i)^2 W_{ji}. \quad (2.77)$$

В стационарном случае решение уравнения (2.76) имеет вид (2.74) с эффективной температурой

$$T^*(E) = B / A. \quad (2.78)$$

Выражение (2.76) можно получить также из формулы (2.75).

В дополнение заметим, что при изучении неупругого туннелирования через тонкие аморфные пленки обсуждаются, в частности, мезоскопические флуктуации проводимости [20]. Отдельный интерес может представлять электронный поляронный эффект и макроскопическая квантовая диффузия тяжелой частицы в металле [20]. Другие варианты возможной применимости макроскопического квантового туннелирования с диссипацией к мезоскопическим системам требуют дополнительного обсуждения [3].

Изложенная часть науки о квантовом туннелировании с диссипацией представляет собой только маленький возможный фрагмент (или одно из возможных «введений» в проблему). При этом мы, конечно, не претендуем на полноту изложения. Существенным и важным оказывается как универсальность самой этой науки, так и многих методов, которые в ней используются и разрабатываются [1]. Продуктивность науки о квантовом туннелировании с диссипацией, по-видимому, проявляется как в ряде областей, которым посвящено настоящее пособие, так и в целом для адекватного описания процессов в низкотемпературных предмезоскопических и мезоскопических системах. Что касается более

доступного и подробного изложения *метода инстантонов*, используемого в настоящем пособии и в науке о макроскопическом квантовом туннелировании, то мы адресуем читателя к литературе [57]. Отметим также, что при исследовании динамики частицы в двухъямном потенциале, а также проблемы локализации [1], уточняются границы применимости метода инстантонов и обсуждаются способы уточнения этого метода.

Особый интерес в науке о макроскопическом квантовом туннелировании с диссипацией представляют исследования двумерных нелинейных систем, взаимодействующих с термостатом (как предмезоскопических, так и мезоскопических). На примере систем с контактами Джозефсона подобное важное исследование было выполнено Б. И. Ивлевым и Ю. Н. Овчинниковым в работе «Распад метастабильных состояний при наличии близких подбарьерных траекторий» [24]. При этом было показано, что зависимость вероятности распада токового состояния системы двух связанных джозефсоновских контактов от температуры и величины тока обладает существенными особенностями. Оказалось, что это связано с наличием в двумерной системе близких классических траекторий в мнимом времени, которые могут плавно или скачком сливаться в одну при некоторых значениях тока и температуры. В работе [24] исследовалось поведение вероятности распада метастабильного состояния вблизи таких особых точек.

2.3. Экспериментально наблюдаемые эффекты диссипативного туннелирования. Управляемое 1D-диссипативное туннелирование во внешнем электрическом поле

Исследуется управляемость диссипативного туннелирования в системе туннельно связанных квантовых точек (квантовой молекуле) или системе «игла кантилевера АСМ/ СТМ – квантовая точка», моделируемых двухъямным осцилляторным потенциалом, взаимодействующим с термостатом, во внешнем электрическом поле [64]. Полученные результаты качественно соответствуют отдельным экспериментальным ВАХ для системы «платинированная игла кантилевера АСМ/ СТМ – циркониевая квантовая точка», полученным в НИФТИ при ННГУ им. Н. И. Лобачевского. В работе Ю. Н. Овчинникова (Овчинников Ю. Н. // ЖЭТФ. 2007. Т. 131, № 2. С. 286) было показано, что проводимость гранулированных металлических пленок связана с процессами туннелирования между соседними гранулами, а также, что взаимодействие с термостатом, обеспечивающее реальный переход в состояния, локализованные в «соседнем» кластере, достаточно мало. Таким образом, характеристики туннельного тока в изучаемых системах можно рассматривать в пределе сравнительно «слабой» диссипации, но достаточной для обеспечения «распадности» двухъямного осцилляторного потенциала, используемого в предлагаемой модели. Кроме того, существенный вклад в туннельный ток может дать вероятность туннелирования, оцененная с точностью до предэкспоненциального фактора. На рис. 2.5 представлена экспериментальная схема исследований и отдельные вольт-амперные характеристики, полученные экспериментальной группой (О. Н. Горшков, Д. О. Филатов и др.) в НИФТИ при ННГУ им. Н. И. Лобачевского.

Рис. 2.5. Схема экспериментальной установки с использованием совмещенного АСМ/ СТМ и отдельные полученные туннельные ВАХ

Одной из характерных особенностей ВАХ (см., например, кривую (3) на рис. 2.5) является наличие единичного пика на растущей части кривой, с последующим выходом на «плато» при поло-

жительном приложенном напряжении, и отсутствие упомянутого пика при отрицательном приложенном напряжении. Похожая зависимость была продемонстрирована в недавней экспериментальной работе (D. Ullien, H. Cohen, D. Porath // *Nanotechnology*. 2007. Vol. 18, № 42. P. 424015), где исследовались ВАХ между иглой кантилевера из золота и квантовой точкой из того же металла. При этом каналы туннельного тока реализовывались через присоединенные молекулы ДНК. Теоретическая возможность использовать науку о диссипативном туннелировании для систем с АСМ/СТМ была продемонстрирована в статье (A. A. Louis, J. P. Sethna // *Phys. Rev. Lett.* – 1995. Vol. 74, № 8. P. 1363).

Учет влияния электрического поля на асимметричный двухъямный осцилляторный потенциал:

$$\tilde{U}(q) = \frac{\omega_0^2}{2}(q - b_0)^2 \theta(q) + \left[\frac{\omega_0^2}{2}(q + a_0)^2 - \Delta I \right] \theta(-q) - |e|Eq, \quad (2.79)$$

где параметр $\Delta I = \frac{\omega_0^2}{2}(a_0^2 - b_0^2)$ определяет исходную асимметрию потенциала в отсутствии поля, как известно, приводит к изменению величины асимметрии, пропорциональной величине поля:

$$\Delta \tilde{U} = \tilde{U}_2(a^*) - \tilde{U}_1(b^*) + \frac{\omega_0^2}{2}(a_0^2 - b_0^2) = |e|E(a_0 + b_0) \sim E, \quad (2.80)$$

где

$$\tilde{U}_1(b^*) = -b_0|e|E - \frac{|e|^2 E^2}{2\omega_0^2}, \quad \tilde{U}_2(a^*) = a_0|e|E - \frac{|e|^2 E^2}{2\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{2}(a_0^2 - b_0^2).$$

При некотором значении внешнего поля первоначально асимметричный потенциал с более глубокой левой ямой может стать симметричным $a_c^* = b_c^*$:

$$\tilde{U}_1(b^*) = \tilde{U}_2(a^*); \quad -b_0|e|E - \frac{|e|^2 E^2}{2\omega_0^2} = a_0|e|E - \frac{|e|^2 E^2}{2\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{2}(a_0^2 - b_0^2),$$

отсюда

$$E|e|(a_0 + b_0) = \frac{\omega_0^2}{2}(a_0 - b_0)(a_0 + b_0) \quad \text{и} \quad E_c = (a_0 - b_0) \frac{\omega_0^2}{2|e|}. \quad (2.81)$$

В ряде экспериментальных приложений важно учитывать, что, кроме изменения асимметрии, связанного с изменением величины внешнего поля, может происходить дополнительное изменение асимметрии за счет изменения геометрических размеров конечного потенциала (например, рост радиуса металлической квантовой точки из коллоидного золота (H. Yanagi, T. Ohno // *Langmuir*. 1999. Vol. 15, № 14. P. 4773], во внешнем электрическом поле под кантилевером АСМ/СТМ). Для учета такой дополнительной управляемой асимметрии можно ввести параметр Δb , $b \rightarrow b + \Delta b$. Тогда одновременное изменение двух вкладов в общую асимметрию (за счет роста внешнего поля и за счет роста радиуса конечной КТ) можно согласовать в режиме, когда исходно асимметричный потенциал оказался симметричным:

$$\Delta \tilde{U}(\Delta b) = |e|E(a_0 + b_0 + \Delta b) + \frac{\omega_0^2}{2}(b_0^2 + 2b_0\Delta b + \Delta b^2 - a_0^2) = 0.$$

Тогда величина Δb может быть определена как

$$\Delta b = - \left(b_0 + \frac{|e|E}{\omega_0^2} \right) + \sqrt{\frac{e^2 E^2}{\omega_0^4} + a_0^2 - \frac{2|e|Ea_0}{\omega_0^2}}. \quad (2.82)$$

При этом возникает естественное ограничение на изменение параметров

$$E < \frac{\omega_0^2(a_0 - b_0)}{2|e|}.$$

Приведенная простая оценка может позволить получить модель управляемого роста металлических КТ во внешнем электрическом поле. Для того чтобы воспользоваться стандартной моделью для определения вероятности диссипативного туннелирования будем использовать следующие обозначения для перенормированного двухъямного осцилляторного потенциала во внешнем электрическом поле: $q_1 = b^* = b_0 + \frac{|e|E}{\omega_0^2}$, $q_0 = a^* = a_0 - \frac{|e|E}{\omega_0^2}$. Тогда модельный туннельный гамильтониан (с перенормированным 1D-потенциалом) можно представить в стандартном виде

$$\hat{H} = \frac{p_1^2}{2} + v_1(y_1) + y_1 \sum_{\alpha=2}^N C_{\alpha} y_{\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^N (p_{\alpha}^2 + \omega_{\alpha}^2 y_{\alpha}^2), \quad (2.83)$$

при этом вводится адиабатический потенциал $v(y_1) = v_1(y_1) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=2}^N \frac{C_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}^2} y_1^2$, который после несложных преобразований сводится к виду

$$v(q) = \frac{1}{2} \omega_0^2 (q + q_0)^2 \theta(-q) + \left[\frac{1}{2} \omega_0^2 (q - q_1)^2 - \Delta I \right] \theta(q),$$

где $\omega_0^2 = \omega_1^2 - \sum_{\alpha=2}^N \frac{C_{\alpha}^2}{\omega_{\alpha}^2}$.

Как и ранее, предполагается, что в квазиклассическое действие $S\{q\}$ основной вклад вносит траектория $q_B(\tau)$ (инстантон), подчиняющаяся уравнению Эйлера – Лагранжа. В пределе «слабой» диссипации (без учета взаимодействия с локальными модами среды термостата) получим

$$S_B = \frac{\omega_0 (q_1^2 - q_0^2)}{2} \text{Arcsh} \left[\frac{q_1 - q_0}{q_1 + q_0} \text{sh} \frac{\omega_0 \beta}{2} \right] - \frac{\omega_0^2 (q_1^2 - q_0^2)}{4} \beta + \\ + \frac{\omega_0 (q_1 + q_0)^2}{2} \left\{ \frac{\text{ch} \frac{\omega_0 \beta}{2} - \left[1 + \left(\frac{q_1 - q_0}{q_1 + q_0} \right)^2 \text{sh}^2 \frac{\omega_0 \beta}{2} \right]^{1/2}}{\text{sh} \frac{\omega_0 \beta}{2}} \right\}. \quad (2.84)$$

Выражение для квазиклассического действия с учетом локальной моды среды-термостата в приведенных обезразмеренных переменных принимает вид

$$\frac{S}{q_0^2 \omega} = \frac{1}{2} (b+1)(3-b) \tau_0^{*/'} - \frac{(b+1)^2 (\tau_0^{*'})^2}{2\beta^*} - \frac{(b+1)^2}{2\tilde{\gamma}'} \left\{ \frac{(1-\tilde{x}_2')}{\sqrt{\tilde{x}_1'}} \left[\text{cth} \beta^* \sqrt{\tilde{x}_1'} - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{\text{sh} \beta^* \sqrt{\tilde{x}_1'}} \left\{ 2 \text{ch} \left((\beta^* - \tau_0^{*'}) \sqrt{\tilde{x}_1'} \right) - \text{ch} \left(\beta^* \sqrt{\tilde{x}_1'} \right) \right\} \right] - \right. \\ \left. \left. - \frac{(1-\tilde{x}_1')}{\sqrt{\tilde{x}_2'}} \left[\text{cth} \beta^* \sqrt{\tilde{x}_2'} - \frac{1}{\text{sh} \beta^* \sqrt{\tilde{x}_2'}} \left\{ 2 \text{ch} \left((\beta^* - \tau_0^{*'}) \sqrt{\tilde{x}_2'} \right) - \text{ch} \left(\beta^* \sqrt{\tilde{x}_2'} \right) \right\} \right] \right\}, \quad (2.85)$$

где $\tau_0^{*'} = 2\omega\tau^* = \text{arcsch} \left[\frac{1-b}{1+b} \text{sh} \beta^* \right] + \beta^*$, $\beta^* = \frac{\beta\omega}{2}$; $b = \frac{q_1}{q_0}$ – перенормированный параметр асимметрии.

Кроме того, влияние локальной моды среды-термостата учитывается через следующие параметры:

$$\tilde{\gamma}' = \frac{\tilde{\gamma}}{\omega^2} = \sqrt{\left[\frac{\omega_L^2}{\omega^2} + 1 + \frac{C^2}{\omega_L^2 \omega^2} \right]^2 - 4 \frac{\omega_L^2}{\omega^2}} = \sqrt{[\omega_L^{*'} + 1 + C^*]^2 - 4 \frac{\omega_L^2}{\omega^2}},$$

$$\tilde{x}_{1,2} = \frac{\tilde{x}_{1,2}}{\omega_0^2} = \frac{\gamma_{1,2}}{\omega_0^2},$$

где

$$\gamma_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right) - \sqrt{\left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right)^2 - 4\omega_0^2\omega_L^2} \right] > 0,$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right) + \sqrt{\left(\omega_L^2 + \omega_0^2 + \frac{C^2}{\omega_L^2} \right)^2 - 4\omega_0^2\omega_L^2} \right] > 0.$$

Расчет предэкспоненциального фактора по стандартной процедуре дает в пределе «слабой» диссипации

$$B = \frac{\omega_0^{3/2}(q_0 + q_1) \left[\operatorname{ch} \frac{\omega_0\beta}{2} - \left(1 + \left(\frac{q_0 - q_1}{q_0 + q_1} \right)^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\omega_0\beta}{2} \right)^{1/2} \right]}{2 \left[\pi \operatorname{sh} \frac{\omega_0\beta}{2} \left(1 + \left(\frac{q_0 - q_1}{q_0 + q_1} \right)^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\omega_0\beta}{2} \right)^{1/2} \right]^{1/2}}, \quad (2.86)$$

а с учетом взаимодействия с локальной модой среды-термостата получим

$$\tilde{B}^* = \frac{2\omega_0^2(q_0 + q_1)}{(2\pi\beta)^{1/2}} \left\{ \frac{\frac{A}{2\gamma_1} \left[\sqrt{\gamma_1}\beta \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt{\gamma_1}\beta}{2} \right) - 1 \right] + \frac{D}{2\gamma_2} \left[\sqrt{\gamma_2}\beta \operatorname{cth} \left(\frac{\sqrt{\gamma_2}\beta}{2} \right) - 1 \right]}{\left\{ \frac{A}{2} \left[\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_1}} \frac{\operatorname{ch} \left(\sqrt{\gamma_1} \left(\frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_1}\beta}{2}} - \frac{1}{\gamma_1} \right] + \frac{D}{2} \left[\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_2}} \frac{\operatorname{ch} \left(\sqrt{\gamma_2} \left(\frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_2}\beta}{2}} - \frac{1}{\gamma_2} \right] \right\}^{1/2}} + \right. \\ \left. + \frac{\frac{A}{2} \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_1}} \frac{\operatorname{ch} \left[\sqrt{\gamma_1} \left(\frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right]}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_1}\beta}{2}} \right) + \frac{D}{2} \left(\frac{1}{\gamma_2} - \frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_2}} \frac{\operatorname{ch} \left[\sqrt{\gamma_2} \left(\frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right]}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_2}\beta}{2}} \right)}{\left\{ \frac{A}{2} \left[\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_1}} \frac{\operatorname{ch} \left(\sqrt{\gamma_1} \left(\frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_1}\beta}{2}} - \frac{1}{\gamma_1} \right] + \frac{D}{2} \left[\frac{\beta}{2\sqrt{\gamma_2}} \frac{\operatorname{ch} \left(\sqrt{\gamma_2} \left(\frac{\beta}{2} - 2\tau_0 \right) \right)}{\operatorname{sh} \frac{\sqrt{\gamma_2}\beta}{2}} - \frac{1}{\gamma_2} \right] \right\}^{1/2}} \right\}. \quad (2.87)$$

Для последующих численных оценок используем введение обезразмеренных параметров

$$\omega_L^* = \left(\frac{\omega_L}{\omega_0} \right)^2, \quad C^* = \left(\frac{C}{\omega_L \omega_0} \right)^2,$$

$$\gamma_{1,2} = \omega_0^2 \left[\frac{\left(\frac{\omega_L^2}{\omega_0^2} + 1 + \frac{C^2}{\omega_L^2 \omega_0^2} \right) \mp \sqrt{\left(\frac{\omega_L^2}{\omega_0^2} + 1 + \frac{C^2}{\omega_L^2 \omega_0^2} \right)^2 - \frac{4\omega_L^2}{\omega_0^2}}}{2} \right] =$$

$$= \omega_0^2 \left[\frac{(\omega_L^* + 1 + C^*) \mp \sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*) - 4\omega_L^*}}{2} \right];$$

$$\sqrt{\gamma_{1,2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\left(\frac{\omega_L^2}{\omega_0^2} + \frac{C^2}{\omega_L^2 \omega_0^2} + 1 \right) \mp \sqrt{\left(\frac{\omega_L^2}{\omega_0^2} + \frac{C^2}{\omega_L^2 \omega_0^2} + 1 \right)^2 - \frac{4\omega_L^2}{\omega_0^2}}}{2}} =$$

$$= \omega_0 \sqrt{\frac{(\omega_L^* + 1 + C^*) \mp \sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*) - 4\omega_L^*}}{2}}.$$

При этом

$$A = -\frac{(\omega_L^2 - \gamma_1)}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{\omega_L^* - \frac{1}{2} \left[(\omega_L^* + 1 + C^*) - \sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*) - 4\omega_L^*} \right]}{2\sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*) - 4\omega_L^*}},$$

$$D = \frac{(\omega_L^2 - \gamma_2)}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{\omega_L^* - \frac{1}{2} \left[(\omega_L^* + 1 + C^*) + \sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*) - 4\omega_L^*} \right]}{2\sqrt{(\omega_L^* + 1 + C^*) - 4\omega_L^*}}.$$

Как и ранее:

$$\tau^* = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = \frac{1}{2\omega} \tau_0 = \frac{1}{2\omega} \left[\operatorname{arcsch} \left[\frac{1-b}{1+b} \operatorname{sh} \frac{\beta\omega}{2} \right] + \frac{\beta}{4} \right].$$

Условия применимости рассматриваемой модели обусловлены приближением разреженного газа пар «инстантон – антиинстантон». В рассматриваемой модели может происходить подавление кулоновских эффектов, если стартовая энергия частицы в КТ существенно превышает энергию кулоновского отталкивания: $U_0 \gg \frac{e^2}{a_0 + b_0}$. Дополняя это условие ограничением по величине напряженности электрического поля $E \ll \frac{U_0}{|e|(a_0 + b_0)}$, можем получить следующее значение напряженности:

$E \ll 3 \cdot 10^6$ В/м (например, для КТ из InSb).

На рис. 2.6 представлены результаты численного расчета вероятности туннелирования $\Gamma = B \exp(-S)$ в пределе слабой диссипации с учетом предэкспоненциального фактора (2.86), при этом величина действия определяется выражением (2.84). Как видно из рис. 2.6 и проведенного анализа, при значении приведенного параметра асимметрии равного 1 (или соответствующей величине приложенного электрического поля) на кривой вероятности проявляется термоуправляемый пик, величина которого растет с уменьшением температуры.

Рис. 2.6. Зависимость вероятности туннелирования от параметра асимметрии потенциала (пропорционального величине приложенного электрического поля) в пределе «слабой» диссипации

Как отмечалось выше, если в исходном потенциале (без приложенного электрического поля) левая яма оказывается более глубокой (так, в проведенном эксперименте использовалась игла кантилевера с радиусом около 40 нм, а ближайшая к игле циркониевая квантовая точка имела радиус от 2 до 4 нм), то при некотором значении поля потенциал становится симметричным. Именно в этот момент и наблюдается упомянутый пик (качественное сравнение с экспериментом представлено на рис. 2.7).

При отрицательном приложенном напряжении характер асимметрии потенциала качественно не меняется и соответствующий пик не наблюдается. Это косвенно подтверждается и другим экспериментом (Н. Yanagi, Т. Ohno // *Langmuir*. 1999. Vol. 15, № 14. Р. 4773), когда в процессе снятия туннельной ВАХ происходил одновременный рост квантовой точки из коллоидного золота (качественное сравнение с этим экспериментом приведено на рис. 2.8).

Рисунок 2.9 демонстрирует качественное соответствие одной из экспериментальных ВАХ и зависимостью вероятности туннелирования с учетом взаимодействия с локальной модой среды-термостата (экспоненциальный фактор оценивается формулой (2.85), предэкспоненциальный – формулой (2.87)). Предложенная теоретическая модель – это один из возможных механизмов, объясняющих особенности экспериментальных ВАХ в исследованных структурах. Данный подход не исключает модели по туннелированию носителей через наноразмерный кластер, включая случаи резонансного туннелирования и эффект кулоновской блокады, представленные в статье (Д. А. Антонов, Г. А. Вугальтер, О. Н. Горшков, А. П. Касаткин, Д. О. Филатов, М. Е. Шенина // *Вестник ННГУ. Сер.: Физика твердого тела*. 2007. № 3. С. 55).

Рис. 2.7. Сравнение экспериментальных ВАХ (кривые 3 и 2 на рис. 2.5) с теоретическими (пунктирными) кривыми для вероятности туннелирования в пределе «слабой» диссипации

Рис. 2.8. Сравнение экспериментальной туннельной ВАХ в случае единичной квантовой точки из коллоидного золота (Н. Yanagi, Т. Ohno // *Langmuir*. 1999. Vol. 15, № 14. Р. 4773) с теоретической (пунктирной) кривой для вероятности туннелирования в пределе «слабой» диссипации

Как видно из приведенных сравнений, стандартная модель диссипативного туннелирования с учетом влияния на двухъямный осцилляторный потенциал электрического поля дает неплохое качественное соответствие с отдельными экспериментальными ВАХ для металлических квантовых точек в системе с АСМ/ СТМ. Хотя на сегодняшний день нам не известны данные экспериментов по термоуправляемости выявленного единичного пика на соответствующей зависимости для вероятности туннелирования, аналогичный рост величины пика с уменьшением температуры наблюдался на термозависимости пиков кондактанса квантовых нитей (А. М. Bychkov, Т. М. Stace // Nanotechnology. 2007. Vol. 18. P. 185403). Кроме того, разработанная модель может служить теоретической основой метода контролируемого роста точек из коллоидного золота в нанодиапазоне, имеющего важное практическое применение как в нанoeлектронике, так и в наномедицине.

Рис. 2.9. Сравнение экспериментальной ВАХ (кривая 3 на рис. 2.5) с теоретической (пунктирной) кривой для вероятности туннелирования с учетом взаимодействия с локальной модой среды-термостата

2.4. Наблюдаемый осциллирующий режим 1D-диссипативного туннелирования с учетом двух локальных фононных мод широкозонной матрицы

Качественное сравнение теоретической кривой вероятности 1D-диссипативного туннелирования (с учетом влияния одной локальной фононной моды диэлектрической матрицы) и экспериментальной ВАХ для полупроводниковых КТ из InAs/GaAs(001) представлено на рис. 2.10. Как видно из рисунка из серии неэквидистантных пиков на экспериментальной ВАХ с теоретическими качественно совпадают только два, но один из них в рассматриваемой модели оказался неустойчивым. Полученный результат потребовал уточнения теоретической модели с точки зрения рассмотрения двух локальных фононных мод широкозонной матрицы в режиме слабой диссипации [65].

Рис. 2.10. Влияние электрического поля на асимметричный двухъямный осцилляторный потенциал. На рис. (б) представлен случай симметричного потенциала при определенном значении напряженности электрического поля

Постановка задачи аналогична используемой в разделе 2.3 модели 1D-диссипативного туннелирования с двухъямным осцилляторным потенциалом во внешнем электрическом поле при

конечной температуре и стандартным туннельным диссипативным гамильтонианом с учетом двух фононных мод широкозонной матрицы [65]. Последующие расчеты проводятся в системе единиц $\hbar = m = 1$. Можно показать, что 1D-квазиклассическое действие в одноинстантонном приближении с учетом влияния диэлектрической матрицы принимает вид

$$S_B = 2\omega_0^2(q_0 + q_1)q_0\tau_0 - \frac{2\omega_0^2(q_0 + q_1)^2\tau_0^2}{\beta} - \frac{4\omega_0^4(q_0 + q_1)^2}{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{v_n^2(v_n^2 + \omega_0^2 + \zeta_n)}, \quad (2.88)$$

где q_1 и q_0 – параметры перенормированного двухъямного осцилляторного потенциала во внешнем электрическом поле: $q_1 = b = b^* + \frac{|e|E}{\omega_0^2}$, $q_0 = a = a^* - \frac{|e|E}{\omega_0^2}$. Приложенное внешнее электрическое поле

вдоль координаты туннелирования меняет симметрию 1D-осцилляторного потенциала так, как показано на рис. 2.10. Предэкспоненциальный множитель определяется вкладом траекторий, близко расположенных от инстантона. Для этого мы должны разложить действие до квадратичного члена по отклонениям $q - q_B$ и проинтегрировать в функциональном пространстве. Тогда вероятность туннелирования в единицу времени можно записать в виде

$$\Gamma = B \exp(-S_B),$$

где предэкспоненциальный фактор B задается формулой [1, 65]

$$B = \left[\frac{S_0}{2\pi} \frac{\det\left(\frac{\delta^2 S}{\delta q^2}\right)_{q=-q_0}}{\det'\left(\frac{\delta^2 S}{\delta q^2}\right)_{q=q_B(\tau)}} \right]^{1/2}, \quad S_0 = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} \dot{q}_B^2(\tau) d\tau,$$

здесь $\det'$ означает, что нулевое собственное значение, соответствующее нулевой моде инстантона, опущено. Отметим, что вывод этой формулы предполагает приближение идеального инстантонного газа

$$\Gamma \ll (\Delta\tau)^{-1},$$

где $\Delta\tau$ – ширина перехода от положительного значения траектории к отрицательному. Вычисление предэкспоненциального множителя в рассматриваемой модели приводит к результату

$$B = \frac{2\omega_0^2(q_0 + q_1)^2}{(2\pi\beta)^{1/2}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2v_n \tau_0}{\lambda_{0n}} \right)^{-1/2},$$

где v_n – мацубаровские частоты; β – обратная температура; τ_0 – центр инстантона.

Рассмотрим (2.88) с учетом взаимодействия с двумя локальными фононными модами ($\omega_{L1} = \omega_2$ и $\omega_{L2} = \omega_3$). Для упрощения будем предполагать это взаимодействие достаточно малым,

т.е. $\frac{C_\alpha}{\omega_0^2} \ll 1$ и $\frac{C_\alpha}{\omega_L^2} \ll 1$. В этом случае $\zeta_n = v_n^2 \sum_{\alpha=2}^N \frac{C_\alpha^2}{\omega_\alpha^2(\omega_\alpha^2 + v_n^2)}$, где $v_n = \frac{2\pi n}{\beta}$, $\beta = \frac{\hbar}{kT}$,

C_α – коэффициенты взаимодействия туннелирующей частицы с локальными фононными модами диэлектрической матрицы:

$$\zeta_n = v_n^2 \frac{C_2^2}{\omega_2^2(\omega_2^2 + v_n^2)} + v_n^2 \frac{C_3^2}{\omega_3^2(\omega_3^2 + v_n^2)}, \quad \sin^2 v_n \tau_0 = \frac{1}{2}(1 - \cos 2v_n \tau_0). \quad (2.89)$$

Полученная аналитическая формула для вероятности 1D-диссипативного туннелирования с учетом влияния двух локальных фононных мод диэлектрической матрицы (из-за громоздкости мы эту формулу не приводим) позволяет исследовать особенности зависимости $\Gamma(E)$, что важно для

сравнения с экспериментальными туннельными ВАХ. При этом теоретические расчеты показали, что в зависимости вероятности 1D-диссипативного тунnelирования от напряженности внешнего электрического поля при конечной температуре и фиксированных параметрах диэлектрической матрицы возможен как осциллирующий, так и неосциллирующий режим туннельного переноса (рис. 2.11, 2.12).

Рис. 2.11. Теоретическая кривая для вероятности диссипативного туннелирования в неосциллирующем режиме переноса

Рис. 2.12. Сравнение теоретической кривой (1) для вероятности диссипативного туннелирования (в осциллирующем режиме) в модели с учетом влияния двух локальных мод среды с экспериментальной кривой (2)

Качественное сравнение теоретической кривой зависимости вероятности 1D-диссипативного туннелирования от напряженности внешнего электрического поля (с учетом влияния двух локальных фононных мод) и экспериментальной ВАХ для КТ InAs/GaAs(001) представлено на рис. 2.12. Из рис. 2.12 видно, что характерный неэквидистантный спектр пиков на экспериментальных ВАХ и соответствующие пики на теоретической зависимости вероятности 1D-диссипативного туннелирования от напряженности приложенного электрического поля имеют лучшее качественное совпадение, чем это имело место в случае модели, учитывающей влияние только одной локальной фононной моды широкозонной матрицы [65].

В работе [65] рассчитана вероятность 1D-диссипативного туннелирования в модельном двухъямном осцилляторном потенциале с учетом влияния двух промотирующих локальных фононных мод широкозонной матрицы в условиях внешнего электрического поля при конечной температуре. Рассмотрены как осциллирующий режим туннельного переноса в пределе слабой диссипации, так и неосциллирующий. Диссипативный режим туннелирования в пределе слабой диссипации, вероятно, может быть характерен для вырожденных полупроводников наряду с распространенным механизмом резонансного туннелирования. Именно осциллирующий режим диссипативного туннельного переноса нерезонансной природы позволил теоретически выявить хорошее качественное согласие с имеющимися экспериментальными данными. При экспериментальном исследовании туннельного спектра КТ учитывалось, что при комнатной температуре возможны процессы туннелирования электронов с поглощением и испусканием фононов. Следует отметить, что ранее [65] при интерпретации туннельных спектров КТ InAs/GaAs(001) данное обстоятельство не учитывалось.

Таким образом, наряду с режимом резонансного туннелирования [1, 65], как предполагалось ранее, необходимо также учитывать вклад диссипативного осциллирующего режима (в пределе «слабого» затухания), который может проявляться в туннельных ВАХ для полупроводниковых КТ, помещенных в широкозонную матрицу.

Список литературы

1. Управляемое диссипативное туннелирование. Туннельный транспорт в низкоразмерных системах : моногр. / В. Д. Кревчик, Э. Дж. Леггет, Ю. Н. Овчинников, М. Б. Семенов, П. В. Кревчик [и др.]. – М. : Физматлит, 2011. – 496 с.
2. Тернов, И. М. Квантовая механика и макроскопические эффекты / И. М. Тернов, В. Ч. Жуковский, А. В. Борисов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 1993. – 198 с.
3. Гантмахер, В. Ф. Встречи в мезоскопической области. (Мезоскопические и сильнокоррелированные электронные системы: «Черноголовка – 97») / В. Ф. Гантмахер, М. В. Фейгельман // Успехи физических наук. – 1998. – Т. 168, № 2. – С. 113–116.
4. Aleiner I. L. Role of divergence of classical trajectories in quantum chaos / I. L. Aleiner, A. I. Larkin // Phys. Rev. E. – 1997. – Vol. 55, № 2. – P. 1243–1246.
5. Andreev, A. V. Semiclassical field theory approach to quantum chaos / A. V. Andreev, B. D. Simons, O. Agam, B. L. Altshuler // Nucl. Phys. B. – 1996. – Vol. 482. – P. 536–566.
6. Лихарев, К. К. Реально-квантовые макроскопические эффекты в слабой сверхпроводимости / К. К. Лихарев // УФН. – 1983. – Т. 139, № 1. – С. 169–184.
7. Caldeira, A. O. Influence of dissipation on quantum tunneling in macroscopic systems / A. O. Caldeira, A. J. Leggett // Phys. Rev. Lett. – 1981. – Vol. 46, № 4. – P. 211–214.
8. Affleck, I. Quantum-statistical metastability / I. Affleck // Phys. Rev. Lett. – 1981. – Vol. 46, № 6. – P. 388–391.
9. Wolynes, P. G. Quantum theory of activated events in condensed phases / P. G. Wolynes // Phys. Rev. Lett. – 1981. – Vol. 47, № 13. – P. 968–971.
10. Langer, J. S. Theory of the condensation point / J. S. Langer // Ann. of Phys. 1967. – Vol. 41, № 1. – P. 108–157.
11. Callan, C. G. Fate of the false vacuum. II. First quantum corrections / C. G. Callan, S. Coleman // Phys. Rev. D. – 1977. – Vol. 16, № 6. – P. 1762–1768.
12. Schmid, A. On a quasiclassical Langevin equation / A. Schmid // J. of Low Temp. Phys. – 1982. – Vol. 49, № 5/6. – P. 609–626.
13. Coleman, S. Fate of the false vacuum: Semiclassical theory / S. Coleman // Phys. Rev. D. – 1977. – Vol. 15, № 10. – P. 2929–2936.
14. Sethna, J. P. Phonon coupling in tunneling systems at zero temperature: An instanton approach / J. P. Sethna // Phys. Rev. B. – 1981. – Vol. 24, № 2. – P. 698–713.
15. Sethna, J. P. Decay rates of tunneling centers coupled to phonons: An instanton approach / J. P. Sethna // Phys. Rev. B. – 1982. – Vol. 25, № 8. – P. 5050–5063.
16. Ларкин, А. И. Квантовое туннелирование с диссипацией / А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников // Письма в ЖЭТФ. – 1983. – Т. 37, № 7. – С. 322–325.

17. Larkin, A. I. Decay of the supercurrent in tunnel junctions / A. I. Larkin, Yu. N. Ovchinnikov // Preprint Istituto di Cibernetica del Consiglio Nazionale delle Ricerche Arco Felice. – Napoli. – 1983. – 23 p.
18. Ларкин, А. И. Квантовомеханическое туннелирование с диссипацией / А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников // Предэкспоненциальный множитель / А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1984. – Т. 86, № 2. – С. 719–726.
19. Ларкин, А. И. Затухание тока в сверхпроводящих контактах при неравновесной функции распределения электронов / А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1984. – Т. 87, № 5(11). – С. 1842–1856.
20. Ларкин, А. И. Квантовая локализация в нерегулярных системах разной мерности (макроскопическое квантовое туннелирование с диссипацией) / А. И. Ларкин. – М. : Изд-во МИФИ, 1985. – 40 с.
21. Мельников, В. И. О броуновском движении квантовых частиц / В. И. Мельников, С. В. Мешков // Письма в ЖЭТФ. – 1983. – Т. 38, № 3. – С. 111–113.
22. Larkin, A. I. Decay of the supercurrent in tunnel junctions / A. I. Larkin, Yu. N. Ovchinnikov // Phys. Rev. B. – 1983. – Vol. 28, № 11. – P. 6281–6285.
23. Ивлев, Б. И. Туннельно-активационное движение струны через потенциальный барьер / Б. И. Ивлев, В. И. Мельников // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1986. – Т. 91, № 5(11). – С. 1944–1954.
24. Ивлев, Б. И. Распад метастабильных состояний при наличии близких подбарьерных траекторий / Б. И. Ивлев, Ю. Н. Овчинников // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1987. – Т. 93, № 2 (8). – С. 668–679.
25. Grabert, H. Thermal enhancement of the quantum decay rate in a dissipative system / H. Grabert, U. Weiss // Z. Phys. B. – 1984. – Vol. 56, № 2. – P. 171–183.
26. Caldeira, A. O. Quantum tunnelling in a dissipative system / A. O. Caldeira, A. J. Leggett // Ann. of Phys. – 1983. – Vol. 149, № 2. – P. 374–456.
27. Мельников, В. И. Активационно-туннельный распад метастабильных состояний / В. И. Мельников // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1984. – Т. 87, № 2(8). – С. 663–673.
28. Dekker, H. Classical and quantum mechanics of the damped harmonic oscillator / H. Dekker // Phys. Repts. – 1981. – Vol. 80, № 1. – P. 1–112.
29. Schmid, A. Quasiclassical wave function in multidimensional quantum decay problems / A. Schmid // Ann. of Phys. – 1986. – Vol. 170, № 2. – P. 333–369.
30. Chakravarty, S. Quantum coherence in dissipative systems / S. Chakravarty // Physica B. – 1984. – Vol. 126, № 1–3. – P. 385–391.
31. Заикин, А. Д. К теории квантового туннелирования с линейной диссипацией / А. Д. Заикин, С. В. Панюков // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1985. – Т. 89, № 5(11). – С. 1890–1900.
32. Schmid, A. Repeated measurements on dissipative linear quantum systems / A. Schmid // Ann. of Phys. – 1987. – Vol. 173, № 1. – P. 103–148.
33. Dynamics of the dissipative two-state system / A. J. Leggett, S. Chakravarty, A. J. Dorsey, M. P. A. Fisher, A. Garg, W. Zwerger // Rev. Mod. Phys. – 1987. – Vol. 59, № 1. – P. 1–85.
34. Каган, Ю. О туннелировании с «диссипацией» / Ю. Каган, Н. В. Прокофьев // Письма в ЖЭТФ. – 1986. – Т. 43, № 9. – С. 434–437.
35. Chakravarty, S. Dynamics of the two-state system with Ohmic dissipation / S. Chakravarty, A. J. Leggett // Phys. Rev. Lett. – 1984. – Vol. 52, № 1. – P. 5–8.
36. Waxman, D. Dissipative quantum tunneling at finite temperatures / D. Waxman, A. J. Leggett // Phys. Rev. B. – 1985. – Vol. 32, № 7. – P. 4450–4468.
37. Grabert, H. Quantum tunneling rates for asymmetric double-well systems with Ohmic dissipation / H. Grabert, U. Weiss // Phys. Rev. Lett. – 1985. – Vol. 54, № 15. – P. 1605–1608.
38. Leggett, A. J. Quantum tunneling in the presence of an arbitrary linear dissipation mechanism / A. J. Leggett // Phys. Rev. B. – 1984. – Vol. 30, № 3. – P. 1208–1218.
39. Сумецкий, М. Ю. Неупругое туннелирование частицы, взаимодействующей с колебаниями / М. Ю. Сумецкий // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1985. – Т. 89, № 2(8). – С. 618–634.
40. Овчинников, Ю. Н. Динамика частицы в двухъямном потенциале / Ю. Н. Овчинников // ЖЭТФ. – 1988. – Т. 94, № 5. – С. 365–375.
41. Ивлев, Б. И. О динамике частицы в двухъямном потенциале / Б. И. Ивлев // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1988. – Т. 94, № 7. – С. 333–343.
42. Weiss, U. Incoherent tunneling in a double well / U. Weiss, H. Grabert, P. Hanggi, P. Riseborough // Phys. Rev. B. – 1987. – Vol. 35, № 18. – P. 9535–9551.
43. Ларкин, А. И. Затухание сверхпроводящего тока в туннельных контактах / А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1983. – Т. 85, № 4(10). – С. 1510–1519.
44. Булыженков, И. Э. Неравновесные явления в контактах сверхпроводников / И. Э. Булыженков, Б. И. Ивлев // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1978. – Т. 74, № 1. – С. 224–235.

45. Ларкин, А. И. Туннельный эффект между сверхпроводниками в переменном поле / А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1966. – Т. 51, № 5(11). – С. 153–51543.
46. Ларкин, А. И. Нелинейные эффекты при движении вихрей в сверхпроводниках / А. И. Ларкин, Ю. Н. Овчинников // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1977. – Т. 73, № 1 (7). – С. 299–312.
47. Larkin, A. I. Secondary quantum macroscopic effects in weak superconductivity / A. I. Larkin, K. K. Likharev, Yu. N. Ovchinnikov // Physica. B. – 1984. – Vol. 126, № 1–3. – P. 414–422.
48. Ivlev, B. I. Stimulation of tunneling by a high-frequency field: decay of zero-voltage state in Josephson junctions / B. I. Ivlev, V. I. Mel'nikov // Phys. Rev. Lett. – 1985. – Vol. 55, № 15. – P. 1614–1617.
49. Ларкин, А. И. Вольт-амперная характеристика мезоскопических полупроводниковых контактов / А. И. Ларкин, К. А. Матвеев // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1987. – Т. 93, № 3(9). – С. 1030–1038.
50. Buttiker, M. Thermal activation in extremely underdamped Josephson-junction circuits / M. Buttiker, E. P. Harris, R. Landauer // Phys. Rev. B. – 1983. – Vol. 28, № 3. – P. 1268–1275.
51. Ambegaokar, V. Quantum dynamics of tunneling between superconductors / V. Ambegaokar, U. Eckern, G. Schon // Phys. Rev. Lett. – 1982. – Vol. 48, № 25. – P. 1745–1748.
52. Schon, G. Quantum shot noise in tunnel junctions / G. Schon // Phys. Rev. B. – 1985. – Vol. 32, № 7. – P. 4469–4485.
53. Заикин, А. Д. Квантовый распад метастабильных токовых состояний в сверхпроводящих контактах / А. Д. Заикин, С. В. Панюков // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1985. – Т. 89, № 1. – С. 242–257.
54. Каган, Ю. Электронный поляронный эффект и квантовая диффузия тяжелой частицы в металле / Ю. Каган, Н. В. Прокофьев // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1986. – Т. 90, № 6. – С. 2176–2195.
55. Каган, Ю. Взаимодействие двухуровневых систем в металле со слабым внешним полем / Ю. Каган, Н. В. Прокофьев // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1990. – Т. 97, № 5. – С. 1698–1727.
56. Каган, Ю. Особая роль двухфононного взаимодействия в задаче квантового туннелирования с диссипацией в кристалле / Ю. Каган, Н. В. Прокофьев // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1989. – Т. 96, № 6. – С. 2209–2228.
57. Инстантонная азбука / А. И. Вайнштейн, В. И. Захаров, В. А. Новиков, М. А. Шифман // Успехи физических наук. – 1982. – Т. 136, № 4. – С. 553–591.
58. Раджараман, Р. Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля : пер. с англ. / Р. Раджараман. – М. : Мир, 1985. – 416 с.
59. Coleman, S. The uses of instantons / S. Coleman // The ways of subnuclear physics / ed. by A. Zichichi. – L. ; N.Y. : Plenum press, 1979. – P. 805–941.
60. Фейнман Р. Статистическая механика : пер. с англ. / Р. Фейнман. – М. : Мир, 1975. – 408 с.
61. Ландау, Л. Д. Квантовая механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М. : Наука, 1989. – 768 с.
62. Справочник по специальным функциям : пер. с англ. / под ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
63. Фейнман, Р. Квантовая механика и интегралы по траекториям : пер с англ. / Р. Фейнман, А. Хиббс. – М.: Мир, 1968. – 384 с.
64. Управляемое диссипативное туннелирование во внешнем электрическом поле / В. Ч. Жуковский, О. Н. Горшков, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, Е. В. Грозная, Д. О. Филатов, Д. А. Антонов // Вестник Московского государственного университета. Сер.: Физика. Астрономия, 2009. – № 1. – С. 27–31.
65. Резонансное туннелирование с участием фононов и его фононный контроль / Ф. В. Кусмарцев, В. Д. Кревчик, М. Б. Семенов, Д. О. Филатов, А. В. Шорохов, А. А. Бухараев, Ю. И. Дахновский, А. В. Николаев, Н. А. Пятаев, Р. В. Зайцев, П. В. Кревчик, И. А. Егоров, К. Ямамото, А. К. Арынгазин // Письма в ЖЭТФ. – 2016. – Т. 104, вып. 6. – С. 406–412.

Кревчик, В. Д.

Квантовый размерный эффект и квантовое туннелирование с диссипацией как основа представлений современной наноэлектроники. Часть II. Квантовое туннелирование с диссипацией / В. Д. Кревчик, П. В. Кревчик, М. Б. Семенов // Инжиниринг и технологии. – 2016. – Vol. 1(1). – DOI 10.21685/2587-7704-2016-1-1-2