УДК 533.9

ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УСКОРЕННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ С ИОНАМИ ТЯЖЁЛЫХ ПРИМЕСЕЙ В ПЛАЗМЕ ТОКАМАКА

*В.Е. Жоголев, С.В. Коновалов**НИИ «Курчатовский институт», Москва, Россия*

Рассматриваются характеристики взаимодействия ускоренных электронов с частично ионизованными ионами тяжёлых примесей в плазме токамака. На основе модели Томаса—Ферми рассчитаны зависимости форм-фактора от изменения импульса электрона при упругих столкновениях, что позволяет корректно, с учётом релятивистских эффектов, определять дифференциальное сечение рассеяния и транспортную частоту столкновений. Показано, что для энергичных электронов при наличии в плазме не сильно ионизованных тяжёлых примесей транспортная частота упругих столкновений может существенно увеличиваться по сравнению со случаем плазмы из полностью ионизованных ионов с эквивалентным эффективным зарядом. Именно такая ситуация, по-видимому, реализуется при срывах разряда в токамаке, сопровождаемых формированием высокоэнергичных убегающих электронов. Кроме того, в работе предлагается алгоритм расчёта столкновительных потерь энергии быстрых электронов в частично ионизованной плазме, который является обобщением случая торможения электронов в нейтральных средах. Анализ столкновительного торможения электронов при прохождении частично ионизованной среды показал, что формальная замена в интеграле столкновений электронной плотности плазмы суммой плотностей свободных и половины связанных электронов обеспечивает достаточно высокую точность $\sim 10\%$ вычисления потерь энергии ускоренных электронов. В целом использование результатов работы позволяет аккуратно рассчитывать рассеяние и торможение ускоренных электронов в плазме, содержащей ионы примесей с высоким зарядом ядра.

Ключевые слова: ускоренные электроны, столкновения с тяжёлыми примесями, форм-фактор в модели Томаса—Ферми.

CHARACTERISTICS OF INTERACTION OF ENERGETIC ELECTRONS WITH HEAVY IMPURITY IONS IN A TOKAMAK PLASMA

*V.E. Zhogolev, S.V. Kononov**NRC «Kurchatov Institute», Moscow, Russia*

Collisions of the fast electrons with partially stripped high-Z impurity ions in a tokamak plasma are considered. Thomas-Fermi model is used in calculation of the form factor which describes the screening of the potential of impurity nuclei. Calculated dependence of the form factor on the transferred momentum of the fast electron at elastic collisions allows accurate evaluation of the differential scattering cross section and transport collision frequency accounting for the relativistic effects. Transport collision frequency for the energetic electrons in the plasma with partially stripped impurity ions is shown to exceed strongly that one calculated for the fully ionized plasma with equivalent effective charge. This is the case that realized in the tokamak plasma disruptions accompanied by generation of the runaway electrons. An algorithm to calculate collisional energy loss of the fast electrons is suggested as a generalization of that for electron drag in neutral media. Analysis of the collisional drag of the fast electrons on the partially ionized plasma demonstrates that formal replacement in the collisional integral of the electron plasma density by the sum of the free electron density and a half of the bounded electron density provides sufficiently high, $\sim 10\%$, accuracy in evaluation of the fast electron energy losses. Presented results allow accurate evaluation of the collisional effects in a simulation of the fast electron dynamics.

Key words: energetic electrons, collisions with heavy impurities, form factor in Thomas—Fermi model.

ВВЕДЕНИЕ

Формирование убегающих электронов при срывах разряда в токамаке представляет серьёзную угрозу элементам первой стенки и целостности конструкции установки. Ожидается [1], что в сооружаемом международном токамаке ИТЭР амплитуда тока убегающих электронов при неуправляемом срыве разряда может достигать порядка 10 МА, полная кинетическая энергия популяции убегающих электронов составлять десятки МДж. При этом разработка адекватных мер для предотвращения формирования убегающих электронов или их подавления является необходимым условием для осуществления миссии проекта ИТЭР в целом.

До настоящего времени наиболее апробированным средством смягчения последствий срыва разряда в токамаке, включая переизлучение части теплового потока из плазмы и, следовательно, снижение теплового потока в дивертор вместе с более равномерным распределением тепловой нагрузки по поверхности первой стенки, является превентивная массивированная инжекция примесей инертных газов. Однако при такой инжекции за счёт высокой излучательной способности используемых примесей температура

плазмы после теплового срыва падает до нескольких эВ. Соответственно падает проводимость плазмы и вырастает продольное электрическое поле для поддержания тока. Тем самым создаются необходимые условия для генерации убегающих электронов.

Согласно общепризнанным на сегодня воззрениям в установках с большим током плазмы доминирующую роль будет играть лавинообразное размножение убегающих электронов (УЭ), обусловленное близкими столкновениями релятивистских ускоренных электронов с холодными электронами основной плазмы [2, 3]. При этом, следуя работе [3], основным механизмом, препятствующим ускорению пучка УЭ продольным электрическим полем, является столкновительное трение об электроны основной плазмы с учётом поправок, вносимых рассеянием на ионах как основной плазмы, так и примесей, парциальные вклады от которых в интеграле столкновений записывались в терминах эффективного заряда плазмы $Z_{эф}$. При малой температуре плазмы после теплового срыва разряда степень ионизации примесей оказывается невысокой и величина эффективного заряда плазмы $Z_{эф}$ мало отличается от единицы. При этом для столкновительной диссипации УЭ в ИТЭР согласно рассмотрению [1], опирающемуся на модель [3], необходимо поднять плотность электронов (включая как свободные, так и связанные) плазмы до некоторой критической величины, названной в [1] плотностью Розенблюта. Прямые оценки, однако, показывают, что для этого потребуются инжекция инертного газа в количестве, многократно превышающем пределы системы откачки ИТЭР. В то же время уже сейчас имеется достаточно экспериментальных доказательств того, что подавление тока УЭ при инжекции инертных газов имеет место уже при плотности электронов на порядок меньше, чем «розенблютовская» [4]. В этой же работе была впервые высказана гипотеза о том, что наблюдаемое падение тока УЭ связано с рассеянием быстрых электронов на ядрах не до конца ионизованных примесей с высоким зарядом ядра.

Следует также отметить, что экспериментально измеренная функция распределения быстрых электронов [4, 5] также значительно отличается от рассчитанной согласно модели [3]. Так, вместо узкого продольного пучка ускоренных электронов в эксперименте наблюдается значительно более широкое распределение, для формирования которого необходимо существование эффективного механизма рассеяния ускоренных электронов. Таким механизмом также может служить рассеяние на примесях с высоким зарядом ядра, поскольку само формирование пучка ускоренных электронов в современном эксперименте с относительно «чистой» плазмой весьма затруднительно без специальной инжекции примеси в виде газа или таблеток.

Таким образом, главной задачей настоящей работы является анализ специфики упругого рассеяния быстрых электронов в плазме, содержащей частично ионизованные примеси с высоким зарядом ядра Z_0 . Эта задача в пределе аналогична хорошо исследованной проблеме о прохождении пучка электронов через нейтральные среды [6]. При этом большую роль играет правильный способ учёта влияния форм-фактора атомов на дифференциальное сечение рассеяния. Форм-фактор для сильно ионизованных ионов исследовался в работе [7] аналитическими методами, в результате чего были получены определённые аппроксимации его зависимости от степени ионизации и изменения импульса при столкновениях. Однако эти аппроксимации дают заметную ошибку для первых ионов тяжёлых примесей. В данной работе форм-фактор ионов рассчитывается точно с использованием численных методов, для чего решается дифференциальная задача Томаса—Ферми для экранированного потенциала иона. Кроме того, рассчитываются другие характеристики, производные от дифференциального сечения рассеяния, которые входят в часть интеграла столкновений, связанную с ионами примеси. Показано, что для энергичных электронов при наличии в плазме частично ионизованных тяжёлых примесей транспортная частота упругих столкновений может очень сильно увеличиваться по сравнению со случаем плазмы из полностью ионизованных ионов с эквивалентным эффективным зарядом.

Кроме того, в работе предлагается алгоритм расчёта столкновительных потерь энергии быстрых электронов в частично ионизованной плазме, который является обобщением случая торможения электронов в нейтральных средах.

В целом использование результатов работы позволяет аккуратно рассчитывать рассеяние и торможение ускоренных электронов в плазме, содержащей ионы примесей с высоким зарядом ядра.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ

Упругие столкновения электронов с ионами плазмы можно рассматривать как их рассеяние в кулоновском поле ядра, которое экранируют связанные электроны. В соответствии с квантовой теорией [8] дифференциальное сечение этого процесса можно записать в виде

$$d\sigma = \frac{4a_B^2}{q^4} |Z_0 - F(q)|^2 d\Omega; \quad q = 2gp \sin(\gamma/2). \quad (1)$$

Здесь $F(q)$ — форм-фактор атомного остова; p — импульс сталкивающегося электрона в единицах $m_e c$; γ — угол рассеяния. Константы в (1) равны

$$a_B = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} = 0,5292 \cdot 10^{-8} \text{ см}; \quad g = \frac{a_B m_e c}{\hbar} = \frac{\hbar c}{e^2} = 137,37. \quad (2)$$

Учёт поправок (формула 80.9 в работе [9]) для релятивистских электронов даёт

$$d\sigma_{\text{RE}} = (1 + p^2) \left(1 - \frac{p^2}{1 + p^2} \sin^2(\gamma/2) \right) d\sigma. \quad (3)$$

Здесь первый множитель в круглых скобках учитывает переход от массы покоя к массе движения, а второй множитель определяет релятивистский эффект подавления рассеяния назад. В формуле (3) угол рассеяния γ можно выразить через q :

$$d\sigma_{\text{RE}} = \left(1 + p^2 - \frac{q^2}{4g^2} \right) d\sigma. \quad (4)$$

По определению выражение для форм-фактора имеет вид

$$F(q) = \int n(r) \exp(-iqr) d^3r. \quad (5)$$

Здесь $n(r)$ — плотность электронов на расстоянии от ядра r , которое измеряется в атомных единицах. Если в формуле (5) разложить в ряд экспоненту по степеням её аргумента и проинтегрировать по угловым переменным, то получим

$$F(q) = \xi - 4\pi \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} q^{2i}}{(2i)!(2i+1)} \int_0^{\infty} n(r) r^{2i+2} dr, \quad (6)$$

где ξ — число связанных электронов. Для расчёта концентрации электронов около ядра используем модель Томаса—Ферми для экранировки кулоновского потенциала. В соответствии с теорией [8] имеем

$$n(r) = \frac{1}{3\pi^2} [2\phi(r)]^{3/2}; \quad \phi(r) = \frac{Z_0}{r} \chi(x); \quad (7)$$

$$x = \frac{rZ_0^{1/3}}{b}; \quad b = \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{4} \right)^{2/3} = 0,885. \quad (8)$$

При этом функция $\chi(x)$ удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$x^{1/2} \frac{d^2 \chi}{dx^2} = \chi^{3/2}; \quad \chi(0) = 1; \quad \chi(x_0) = 0. \quad (9)$$

Здесь параметр x_0 определяет границу области, в которой находятся связанные электроны. Для каждого конкретного иона заданной примеси x_0 находится из следующего уравнения:

$$-x_0 d\chi/dx|_{x=x_0} = 1 - \xi/Z_0. \quad (10)$$

При этом для атомов $\xi = Z_0$ область экранирования формально надо считать неограниченной $x_0 \rightarrow \infty$. Решению задачи Томаса—Ферми (9), (10) как с помощью численного интегрирования, так и на основе приближенных аналитических методов посвящено достаточно много работ, подробный обзор которых

приведён в [10]. В частности, в [10] имеются таблицы значений функции $\chi(x)$ для атомов и ионов с различной степенью ионизации. Однако в практических целях целесообразнее самим повторить численные расчёты, а не заниматься интерполяцией результатов из таблиц в промежуточные точки для проведения интегрирования с желаемой точностью при вычислении форм-фактора по формулам (5) или (6).

Рис. 1. Функция Томаса—Ферми для четырёх разных степеней ионизации аргона, значения которых указаны рядом с кривыми: •, ■, ▲ — значения аппроксимации Зоммерфельда (11) при степенях ионизации 0, 3/18, 9/18 соответственно; - - - функция $\exp(-x)$

Использованный алгоритм численного решения краевой задачи (9) при заданной границе области основан на разностных методах решения уравнения второго порядка с итерациями для коррекции нелинейной правой части уравнения. Число точек в сетке было достаточно большим (5001 точка). Для решения уравнения (10) использовался метод деления пополам. На рис. 1 для примера показаны четыре решения $\chi(x)$ для аргона ($Z_0 = 18$) с кратностью его ионизации $Z = Z_0 - \xi = 0, 1, 3, 9$, что соответствует степеням ионизации Z/Z_0 (их значения 0, 1/18, 3/18, 9/18 указаны рядом с кривыми). Отметим, что аналогичные графики приведены в [8] и [10]. Кроме того, на этом рисунке пунктиром показана упрощённая функция экранировки $\exp(-x)$, которая использовалась в работе [6] вместо точного решения для атомов. Отметим, что такая замена оправдана только при не очень больших значениях $x < 1$. На этом же рисунке маркерами показаны значения, полученные на основе аппроксимации Зоммерфельда (формула 4.37 из [10]):

$$\chi = \frac{1}{(1+u)^{\lambda_2/2}} \left[1 - \left(\frac{1+u}{1+u_0} \right)^{\lambda_1/\lambda_2} \right], \quad (11)$$

где $u = (x/144)^{1/3} \lambda_2$; $u_0 = (x_0/144)^{1/3} \lambda_2$; $\lambda_2 = 0,772$; $\lambda_1 = 7,772$.

Для атомов значение квадратной скобки в (11) следует считать единицей, поскольку $u_0 \rightarrow \infty$. Для ионов значение x_0 бралось в соответствии с численными расчётами. В целом для младших ионов ($Z/Z_0 < 0,5$) точность формулы (11) составляет 10%. Для старших ионов, когда $x_0 < 1$, эта аппроксимация даёт значение $\chi(0)$ заметно меньше, чем единица.

Рис. 2. Функция форм-фактора $F(y)$ «младших» ионов аргона ($Z_0 = 18$) (кратность ионизации указана рядом с кривыми): +, • — результаты применения аналитической аппроксимации [7] для ионов с кратностью ионизации 3 и 9 соответственно

даёт значение $\chi(0)$ заметно меньше, чем единица. В дальнейшем мы не будем использовать формулу (11), но показанное её совпадение с численным решением демонстрирует его корректность. Подставляя в (6) соотношения (7) и (8), получим следующее выражение для форм-фактора:

$$F = \xi - Z_0^{1/3} q^2 f(q/Z_0^{1/3}); \quad (12)$$

$$f(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1} a_i y^{2i-2}}{(2i)!(2i+1)};$$

$$a_i = \frac{8\sqrt{2}}{3\pi} b^{2i+3/2} \int_0^{x_0} \chi^{3/2} x^{2i+1/2} dx. \quad (13)$$

На рис. 2 сплошными кривыми показаны результаты численного расчёта по формуле (12) функции $F(q/Z_0^{1/3})$ для атома и «младших» ионов аргона. При этом число связанных электронов

равно значению $\xi = F(0)$. Форм-фактор является спадающей до нуля функцией, причём с увеличением её аргумента исчезает зависимость от кратности ионизации. Для сравнения на этом же рисунке маркерами для двух ионов со степенью ионизации $Z/Z_0 = 3/18, 9/18$ показаны значения аналитической аппроксимации, которая получена в работе [7] при предположении $Z/Z_0 \ll 1$. Видно, что для Ar^{+3} такая аппроксимация не очень хорошо работает, в то время как при $Z > 8$ она вполне удовлетворительная.

На рис. 3 показан форм-фактор для «старших» ионов аргона. Этот график построен в логарифмическом масштабе, поэтому легко виден примерно показательный характер спада форм-фактора при больших аргументах. Кроме того, при больших аргументах ($y = q/Z_0^{1/3} > 20$) его значения становятся достаточно малыми: $F(y = 24,45) = 0,2$, $F(y = 40) = 0,1$. Отметим, что изменению импульса электрона при столкновении с ионами аргона на одну единицу $\Delta p = 1$ соответствует значение $y = 52,4$.

Значение форм-фактора для достаточно больших значений x приведено в табл. 1.

Таблица 1. Значение $F(y = q/Z_0^{1/3})/Z_0$ для ионов с различным числом ξ связанных электронов

ξ/Z_0	$F(y_1 = 6,5)/Z_0$	$F(y_2 = 13)/Z_0$	$F(y_3 = 26)/Z_0$	$F(y_4 = 39)/Z_0$	$F(y_5 = 52)/Z_0$
$\geq 3/18$	0,07143	0,02723	0,01027	0,00567	0,00382
2/18	0,06681	0,02723	0,01027	0,00567	0,00382
1/10	0,06425	0,02713	0,01027	0,00567	0,00382
1/18	0,04576	0,02689	0,01027	0,00567	0,00382

Рис. 3. Функция форм-фактора $F(y)$ для «старших» ионов аргона ($Z_0 = 18$) (кратность ионизации указана рядом с кривыми): $\triangle, \bullet, \blacklozenge$ — результаты применения аналитической аппроксимации [7] для ионов с кратностью ионизации 12, 15 и 17 соответственно

СЕЧЕНИЯ И ЧАСТОТЫ УПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ

Для анализа характеристик упругих столкновений электронов с ионами будем различать рассеяние на большие $\gamma_0 < \gamma < \pi$ и малые углы $0 < \gamma < \gamma_0$. Выбор зависимости от импульса граничного значения угла $\gamma_0(p)$ имеет определённый произвол. Всё зависит от того, какие эффекты требуется учесть наилучшим образом, вопрос об алгоритме разделения близких и далёких столкновений обсудим позже. Сечение и частота σ_{RE} и ν_{RE} столкновений с рассеянием на большие углы определяются следующим образом:

$$\sigma_{\text{RE}} = \int_{\gamma > \gamma_0} d\sigma_{\text{RE}}; \quad \nu_{\text{RE}} = \frac{cp}{\sqrt{1+p^2}} \sigma_{\text{RE}} n_i. \quad (14)$$

Если электроны имеют релятивистскую энергию и выбран угол $\gamma_0 \sim 1$ (рассматриваются столкновения с большой передачей импульса), то форм-фактор становится малым и им можно пренебречь. Для этого случая имеем

$$\sigma_{\text{RE}} \cong \frac{\pi a_B^2 Z_0^2}{g^4 p^4} \{ (1+p^2) [\sin^2(\gamma_0/2) - 1] + 2p^2 \ln[\sin(\gamma_0/2)] \}. \quad (15)$$

Потеря направленной скорости пучка электронов характеризуется транспортным сечением, которое в нерелятивистском случае определяется как

$$\sigma_t = \int_{\gamma < \gamma_0} (1 - \cos \gamma) d\sigma = \frac{4\pi a_B^2}{g^4 p^4} \int_0^{q_0} (Z - F)^2 dq/q. \quad (16)$$

Проведя интегрирование с учётом особенности при малых импульсах, получим

$$\sigma_t = \frac{4\pi a_B^2}{g^4 p^4} \left\{ [Z_0 - \xi]^2 \Lambda + 2Z_0[Z_0 - \xi]I_1(y_0) + Z_0^2 I_2(y_0) \right\}; \quad y_0 = q_0/Z^{1/3}; \quad (17)$$

$$I_1(y_0) = \int_0^{y_0} f(y) y dy; \quad I_2(y_0) = \int_0^{y_0} f^2(y) y^3 dy. \quad (18)$$

Здесь Λ — кулоновский логарифм, который классическим образом для физики плазмы учитывает экранирование заряда иона; q_0 — предел интегрирования:

$$q_0 = 2gp \sin(\gamma_0/2) \leq 2gp. \quad (19)$$

Напомним, что функция $f(y)$ зависит как от параметра, так и от степени ионизации частиц примеси.

Рис. 4. Зависимость от верхнего предела интегралов I_1 и I_2 , входящих в выражение (17), для транспортного сечения, первого иона аргона Ar^{+1} : ♦ — аппроксимация по формуле (21) зависимости интегралов I_1 и I_2 от верхнего предела

Интегралы в определениях (18) в зависимости от верхнего предела можно находить численно. На рис. 4 показаны рассчитанные зависимости $I_1(y)$ и $I_2(y)$ для иона Ar^{+1} . При заметных изменениях импульса учёт форм-фактора при расчёте транспортного сечения может достаточно сильно его увеличить по сравнению со случаем рассеяния на точечном центре с зарядом иона. Так, при $y_0 = q_0/Z_0^{1/3} = 2$ для иона Ar^{+1} выражение в фигурных скобках формулы (17) равно $\Lambda + 139$, при $y_0 = 40$ оно увеличивается до $\Lambda + 963$. Если учесть, что типичным значением является $\Lambda = 20$, то при указанных значениях y_0 получаем увеличение транспортного сечения в 8 и 50 раз соответственно по сравнению со случаем голого ядра с единичным зарядом.

При значениях аргумента $y_0 > y_*$, где $y_* \gg 1$ — достаточно большое число, рост интегралов $I_1(y)$ и $I_2(y)$ имеет логарифмический характер. Чтобы понять это, представим интегралы (18) в следующем виде:

$$I_k(y_0) = I_k(y_*) + \int_{y_*}^{y_0} f^k(y) y^{2k-1} dy; \quad y \quad k = 1, 2. \quad (20)$$

Согласно определению (12) форм-фактор выражается через функцию $f(y)$ следующим образом:

$$f(y) = [\xi - F(y)]/(Z_0 y^2). \quad (21)$$

Учитывая спадающий характер зависимости $F(y)$, получаем следующие оценки сверху и снизу:

$$[\xi - F(y_*)]/(Z_0 y^2) \leq f(y) < \xi/(Z_0 y^2); \quad y \geq y_*. \quad (22)$$

Эти оценки сверху и снизу достаточно близки между собой, поскольку при больших аргументах $F(y_*) \ll 1$. Таким образом, из формулы (20) получается

$$I_k(y_0) \sim I_k(y_*) + (\xi/Z_0)^k \ln(y_0/y_*); \quad k = 1, 2. \quad (23)$$

Результаты расчётов по формуле (23) при значении $y_* = 26$ показаны на рис. 4 маркерами. Формулу (23) можно использовать и для частиц с другой степенью ионизации. Для этого нужно знать соответствующие значения I_1 и I_2 в выбранной точке y_* . Такие значения приведены в табл. 2 и 3. В

них имеются данные для следующего набора химических элементов: He, Be, C, Ne, Ar. При этом надо понимать, что дело не в конкретном элементе, а в степенях ионизации, которые частично пересекаются для различных ионов. В частности, строка, соответствующая индексу 9/18, относится одновременно к ионам He^{+1} , Be^{+2} , C^{+3} , Ne^{+5} , Ar^{+9} . Для примера на рис. 5 при значении $y_* = 26$ показаны зависимости интегралов I_1 и I_2 от степени ионизации. Видно, что эти зависимости достаточно гладкие. Отметим, что сплошные кривые на рис. 5 получены на основе аппроксимаций с помощью кубических сплайнов, которые проходят через точки, соответствующие ионам аргона, маркерами показаны их значения для ионов Be и Ne (см. табл. 2 и 3).

Рис. 5. Зависимость интегралов I_1 и I_2 от параметра степени ионизации при значении $y_* = 26$: * — значения для ионов Be и Ne

Таблица 2. Значение интеграла $I_1(y = q/Z_0^{1/3})$ для ионов с различным числом ξ связанных электронов

ξ/Z_0	$I_1(y_1 = 6,5)$	$I_1(y_2 = 13)$	$I_1(y_3 = 26)$	$I_1(y_4 = 39)$	$I_1(y_5 = 52)$
17/18	1,7175	2,3371	2,9781	3,3572	3,6256
9/10	1,5671	2,1561	2,7663	3,1275	3,4117
16/18	1,5252	2,1066	2,7091	3,0658	3,3539
15/18	1,3516	1,8946	2,4587	2,7929	3,1006
8/10	1,2575	1,7776	2,3187	2,6394	2,9585
14/18	1,1916	1,6963	2,2220	2,5337	2,8604
3/4	1,1178	1,6029	2,1094	2,4098	2,7459
13/18	1,0431	1,5095	1,9969	2,2861	2,6313
7/10	0,9886	1,4398	1,9117	2,1919	2,5445
12/18	0,9046	1,3327	1,7816	2,0483	2,4116
11/18	0,7753	1,1651	1,5756	1,8199	2,2004
6/10	0,75192	1,1341	1,5369	1,7767	2,1605
10/18	0,6548	0,1006	1,3785	1,6002	1,9970
9/18	0,5428	0,8561	1,1898	1,3890	1,8008
8/18	0,4394	0,7143	1,0096	1,1864	1,6115
4/10	0,3633	0,6076	0,8722	1,0310	1,4652
7/18	0,3196	0,5812	0,8382	0,9924	1,4287
6/18	0,2588	0,4572	0,6757	0,8075	1,2515
3/10	0,2121	0,3875	0,5830	0,7013	1,1478
5/18	0,1827	0,3428	0,5229	0,6322	1,0792
1/4	0,1486	0,2895	0,4504	0,5485	0,9943
4/18	0,1173	0,2391	0,3808	0,4676	0,9097
2/10	0,0945	0,2010	0,32735	0,4052	0,8420
3/18	0,0643	0,1478	0,2511	0,3154	0,7389
2/18	0,0264	0,0719	0,1368	0,1786	0,5562
1/10	0,0208	0,0591	0,1160	0,15328	0,5149
1/18	0,0054	0,0182	0,0447	0,0641	0,3273

Таблица 3. Значение интеграла $I_2(y = q/Z_0^{1/3})$ для ионов с различным числом ξ связанных электронов

ξ/Z_0	$I_2(y_1 = 6,5)$	$I_2(y_2 = 13)$	$I_2(y_3 = 26)$	$I_2(y_4 = 39)$	$I_2(y_5 = 52)$
1	2	3	4	5	6
18/18	1,2068	1,8959	2,5632	2,9615	3,1726
17/18	1,0667	1,6238	2,2181	2,5732	2,8230
9/10	0,9285	1,4319	1,9706	2,2929	2,5716
16/18	0,8905	1,3808	1,9061	2,2203	2,5060
15/18	0,7357	1,1636	1,6240	1,8999	2,2183
8/10	0,65507	1,0475	1,4711	1,7252	2,0617
14/18	0,6001	0,9698	1,3697	1,6097	1,9577
3/4	0,5400	0,8814	1,2526	1,4756	1,8371
13/18	0,4821	0,7979	1,1414	1,3481	1,7222
7/10	0,44121	0,73656	1,0588	1,2528	1,6365

Продолжение табл.

1	2	3	4	5	6
12/18	0,3804	0,6463	0,9379	1,1136	1,5104
11/18	0,2933	0,5139	0,7577	0,9051	1,3207
6/10	0,27856	0,4906	0,7254	0,86733	1,2863
10/18	0,2201	0,3995	0,5998	0,7213	1,1517
9/18	0,1596	0,3020	0,4632	0,5612	1,0018
8/18	0,1107	0,2205	0,3467	0,4239	0,8694
4/10	0,0796	0,1663	0,2676	0,3299	0,7749
7/18	0,0725	0,1539	0,2494	0,3081	0,7524
6/18	0,0438	0,1010	0,1701	0,2130	0,6485
3/10	0,0308	0,0755	0,1308	0,1654	0,5911
5/18	0,0235	0,0608	0,1078	0,1373	0,5542
1/4	0,0162	0,0451	0,0826	0,1064	0,5093
4/18	0,0105	0,0322	0,0612	0,0798	0,4648
2/10	0,0071	0,0236	0,0468	0,0617	0,4288
3/18	0,0034	0,0137	0,0291	0,0393	0,3725
2/18	0,0006	0,0037	0,0098	0,0142	0,2636
1/10	0,00040	0,0026	0,0073	0,0107	0,1923
1/18	0,00003	0,0003	0,0013	0,0022	0,1165

Обсудим ограничения на функции $I_1(y_0)$ и $I_2(y_0)$. Следует помнить, что согласно (19)

$$y_0/y_* \leq 1/\sin(\gamma_*/2) \quad (24)$$

и увеличение отношения правой части (24) при фиксированном значении y_* происходит за счёт уменьшения нижнего предела интегрирования по углу рассеяния γ_* с одновременным подъёмом импульса электрона. Из физических соображений ясно, что значение выражения в фигурной скобке формулы (17) не должно быть больше $Z_0^2 \Lambda$, что соответствует случаю рассеяния электрона на ядре атома без электронов. Выполнение этого требования приводит к условию

$$\ln(y_0/y_*) \leq \frac{\Lambda(Z_0^2 - 1) - Z_0^2 I_2(y_*) - 2Z_0 I_1(y_*)}{\xi(\xi + 2)}. \quad (25)$$

Легко видеть, что правая часть (25) может быть достаточно большой величиной. Так, для иона Ag^{+1} при $y_* = 40$ она равна $\Lambda = 2,98$. Из этого следует, что при $\Lambda = 20$ допустимо значение $y_0 < 40 \exp(17)$. Таким образом, нет необходимости вводить аналог кулоновского логарифма в формулу (17).

Для определения транспортной частоты столкновений ν_{REt} с учётом релятивистских эффектов следует исходить из выражения (14):

$$\nu_{\text{REt}} = \frac{cpn_i}{\sqrt{1+p^2}} \left[(1+p^2)\sigma_t - \Delta\sigma_t \right]. \quad (26)$$

Здесь $\Delta\sigma_t$ учитывает поправку, связанную с уменьшением вероятности рассеяния на большие углы. Если для оценки величины этой поправки положить $F = 0$, то тогда можно получить

$$\Delta\sigma_t < \frac{4\pi a_B^2}{g^4 p^4} Z_0^2 \frac{q_0^2}{8g^2}. \quad (27)$$

При заданном импульсе правая часть (27) максимальна для $q_0 = 2gp$. Однако и в этом случае величиной $\Delta\sigma_t$ с хорошей точностью можно пренебречь (т.е. положить $\Delta\sigma_t = 0$) по сравнению с другим членом в квадратных скобках (26). Так как подавление рассеяния «назад» заметно при больших импульсах ($p > 2$), то для обоснования сделанного утверждения достаточно следующей оценки:

$$\frac{\Delta\sigma_t}{(1+p^2)\sigma_t} < \frac{p^2}{2(1+p^2)I_2(y=2gp/Z_0^{1/3})}. \quad (28)$$

В качестве примера отметим, что для иона Ag^{+} при $p = 2$ ($y = 209,6$) правая часть (28) составляет примерно 0,1 и с увеличением импульса только убывает. При этом для концентрации $n_i = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и

значения $\Lambda = 20$ частота без учёта поправки равна $\nu_{\text{REt}}(p = 2) = 123 \text{ с}^{-1}$. На рис. 6 при тех же условиях показаны зависимости транспортных частот $\nu_{\text{REt}}(p)$ для первого и некоторых других ионов аргона. Обращает внимание тот факт, что при релятивистских импульсах электронов для атома и, по крайней мере, для первых трёх ионов ($\xi = 17, 16, 15$) аргона ($Z_0 = 18$) значения транспортных частот очень близки между собой. При этом они примерно в 5, а не в $[Z_0/(Z_0 - \xi)]^2 < 18^2$ раз меньше, чем частота для иона Ar^{+18} , во всём рассмотренном диапазоне импульсов.

С точки зрения характеристик упругого рассеяния энергичных электронов на большие углы на тяжёлых элементах их атомы и первые ионы мало отличаются. Дело в том, что для больших изменений импульса нужно сильное электрическое поле, которое существует только достаточно близко от атомного ядра. В такой ситуации использование экспоненциального фактора экранирования (пунктир на рис. 1) может быть оправданным. В работе [6] используется именно такое приближение, что позволяет получить аналитическое выражение для транспортной частоты рассеяния ν_A . Для нейтральных атомов отношение этой частоты к транспортной частоте ν_{REt} , определяемой формулой (26), равно

$$\frac{\nu_A}{\nu_{\text{REt}}} = \frac{1}{2I_2(y)} \left[\ln \left(\frac{1+A}{A} \right) - \frac{1}{1+A} \right]; A = 1/(by)^2. \quad (29)$$

На рис. 7 показан график этой зависимости. Из него видно, что $\nu_A/\nu_{\text{REt}} \sim 1$ при $y > 10$. Таким образом, принимая во внимание рис. 6, можно сделать вывод, что для транспортной частоты для первых ионов аргона при $y = 2gp/Z_0^{1/3} > 10$ ($p > 0,1$) приближенно можно использовать соответствующее выражение из работы [6].

ИНТЕГРАЛ УПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ ЭЛЕКТРОНОВ С ИОНАМИ

В правую часть кинетического уравнения для функции распределения быстрых электронов в плазме токамака $f(p, \theta)$ (усреднённой по фазе ϕ ларморовского вращения) в зависимости от импульса p и питч-угла θ входит интеграл столкновений $\delta f/\delta t$.

Далее обсудим вклад в этот интеграл от упругих столкновений энергичных электронов с ионами определённого сорта. При этом все входящие в интеграл характеристики были определены ранее. Естественно, что вклад от всех ионов должен суммироваться как по сортам химических элементов, так и по кратности их ионизации.

Масса ионов значительно превышает массу релятивистских электронов плазмы токамаков. По этой причине при анализе характеристик столкновений ионы можно считать неподвижными и пренебречь передачей им энергии от электронов. В этом случае вклад в интеграл столкновений в общей форме C_{ei} (формула 3.9 [8], связанный с каждым конкретным ионом плазмы, удобно условно разделить на две час-

Рис. 6. Зависимость транспортной частоты $\nu_{\text{REt}}(p)$ от импульса при концентрации частиц аргона $n_i = 10^{13} \text{ см}^{-3}$ и значении $\Lambda = 20$ (кратность ионизации указана рядом с кривыми): ●, ▲ и ★ — зависимость транспортной частоты от импульса для нейтрального аргона и его ионов с кратностью ионизации 3 и 6 соответственно

Рис. 7. Зависимость отношения приближенного значения транспортной частоты для атомов примеси к своему точному значению ν_A/ν_{REt} от переменной $y = 2gp/Z_0^{1/3}$

ти, описывающие рассеяние на большие $\gamma > \gamma_0$ и малые $\gamma < \gamma_0$ углы соответственно. В этом случае удастся избежать расходимости при интегрировании по малым углам при расчёте частоты столкновений, отдельно учесть релятивистские поправки, в том числе подавление обратного рассеяния, при рассеянии на большие углы:

$$C_{ei} = \frac{cpn_i}{\sqrt{1+p^2}} \int_{\gamma > \gamma_0} f(p, \theta') d\sigma_{RE} - v_{RE}(p, \gamma_0) f(p, \theta) + v_{RE}(p, \gamma_0) \hat{L}(f); \quad (30)$$

$$\hat{L}(f) = \frac{1}{2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right). \quad (31)$$

Здесь n_i — концентрация ионов; дифференциальный оператор $\hat{L}$ — классический оператор рассеяния Лоренца.

В определении (30) столкновения с рассеянием на большие углы $\gamma > \gamma_0$ учитывают первые два члена, с рассеянием на малые углы $\gamma < \gamma_0$ учитывают последний член этого выражения. Отметим, что выбор условной границы $\gamma_0(p)$ имеет определённый произвол. Если положить $\gamma_0 = \pi$, то это будет означать отказ от отдельного рассмотрения столкновений с рассеянием на большие углы, так как первые два члена в (30) обращаются в ноль. При этом полная транспортная частота v_{RE} будет характеризовать обратное время потери направленной (продольной) скорости движения электронов из-за их столкновений с ионами.

Казалось бы, что другим предельным случаем должен быть выбор $\gamma_0 = 0$. Действительно, так можно поступать [3] при решении кинетического уравнения (например, методом Монте-Карло), описывающего прохождение пучка электронов через нейтральный газ или твёрдую среду. Однако полное сечение рассеяния электронов на нейтральных атомах конечно, в то время как для ионов оно расходится (конечное значение имеет транспортное сечение). Из этого следует, что для моделирования процессов в плазме требуется задавать $\gamma_0 > 0$.

Для моделирования таких явлений, как инкремент затухания тока релятивистских электронов, когда простая потеря энергии не приводит к заметному уменьшению скорости, рассеяние таких электронов на большие углы желательно учитывать более точно. В связи с этим представляется разумным выбрать следующую зависимость $\gamma_0(p)$:

$$\begin{aligned} p < p_0 &= \gamma_0 = \pi; \\ p_0 < p < p_1 &= \sin(\gamma_0/2) = p_0/p; \\ p > p_1 &= \sin(\gamma_0/2) = p_0/p_1. \end{aligned} \quad (32)$$

По-видимому, для зависимости (32) оптимальным выбором параметров могут быть их значения $p_0 = 1$ и $p_1 = 4$. В этом случае в диапазоне $p_0 < p < p_1$ переданный импульс остаётся постоянным $\Delta p = 2p_0$, угол γ_0 с ростом импульса уменьшается от π до $28,96^\circ \approx \pi/6$. При $p > p_1$ угол γ_0 больше не меняется.

Остановимся подробнее на интеграле, который имеется в выражении (30):

$$I = \int_{\gamma > \gamma_0} f(p, \theta') d\sigma_{RE} = \int_{\gamma > \gamma_0} f(p, \theta') \frac{d\sigma_{RE}(p, \gamma)}{d\Omega} \sin \theta' d\theta' d\Psi. \quad (33)$$

Здесь интегрирование проводится по разности фаз $\psi = \phi' - \phi$ ($-\pi \leq \psi \leq \pi$) и питч-углу θ' . При этом штрих относится к электрону после столкновения. Угол рассеяния γ связан с другими углами следующим образом:

$$\cos \gamma = \cos \theta' \cos \theta + \sin \theta' \sin \theta \cos \Psi. \quad (34)$$

Однако для вычисления величины I удобнее заменить переменную интегрирования ψ на переменную $x = \cos \gamma$. Тогда с учётом ограничения на область интегрирования перепишем формулу (33) через кратный интеграл:

$$I = 2 \int_0^\pi f(p, \theta') \sin \theta' d\theta' \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\sigma_{RE}(p, x)}{d\Omega} \frac{dx}{\sqrt{[x - \cos(\theta' + \theta)][\cos(\theta' - \theta) - x]}}; \quad (35)$$

$$x_1 = \cos(\theta' + \theta); x_2 = \max\{x_1, \min[\cos(\theta' - \theta), \cos\gamma_0]\}. \quad (36)$$

Отметим, что в случае $\theta + \theta' < \gamma_0$ интеграл I равен нулю.

Интеграл столкновения должен обладать свойством сохранения частиц. Очевидно, что таким свойством обладает третий член в формуле (30). Покажем, что в сумме первые два члена в этой формуле тоже сохраняют общее число частиц. Для этого рассмотрим следующий интеграл:

$$\int_0^\pi I(p, \theta) \sin \theta d\theta = 2 \int_0^\pi J(p, \theta') f(p, \theta') \sin \theta' d\theta'; \quad (37)$$

$$J(p, \theta') = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_{x_1}^{x_2} \frac{d\sigma_{\text{RE}}(p, x)}{d\Omega} \frac{dx}{\sqrt{[x - \cos(\theta' + \theta)][\cos(\theta' - \theta) - x]}}. \quad (38)$$

Теперь изменим порядок интегрирования в (37):

$$J(p, \theta') = \int_{-1}^{\cos\gamma_0} S(x, \theta') \frac{d\sigma_{\text{RE}}(p, x)}{d\Omega} dx. \quad (39)$$

При этом интеграл S запишем с учётом замены переменных $y = \cos\theta$:

$$S(x, \theta') = \int_{y_-}^{y_+} \frac{dy}{\sqrt{(y_+ - y)(y - y_-)}}; \quad y_{\pm} = x \cos \theta' \pm \sin \theta' \sqrt{1 - x^2}. \quad (40)$$

Выражение (40) интегрируется аналитически:

$$S(x, \theta') = \arcsin \frac{2y - y_+ - y_-}{y_+ - y_-} \Big|_{y=y_-}^{y=y_+} = \pi. \quad (41)$$

Таким образом, интеграл S всегда равен константе. После этого легко видеть справедливость следующего равенства:

$$2\pi \frac{cpn_i}{\sqrt{1+p^2}} \int_0^\pi I(p, \theta) \sin \theta d\theta = 2\pi v_{\text{RE}}(p, \gamma_0) \int_0^\pi f(p, \theta') \sin \theta' d\theta'. \quad (42)$$

Таким образом, первые два члена в формуле (30) интегрально компенсируют друг друга и свойство сохранения общего числа частиц интегралом столкновения доказано.

СТОЛКНОВИТЕЛЬНЫЕ ПОТЕРИ ЭНЕРГИИ УБЕГАЮЩИХ ЭЛЕКТРОНОВ

Использование модели Томаса—Ферми (везде при ссылках на теорию используется работа [10]) приводит к следующему выражению для потерь энергии при прохождении заряженными частицами нейтрального вещества:

$$Q_{\text{loss}} = \frac{4\pi q^2 e^4}{m_z m_e v^2} Z_0 \left\{ \ln \left(2 \frac{m_e v^2}{\hbar \omega_0 Z_0 \tau} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) - \frac{v^2}{2c^2} + \psi(1) - \text{Re}[\psi(1 + iy)] \right\}. \quad (43)$$

Здесь q и v — заряд и скорость движущейся частицы; Z_0 и m_z — заряд и масса ядер вещества, в котором происходит торможение; $\omega_0 = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ — частота Ридберга, которой соответствует энергия $\omega_0 \hbar / 2\pi = 2,169 \text{ эВ}$; τ — константа, значение которой теоретически не определяется. Функция ψ является логарифмической производной Γ — функции, мнимая часть её аргумента равна

$$y = \frac{q e^2}{\hbar v} = \frac{qc}{137v}. \quad (44)$$

Отсюда видно, что для достаточно быстрых электронов ($q = 1, v/c > 0,1$) переменная y принимает малые значения $y \ll 1$. Таким образом, с хорошей точностью можно положить нулём следующую разность:

$$\psi(1) - \operatorname{Re}[\psi(1 + iy)] \gg 0. \quad (45)$$

Учитывая (45), перепишем выражение (43) следующим образом:

$$Q_{\text{loss}} = \frac{4\pi e^4}{m_Z m_e c^2} \frac{\gamma^2}{p^2} Z_0 \left\{ \ln \left(\frac{m_e c^2}{E_{\text{TF}}} \right) + \ln \left(\frac{p^2}{\gamma} \right) - \frac{p^2}{2\gamma^2} \right\}; \quad (46)$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2}; \quad p = \sqrt{\gamma^2 - 1} = \gamma \frac{v}{c}; \quad (47)$$

$$E_{\text{TF}} = \frac{\hbar \omega_0 \tau}{2} Z_0. \quad (48)$$

В силу неопределённости задания константы τ в формуле (48) разумным представляется задание на основе экспериментальных данных самой характеристической энергии E_{TF} . В своё время были выполнены эксперименты по торможению в различных веществах α -частиц ($q = 2$, $p = 0,064$) при распаде радия. Их результаты можно представить в виде зависимости

$$E_{\text{TF}}(Z_0) = 3,275 Z_0 \text{ эВ}. \quad (49)$$

Рис. 8. Зависимость потерь от энергии быстрых электронов в Ne: 1 — исходная модель Томаса—Ферми (46); 2 — то же с коррекцией $E_{\text{TF}} = 75$ эВ; 3 — уточнённая аппроксимация (50); —, - - - - - расчёты [11]

Здесь численный коэффициент выбран по результатам экспериментов с золотом (Au), но для других более лёгких исследованных веществ этот коэффициент увеличивается. Если применить этот алгоритм определения энергетической характеристики для неона ($Z_0 = 10$), то получим $E_{\text{TF}} \approx 33$ эВ, $\ln(m_e c^2 / E_{\text{TF}}) \approx 9,65$. На рис. 8 кривая 1 показывает зависимость столкновительных потерь (46) от энергии быстрых электронов. Сравнивая эту кривую с кривой collision, полученной в результате расчётов с помощью кода ESTAR [11], основанного на интерполяции наиболее достоверных экспериментальных данных по потерям энергии за счёт столкновений, можно сказать, что в целом прогноз неплохо согласуется с экспериментом. Кривая total показывает сумму столкновительных и тормозных потерь и получена с помощью кода ESTAR. Для лучшего согласования можно уточнить значение характерной энергии непосредственно для неона. Так, для совпадения с экспериментом в районе энергии электронов $E = 2$ МэВ можно

положить $E_{\text{TF}} \approx 75$ эВ. Кривая 2 на рис. 8 соответствует именно этому случаю. Для ещё большего совпадения с экспериментом при $E > 2$ МэВ формула (46) была модифицирована следующим образом:

$$Q_{\text{loss}} = \frac{4\pi e^4}{m_Z m_e c^2} \frac{\gamma^2}{p^2} (Z_0 - Z) \left\{ \ln \left(\frac{m_e c^2}{E_{\text{эф}}} \right) + \ln \left(\frac{p^2}{\sqrt{\gamma + 1}} \right) \right\}. \quad (50)$$

Здесь Z — заряд иона, так что для атомов $Z = 0$. Зависимость в фигурных скобках заимствована из работы [12], в которой эффективная энергия $E_{\text{эф}}$ считалась потенциалом ионизации. Однако для хорошего совпадения при $E = 2$ —3 МэВ значений, относящихся к нейтральному веществу, полученных по формулам (46) и (50), в дальнейшем всегда будем полагать, что

$$E_{\text{эф}}(Z, Z_0) = 3f(Z, Z_0)E_{\text{TF}}(Z_0). \quad (51)$$

Здесь f — фактор, учитывающий изменение эффективной энергии при переходе от атомов к ионам, $f(0, Z_0) = 1$. Кривая 3 на рис. 8 показывает модифицированную зависимость столкновительных потерь (50) от энергии быстрых электронов для неона при $E_{\text{эф}} = 225$ эВ. Кривая 3 с хорошей точностью во всём диапазоне энергии приближена к кривой collision, аппроксимирующей экспериментальные данные.

Рассмотренный подход для характеристики потерь энергии быстрыми электронами в веществе был применён и для других сред. Так, рис. 9 относится к аргону (Ar), рис. 10 — к углероду (C) и рис. 11 — к бериллию (Be). Представление информации на рис. 9—11 аналогично рис. 8 для неона. При этом для всех кривых 1 характерная энергия рассчитывалась по исходному выражению (49), для кривых 2 эта энергия определялась на основе следующей формулы:

$$E_{TF}(Z_0) = 75(Z_0/10)^{1/4} \text{ эВ}. \quad (52)$$

В формуле (52) за нормирующую величину взято значение энергии для неона, степень 1/4 подобрана так, чтобы получались оптимальные значения характерной энергии и для других химических элементов. Кривые 3 соответствуют зависимости (50), в которой эффективная энергия рассчитывается по формулам (51) и (52). Оказывается, что эта зависимость идеально описывает потери энергии быстрых электронов как в неоне, так и в аргоне (см. рис. 8 и 9), так что кривая 3 практически сливается с кривой collision. Однако для лёгких элементов (см. рис. 10 и 11) отклонения кривых 3 от «экспериментальных» [11] достигают 25%, хотя это и не очень критично. При этом предпочтительнее использовать формулу (46), соответствующую кривым 2, которые лежат ближе к кривым collision, чем кривые 3.

Предложим обобщение формулы для вычисления потерь энергии быстрых и релятивистских электронов на ионах плазмы (а не только на атомах вещества), которое в дальнейшем следует проверить экспериментально. При этом первый шаг (так же, как и в работе [12]) уже выполнен: в выражении (50) в качестве множителя перед фигурными скобками стоит разность $Z_0 - Z$ вместо Z_0 в предыдущих соотношениях. Далее предположим, что в формуле (51) фактор f пропорционален средней энергии E_Z , приходящейся на один связанный электрон, которая рассчитывается по полной энергии процесса ионизации до «голового» ядра конкретного иона:

$$f(Z, Z_0) = E_Z/E_0; \quad (53)$$

$$E_Z = (U_{Z_0} - U_Z)/(Z_0 - Z). \quad (54)$$

Здесь U_Z — сумма потенциалов ионизации для получения иона с зарядом Z из атома. В отношении полной ионизации атома модель Томаса—Ферми даёт

$$U_{Z_0} = 20,94 Z_0^{7/3} \text{ эВ}. \quad (55)$$

Таким образом, для аргона получаем $E_0 = 987,8 \text{ эВ}$. В случае $Z/Z_0 \ll 1$ для величины U_Z модель Томаса—Ферми даёт

Рис. 9. Зависимость потерь от энергии быстрых электронов в Ar: 1 — исходная модель Томаса—Ферми; 2 — то же, но с оптимальными параметрами; 3 — уточнённая аппроксимация; —, - - - - — данные [11]

Рис. 10. Зависимость потерь от энергии быстрых электронов C: 1 — исходная модель Томаса—Ферми; 2 — то же, но с оптимальными параметрами; 3 — уточнённая аппроксимация; —, - - - - — данные [11]

Рис. 11. Зависимость потерь от энергии быстрых электронов в Be: 1 — исходная модель Томаса—Ферми; 2 — то же, но с оптимальными параметрами; 3 — уточнённая аппроксимация; —, - - - - — данные [11]

$$U_Z = 1,27 \frac{Z^{7/3}}{1 - 0,903(Z/Z_0)^{3/4}} \text{ эВ.} \quad (56)$$

Легко видеть, что для первых ионов в формуле (54) величиной U_Z можно пренебречь. Кроме того, в соответствии с (56) при формальном его использовании получим $U_{Z_0} = 13 Z_0^{7/3}$ эВ, что примерно в 1,5 раза меньше U_{Z_0} , чем в (55). Таким образом, с точки зрения сохранения качественной зависимости фактора f от параметров будем считать коэффициент в (56) в 1,5 раза больше, после чего (53) переходит в выражение

$$f(x = Z/Z_0) = \frac{1}{1-x} \left(1 - \frac{x^{7/3}}{1 - 0,903x^{3/4}} \right). \quad (57)$$

В итоге для общего случая предлагается использовать выражение (50) с учётом (51), (52) и (57).

Для исследований возникновения и динамики ускоренных электронов в плазме важно знать скорость потерь их энергии dE/dt . Суммируя потери энергии при столкновениях со свободными электронами и всеми ионами плазмы, получим

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4\pi e^4}{m_e v} \{n_e \ln \Lambda_e + n_{eb} \ln \Lambda_{eb}\}; \quad (58)$$

$$n_e = \sum_{Z=0}^{Z_0} \sum_{Z=1}^{Z_0} Z n_{Z_0 Z}; \quad n_{eb} = \sum_{Z_0} \sum_{Z=0}^{Z_0-1} (Z_0 - Z) n_{Z_0 Z}; \quad (59)$$

$$n_{eb} \ln \Lambda_{eb} = \sum_{Z_0} F_1^{Z_0} + \ln \left(\frac{p^2}{\sqrt{\gamma+1}} \right) \sum_{Z_0} F_2^{Z_0}; \quad (60)$$

$$F_1^{Z_0} = \sum_{Z=0}^{Z_0-1} (Z_0 - Z) n_{Z_0 Z} \ln \left[\frac{m_e c^2}{E_{\text{эф}}(Z, Z_0)} \right]; \quad F_2^{Z_0} = \sum_{Z=0}^{Z_0-1} (Z_0 - Z) n_{Z_0 Z}. \quad (61)$$

Здесь n_e , n_{eb} — концентрация свободных и суммарная концентрация связанных электронов, которые выражаются через парциальную концентрацию всех ионов $n_{Z_0 Z}$; $\ln \Lambda_{eb}$ — среднее по всем ионам значение логарифмов в (60), кулоновский логарифм для столкновений релятивистских электронов равен $\ln \Lambda_e = 18 - \ln p$.

Ранее в упрощённых моделях ускоренных электронов [3] для оценки потерь их энергии без каких-либо объяснений использовалось выражение

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{4\pi e^4}{m_e v} \ln \Lambda_e \{n_e + n_{eb} / 2\}. \quad (62)$$

Для того чтобы понять точность такого приближения, рассмотрим отношение y зависимостей (62) и (58)

$$y = \frac{\ln \Lambda_e \{n_e + n_{eb} / 2\}}{n_e \ln \Lambda_e + n_{eb} \ln \Lambda_{eb}}. \quad (63)$$

Зависимость этого отношения от энергии быстрых электронов в среде из атомов или ионов аргона и бериллия показана на рис. 12. При этом предполагается, что все частицы имеют одинаковый

Рис. 12. Зависимость отношения y потерь энергии, рассчитанных по формуле (62), к потерям, рассчитанным по формуле (58), от энергии быстрых электронов для атомов и ионов аргона (а) и бериллия (б) (заряд частиц указан рядом с кривыми)

заряд, значение которого указано рядом с кривыми. Интересной особенностью является то, что около энергии $E = 1,2$ МэВ для атомов и всех ионов рассматриваемое отношение оказывается примерно одинаковым — $y \sim 1,05$. Сами зависимости являются спадающими, при этом максимальное отклонение от единицы реализуется для атомов и составляет не более 30% во всём рассмотренном диапазоне энергии.

СРАВНЕНИЕ МОДЕЛЕЙ ДЛЯ УГЛОВОЙ ЗАВИСИМОСТИ РАССЕЯНИЯ

Рассеяние пучков электронов при прохождении различных сред изучено очень подробно. В то же время специфической задаче о рассеянии электронного пучка в частично ионизованном газе (плазме) посвящено весьма ограниченное число работ, среди которых следует выделить цитировавшуюся работу [12]. Для сравнения наших результатов с результатами работы [12] перепишем наши основные соотношения в обозначениях [12].

Так, использование модели Томаса—Ферми приводит к следующему выражению для транспортного сечения упругого рассеяния быстрого (но не релятивистского) электрона на атоме или ионе (см. (17)):

$$\sigma_t = \frac{\sigma_0}{p^4} \{ Z^2 \ln \Lambda_e + 2Z_0 Z I_1(x, y) + Z_0^2 I_2(x, y) \}, \quad (64)$$

где

$$\sigma_0 = \frac{4\pi a_B^2}{g^4}; \quad (65)$$

$$x = Z/Z_0; y = 2gp/Z_0^{1/3}. \quad (66)$$

Ранее в формуле (17) для интегралов I_1 и I_2 выделялся только один аргумент y , поскольку речь шла о рассеянии на конкретном ионе. Здесь же добавлен второй аргумент x , задающий степень ионизации.

С учётом релятивистских поправок полную транспортную частоту рассеяния электронов в многокомпонентной плазме можно записать следующим образом:

$$\nu_{RE} = cp \sqrt{1 + p^2} \sum_{Z_0} \sum_{Z=0}^{Z_0} \sigma_t(Z, Z_0) n_{Z_0 Z}. \quad (67)$$

Для интегралов I_1 и I_2 при больших значениях параметра y хорошо работает следующая аппроксимация:

$$I_j(x, y) \approx I_j(x, y_*) + (1 - x) \ln(y/y_*); j = 1, 2. \quad (68)$$

Здесь y_* — некоторое достаточно большое число. Отметим, что оба интеграла при $x = 1$ равны нулю — $I_j(1, y_*) = 0$. Если учесть выражения (64) и (68), то формулу (67) можно переписать следующим образом:

$$\nu_{RE} = \frac{c\sigma_0 \sqrt{1 + p^2}}{p^3} \left\{ n_e Z_{\Phi} \ln \Lambda + \sum_{Z_0} D_1^{Z_0} + \ln p \sum_{Z_0} D_2^{Z_0} \right\}; \quad (69)$$

$$D_2^{Z_0} = \sum_{Z=0}^{Z_0-1} (Z_0^2 - Z^2) n_{Z_0 Z}; \quad (70)$$

$$D_1^{Z_0} = D_2^{Z_0} \ln(2gZ_0^{-1/3} y_*) + \sum_{Z=0}^{Z_0-1} n_{Z_0 Z} \{ Z_0^2 I_2(Z/Z_0, y_*) + 2Z_0 Z I_1(Z/Z_0, y_*) \}. \quad (71)$$

Для полноты изложения приведём выражение для эффективного заряда плазмы в принятых в тексте обозначениях:

$$Z_{\Phi} = \sum_{Z_0} \sum_{Z=1}^{Z_0} Z^2 n_{Z_0 Z} / n_e. \quad (72)$$

Ранее в работе [12] был предложен способ оценки транспортной частоты упругого рассеяния быстрых электронов на ионах плазмы, имеющих связанные электроны. В соответствии с логикой этой работы в общем случае надо использовать выражение

$$v_{\text{RE}} = \frac{c\sigma_0\sqrt{1+p^2}}{p^3} \left\{ n_e Z_{\text{эф}} \ln \Lambda_e + \sum_{Z_0} D_{01}^{Z_0} + \ln \left(\frac{p^2}{\gamma} \right) \sum_{Z_0} D_{02}^{Z_0} \right\}; \quad (73)$$

$$D_{02}^{Z_0} = D_2^{Z_0} = \sum_{Z=0}^{Z_0-1} (Z_0^2 - Z^2) n_{Z_0 Z}; \quad D_{01}^{Z_0} = \sum_{Z=0}^{Z_0-1} (Z_0^2 - Z^2) n_{Z_0 Z} \ln \left(\frac{m_e c^2}{E_{\text{эф}}(Z, Z_0)} \right). \quad (74)$$

Для того чтобы понять точность этого приближения, рассмотрим отношение y транспортных частот рассеяния электронов, рассчитанных по зависимостям (73) и (69). В случае, когда среду (плазму или газ) образует только один химический элемент, имеем

$$y = \frac{n_e Z_{\text{эф}} \ln \Lambda_e + D_{01}^{Z_0} + D_{02}^{Z_0} \ln(p^2/\gamma)}{n_e Z_{\text{эф}} \ln \Lambda_e + D_1^{Z_0} + D_2^{Z_0} \ln(p)}. \quad (75)$$

Числитель и знаменатель несколько отличаются аргументами в логарифмах, которые асимптотически совпадают при больших значениях p . Основная разница между числителем и знаменателем состоит в значениях коэффициентов $D_{01}^{Z_0}$ и $D_1^{Z_0}$. Если последний точно определён, то коэффициент $D_{01}^{Z_0}$ зависит от значений $E_{\text{эф}}(Z, Z_0)$. Если их подобрать для точного совпадения указанных коэффициентов, то выражение (75) фактически всегда будет иметь значения, очень близкие к единице. Далее будем считать, что $E_{\text{эф}}$ определяется так же, как для формулы (50). Зависимость отношения (75) от энергии быстрых электронов в среде из атомов или ионов аргона показана на рис. 13. При этом считается, что все частицы среды имеют одинаковый заряд, значение которого указано рядом с кривыми.

Рис. 13. Зависимость отношения y транспортной частоты упругих столкновений, рассчитанной по формуле (73), к частоте, рассчитанной по (69), от энергии быстрых электронов при рассеянии на атомах и ионах аргона (а) и бериллия (б) (заряд частиц указан рядом с кривыми)

Все зависимости являются спадающими, но отношение всегда остаётся больше единицы $y > 1$. При этом максимальное превышение единицы реализуется для атомов и первых ионов при наименьших энергиях. Так, при $E = 0,2$ МэВ ($p = 1$) отношение частот y составляет около 1,8. Таким образом, оценка транспортной частоты упругих столкновений в соответствии с работой [12] является заметно завышенной.

ВЫВОДЫ

На основе модели Томаса—Ферми, которая описывает экранирование кулоновского потенциала ядер примесей связанными электронами, рассчитана зависимость форм-фактора от изменения импульса электрона при упругих столкновениях. В дальнейшем это даёт возможность корректно, с учётом релятивистских эффектов, определять дифференциальное сечение рассеяния.

С помощью численного интегрирования найдена зависимость транспортной частоты столкновений для различных ионов примесей плазмы от начального импульса электрона и максимальной величины его изменения при упругих столкновениях. Кроме того, для этих зависимостей обосновано асимптотическое поведение при больших изменениях импульса.

Показано, что для энергичных электронов при наличии в плазме слабоионизованных тяжёлых примесей транспортная частота упругих столкновений может существенно увеличиваться по сравнению со случаем плазмы из полностью ионизованных ионов с эквивалентным эффективным зарядом. Так, для однократно ионизованного аргона в экспериментах на DIII-D [4] такое увеличение составило бы ~ 70 раз.

В то же время рассчитанные значения транспортной частоты рассеяния на ионах примесей с высоким зарядом ядра оказываются на один-два порядка выше «общепринятых» [1]. Столь значительная разница обусловлена ошибочностью замены заряда ядра рассеивающей примеси эффективным зарядом иона при вычислении транспортной частоты рассеяния в холодной плазме после теплового срыва. Выполненный теоретический анализ показал, что качественно верное, но грубое рассмотрение [12] приводит к завышению транспортной частоты рассеяния в 1,5—2 раза.

Для общего случая предложен модельный интеграл упругих столкновений электронов с ионами примесей. В нём отдельно учитываются столкновения с рассеянием на большие и малые углы. Такой интеграл столкновений может быть использован в различных кинетических моделях для определения эволюции функции распределения ускоренных электронов в токамаке.

В работе предлагается алгоритм расчёта столкновительных потерь энергии быстрых электронов в частично ионизованной плазме, который является обобщением случая торможения электронов в нейтральных средах.

Анализ столкновительного торможения электронов при прохождении частично ионизованной среды показал, что эмпирическая формула [3], основанная на формальной замене в интеграле столкновений электронной плотности плазмы суммой свободных и половины связанных электронов, обладает точностью порядка 10% в характерном для убегающих электронов диапазоне энергии и, следовательно, может быть использована в моделировании кинетики УЭ.

В целом использование результатов работы позволяет аккуратно рассчитывать рассеяние и торможение ускоренных электронов в плазме, содержащей ионы примесей с высоким зарядом ядра.

REFERENCES

1. **Hender T.C. et al.** — Nucl. Fusion, 2007, vol. 47, pp. S128—S202.
2. **Sokolov Yu.A.** — Pis'ma ZhETF (JETPh Letters), 1979, vol. 29, issue 4, pp. 244—246 (in Russian).
3. **Rosenbluth M.N., Putvinski S.V.** — Nucl. Fusion, 1997, vol. 37, № 10, p. 1355.
4. **Hollmann E.M., Austin M.E., Boedo J.A., Brooks N.H. et al.** — In: Proc. of the 24th Fusion Energy Conf. San Diego, USA, October 2012, EX/9-2;
<http://www-aweb.iaea.org/napc/physics/FEC/FEC2012/html/proceedings.pdf>.
5. **Plyusnin V.V., Kiptily V., Bazylev B., Shevelev A. et al.** — Ibid., EX/P8-05;
<http://www-aweb.iaea.org/napc/physics/FEC/FEC2012/html/proceedings.pdf>.
6. **Fernandez-Varea J.M., Mayoi R., Baro J., Salvant F.** — Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, 1993, № 73, p. 447.
7. **Plidov G.I., Dmitrieva I.K.** — Physics Letters, 1976, vol. 56A, № 6, p. 429.

8. **Landau L.D., Lifshits E.M.** Theoretical physics. Vol. 3. — M.: Nauka (Science), 1989 (in Russian).
9. **Berestetskiy V.B., Landau L.D., Lifshits E.M.** Theoretical physics. Vol. 4. — M.: Nauka (Science). 1989 (in Russian).
10. **Gambosh P.** Statistical theory of atom and its application. — M.: Inostr. lit. (Foreign lit.), 1951 (Transl. From German) (in Russian).
11. **Berger M.J., Coursey J.S., Zucker M.A.** ESTAR: Computer Program for Calculating Stopping-Power and Range Tables for Electrons. Version 1.2.2. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD, 2003; <http://physics.nist.gov/Star>.
12. **Mosher D.** Interactions of relativistic electron beams with high atomic-number plasmas. — Phys. Fluids, 1975, vol. 18, pp. 846—857.

AUTHORS

Zhogolev V.E. NRC “Kurchatov Institute”, pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russia; Zhogolev_VE@nrcki.ru

Konovalov S.V. NRC “Kurchatov Institute”, pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russia; Konoval_SV@nrcki.ru

Received 11 June 2014

Problems of Atomic Science and Technology

Ser. Thermonuclear Fusion, 2014, vol. 37, issue 3, pp. 71—88