УДК 533.9

МОДЕЛЬ ПОСТУПЛЕНИЯ ГАЗА В КАМЕРУ ТОКАМАКА ПРИ МАССИВНОЙ ИНЖЕКЦИИ ДЛЯ СМЯГЧЕНИЯ ПОСЛЕДСТВИЙ СРЫВА РАЗРЯДА

В.Е. Жоголев

НИЦ «Курчатовский институт», Москва, Россия

Предлагается феноменологическая модель для описания динамики поступления газа в камеру токамака. Модель необходима для оптимизации параметров системы массивной инжекции инертных газов в ИТЭР на основе комплексного моделирования отклика плазмы на такое воздействие. В работе проведено сравнение с экспериментами на установке JET, в которых фиксировалось изменение плотности газа в разных местах соединительной трубы инжектора. Это позволило сформулировать алгоритм задания подгоночного параметра феноменологической модели газового импульса в зависимости от геометрических характеристик инжектора и состава газовой смеси.

Ключевые слова: массивная инжекция газа, токамак, модель течения газа.

GAS FLOW MODEL FOR SIMULATION OF TOKAMAK DISRUPTION MITIGATION BY MEANS OF MASSIVE GAS INJECTION

V.E. Zhogolev

NRC «Kurchatov Institute», Moscow, Russia

A phenomenological model describing the gas flow from the injector into tokamak vacuum vessel is proposed. The model is aimed to be used in integrated modeling of the plasma response on the massive gas injection, MGI, to optimize basic parameters of the ITER MGI system. Simulation results are compared with experimental measurements of the gas density along the delivery tube of MGI injector of the tokamak JET. Then the algorithm to specify the only fitting parameter of the phenomenological model in terms of geometric characteristics of the injector and gas mixture composition is formulated.

Key words: massive gas injection, tokamak, gas flow model.

ВВЕДЕНИЕ

Массивная инжекция газа в плазму рассматривается как один из наиболее перспективных способов смягчения последствий срывов разряда в ИТЭР. Широкая экспериментальная апробация этого способа активно проводится в настоящее время на крупнейших современных токамаках. При этом ожидается, что массивная инжекция инертных газов в чистом виде или в смеси с молекулярным дейтерием позволит согласованно решить три основные задачи системы смягчения последствий срыва разряда: переизлучение подавляющей доли тепловой энергии плазмы на стадии теплового срыва, призванное равномерно перераспределить тепловой поток по всей поверхности камеры; обеспечение удержания скорости спада тока плазмы на стадии срыва тока в инженерно допустимых пределах, т.е. предотвращение запредельных электромеханических нагрузок на токопроводящие конструкции токамака; предотвращение формирования или подавления пучков убегающих электронов. Для самосогласованного (последовательного) решения указанных задач, строго говоря, могут понадобиться различные системы массивного напуска газа, отличающиеся как скоростью напуска, так и составом газовой смеси.

Одной из ключевых проблем в интегрированном моделировании управляемого (смягчаемого) срыва разряда является разработка надёжной модели массивного газонапуска, которая позволит связать ключевые инженерно-технические параметры инжекторов, такие, как объём резервуара, размеры клапана и подводящей трубы и т.п., с характеристиками потока газа на границе плазмы, являющимися входными данными для моделирования «смягчаемого» срыва. Количество газовых инжекторов в системе смягчения последствий срыва разряда в ИТЭР зафиксировано в эскизном проекте и составляет четыре инжектора полной ёмкостью $8 \text{ кПа} \cdot \text{м}^3$ для смягчения тепловых нагрузок и один инжектор на $100 \text{ кПа} \cdot \text{м}^3$ для подавления убегающих электронов [1], тогда как конкретные спецификации каждого инжектора (расположение, геометрия, состав газовой смеси) ещё предстоит определить на основе подробного численного моделирования, достоверность результатов которого, в свою очередь, должна быть подтверждена сравнением с накопленными экспериментальными данными.

Для проектирования системы смягчения последствий срывов в ИТЭР и её оптимизации потребуется проведение широкомасштабных расчётно-теоретических исследований, обязательным требованием для

разрабатываемой модели массивной инжекции газа, помимо необходимой точности, также являются её эффективность и быстроедействие. Другими словами, имеющиеся (коммерческие) громоздкие численные коды по моделированию газовой динамики в данном случае не пригодны.

Для конкретной конструкции системы массивной газовой инжекции можно прямо использовать результаты стендовых измерений изменения во времени потока газа после открытия клапана. Однако для проведения многовариантных расчётов на основе комплексной модели для оптимизации параметров системы массивной газовой инжекции с целью определения возможных сценариев гашения разряда ИТЭР нужно сформулировать некоторый универсальный алгоритм расчёта динамики поступления газа в плазму в зависимости от параметров инжекторов. В частности, интенсивные экспериментальные исследования по смягчению последствий срыва разряда путём массивной инжекции газа на токамаке DIII-D сопровождались и расчётно-теоретическими разработками системы газонапуска [2]. Основные теоретические выводы [2] проверялись сравнением с результатами численного моделирования с использованием громоздких коммерческих газодинамических кодов. Для практического использования в моделировании срывов разряда вместо параметрической модели газонапуска, как правило, предлагалась прямая интерполяция результатов подробных расчётов [3]. Естественными недостатками такой интерполяции являются её неуниверсальность вследствие жёсткой привязки к DIII-D и непригодность для использования в параметрическом анализе при построении концептуального проекта системы смягчения последствий срыва разряда в ИТЭР.

В статье предлагается упрощённая физическая модель истечения газа из баллона в камеру токамака, которая может быть использована с указанной целью. Её верификация была проведена в применении к системе массивной газовой инжекции установки JET, которая является прототипом аналогичной системы ИТЭР. Проведено сравнение результатов расчётов с использованием предлагаемой модели с измерениями на испытательном стенде системы массивной инжекции газа установки JET, в которых фиксировалось изменение плотности газа в разных местах соединительной трубы. Полученная точность совпадения с экспериментом достаточна для проведения комплексного моделирования.

В статье:

- рассматривается модель квазистационарного течения газа по трубе, которое устанавливается спустя некоторое время после открытия клапана. Основным результатом является найденная зависимость от времени потока частиц в трубе на заданном расстоянии от клапана;
- предлагается феноменологическая модель для описания потока частиц в начале импульса газа. При этом предполагается непрерывность концентрации и скорости частиц на условной границе начального и квазистационарного режимов течения газа;
- проводится сравнение результатов модели с тестовыми экспериментами с системой массивной инжекции газа в плазму на установке JET. При этом выявлена зависимость подгоночного параметра модели от скорости звука (т.е. от состава газовой смеси), объёма баллона и площади сечения клапана;
- строится комбинированная модель для описания начального и квазистационарного режимов вытекания газа из трубы, которая по своей сути является гладкой аппроксимацией результатов предложенной модели.

КВАЗИСТАЦИОНАРНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ ГАЗА

Рассмотрим задачу истечения в вакуум газа из баллона, считая его объём V достаточно большим. Будем считать, что через некоторое время t_1 после открытия клапана с площадью S газ выходит в цилиндрическую трубу с площадью сечения A , в которой устанавливается практически стационарное течение. Изменение полного числа частиц в баллоне $N(t)$ описывает следующее уравнение:

$$dN/dt = -Sn_*c_*; \quad N(t_1) = N_1. \quad (1)$$

В дальнейшем удобно ввести число $k = 2/(\gamma - 1)$. Для одноатомного газа $\gamma = 5/3$, так что $k = 3$. В соответствии с теорией [4] локальная скорость звука и концентрация частиц газа в самом узком месте имеют значения

$$c_* = \left(\frac{k}{k+1} \right)^{1/2}; \quad n_* = \frac{N}{V} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k/2}, \quad (2)$$

c — скорость звука зависит от температуры газа T внутри баллона и массы его частиц m :

$$c = c_0(T/T_0)^{1/2}; \quad c_0 = (\gamma T_0/m)^{1/2}. \quad (3)$$

Будем считать, что по мере вытекания газа его температура внутри баллона меняется по адиабатическому закону

$$T = T_0(N/N_0)^{2/k}, \quad (4)$$

здесь T_0 — значение температуры в баллоне в момент открытия клапана; N_0 — значение полного числа частиц в баллоне в момент открытия клапана.

В этом случае скорость звука в газе внутри баллона связана с текущим значением общего числа частиц

$$c = c_0(N/N_0)^{1/k}. \quad (5)$$

Учитывая выражения (2) и (5), уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dN}{dt} = -\frac{c_0 S N_0}{V} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left(\frac{N}{N_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} = -C N_1 \left(\frac{N}{N_1} \right)^{\frac{k+1}{k}}; \quad (6)$$

$$C = \frac{c_0 S}{V} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2}} \left(\frac{N_1}{N_0} \right)^{1/k}. \quad (7)$$

Решением уравнения (6) вместе с начальным условием является следующая зависимость:

$$N(t) = N_1 [1 + (t - t_1)C/k]^{-k}. \quad (8)$$

При стационарном течении после выхода из клапана газа в трубу с большей площадью поперечного сечения меняется как его плотность, так и скорость. Если считать этот стык соплом Лавая, то в соответствии с теорией концентрация частиц n связана со скоростью течения газа v следующим образом:

$$n = (N/V) \left(1 - \frac{1}{k+1} \frac{v^2}{c_*^2} \right)^{k/2}. \quad (9)$$

Кроме того, сохраняется полный поток частиц, так что справедливо

$$A n v = S n_* c_*. \quad (10)$$

Подставляя выражение (9) в уравнение (10), получим

$$\frac{v}{c_*} \left(1 - \frac{1}{k+1} \frac{v^2}{c_*^2} \right)^{k/2} = D; \quad D = \frac{S v n_*}{A N} = \frac{S}{A} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k/2}. \quad (11)$$

Здесь учтено выражение (2) для критической концентрации. Уравнение (10) можно переписать в виде

$$u [1 - u/(k+1)]^k = D^2; \quad u = (v/c_*)^2, \quad (12)$$

а его корень $u > 0$ можно определить с помощью численных методов. Отсюда, в частности, следует, что в момент времени t_1 скорость течения около клапана равна

$$v_1 = c_*(t_1) \sqrt{u}. \quad (13)$$

Если использовать выражения (2) и (5), то скорость газа в трубе около клапана можно выразить через число частиц в баллоне. Используя далее решение (8), получаем явную зависимость скорости от времени

$$v(t, x=0) = v_1 (N/N_1)^{1/k} = v_1 / [1 + (t - t_1)C/k]. \quad (14)$$

При этом скорость газа в произвольном месте трубы связана с этой скоростью следующим образом:

$$v(t, x) = v(t', x=0); \quad t' = t - x/v(t', x=0). \quad (15)$$

Если в определение (15) для момента времени t' подставить выражение (14) для скорости, то можно получить

$$t' = t_1 + \frac{v_1(t - t_1) - x}{v_1 + xC/k}; \quad \frac{dt'}{dt} = B \equiv \frac{v_1}{v_1 + xC/k}. \quad (16)$$

Отметим, что константа B не зависит от выбора момента t_1 . Модификация (16) имеет вид

$$t' = t_1 + B(t - t_1 - x/v_1); \quad B = \left\{ 1 + \frac{xS}{kV\sqrt{u}} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{k/2} \right\}^{-1}. \quad (16a)$$

Далее нас будет интересовать, как меняется полный поток частиц в произвольном месте трубы:

$$G(t, x) = -\frac{dN'}{dt} = -B \frac{dN(t')}{dt'}. \quad (17)$$

Здесь учтена задержка выхода газа из трубы по сравнению с моментом его вытекания через открытый клапан. Естественно, что плотность газа внутри трубы равна

$$n(t, x) = \frac{G(t, x)}{Av(t, x)}. \quad (18)$$

Если в (18) последовательно подставить выражения (17), (16) и (8), то получим

$$n(t, x) = \frac{CN(t')}{A(v_1 + xC/k)}. \quad (19)$$

МОДЕЛЬ ФРОНТА ГАЗОВОГО ИМПУЛЬСА

Для построения модели фронта импульса до момента t_1 используем известное в теории [4] автомодельное решение для распространения газа по бесконечной трубе с постоянным сечением. В работе [2] оно записано в виде

$$v = \frac{1+\xi}{k+1} kc_0; \quad n = \frac{N_0}{V} \left(\frac{k-\xi}{k+1} \right)^k. \quad (20)$$

Здесь автомодельная переменная определяется как

$$\xi = \frac{x}{c_0 t} \quad (21)$$

и может меняться в интервале $-1 \leq \xi \leq k$. При этом её нулевое значение $\xi = 0$ соответствует положению клапана. Легко видеть, что впереди фронта $\xi = k$ скорость газа имеет значение

$$v_0 = kc_0. \quad (22)$$

Реальная ситуация отличается от той, в условиях которой получено решение (20). Так, труба впереди канала клапана имеет больший диаметр, а позади клапан вообще переходит в баллон. Фронт волны разряжения уходит внутрь баллона, и пока не произойдет его отражение от стенок, не следует ожидать сильного влияния процессов внутри на движение газа во внешней области. Кроме того, при сверхзвуковом течении газ не сразу начинает соприкасаться со стенками трубы, поэтому в самом начале около клапана есть все основания принять автомодельные распределения (20) внутри струи. Отметим, что после того, как газовый фронт достиг определённого места (в том числе конца трубы) с координатой x , уравнение для оставшегося внутри системы числа частиц N' имеет вид

$$\frac{dN'}{dt} = -\frac{SN_0 c_0}{V} k \left(\frac{k-\xi}{k+1} \right)^k \frac{1+\xi}{k+1} = -\frac{SN_0 c_0}{V} \frac{d}{dt} [tI(\xi)]; \quad I(\xi) = \int_{\xi}^k \left(\frac{k-\eta}{k+1} \right)^k d\eta = \left(\frac{k-\xi}{k+1} \right)^{k+1}. \quad (23)$$

Легко можно определить количество частиц ΔN , которые вышли из баллона к моменту времени t_1 . Естественно, оно определяет оставшиеся в баллоне частицы:

$$N_1 = N_0 - \Delta N; \quad \Delta N = \frac{SN_0 c_0 t_1}{V} I(0). \quad (24)$$

Будем считать, что после момента времени t_1 концентрация частиц в любом поперечном сечении трубы из-за расширения струи до стенок стала одинаковой, а вдоль трубы она меняется следующим образом:

$$n(t, x) = -\frac{SN_0 c_0 t_1}{AV} \frac{dI}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (25)$$

В более мягком варианте можно говорить о том, что (25) задаёт среднюю по сечению плотность. Аналог автомодельной переменной $0 \leq \xi(t, x) \leq 3$ пока будем считать неопределённой функцией времени и координаты, а не понимать её в соответствии с определением (21). Естественно, что при таком распределении концентрации частиц переходного режима их общее число в трубе по-прежнему определяется формулой (24). Более того, уравнение $\xi(t, x) = \text{const}$ соответствует заданию траектории частиц, которые вышли через клапан в один и тот же момент времени. Отсюда их скорость можно выразить следующим образом:

$$v(t, x) = -\left(\frac{\partial \xi / \partial t}{\partial \xi / \partial x} \right). \quad (26)$$

Перемножая (23) и (24) и ещё умножая на площадь трубы, получим выражение для потока частиц

$$G(t, x) = \frac{SN_0 c_0 t_1}{V} \frac{dI}{d\xi} \frac{\xi}{t}. \quad (27)$$

Для построения феноменологической модели переходного режима газового импульса нужно задавать модельную функцию $\xi(t, x)$ в области своего определения $x_1(t) \leq x \leq x_0(t)$. Будем считать, что передний фронт движется по автомодельному закону, а скорость заднего фронта равна скорости стационарного течения позади него. Из этого следует, что

$$x_0(t) = v_0 t; \quad x_1(t) = v_1(t - t_1). \quad (28)$$

Задний фронт будем считать поверхностью слабого разрыва, так что при переходе через него плотность частиц не меняется. Тогда, приравнявая правые части выражений (25) и (19) при значении $x = x_1$ (тогда $t' = t_1$ и $\xi = 0$), можно получить выражение для производной модельной функции в этом месте

$$\xi'_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{VCN_1}{SN_0 c_0 t_1 (v_1 + Cx_1/k)} \left(\frac{k+1}{k} \right)^k. \quad (29)$$

Одной из возможных модельных функций, принимающей нулевое граничное значение при $x = x_1$ и имеющей соответствующее (29) значение производной, является

$$\xi(y) = \xi'_1 \arctan(\alpha y) / \alpha + \beta (y/\Delta y)^l; \quad y = x - x_1, \Delta y = x_0 - x_1, \quad (30)$$

при этом рассматриваются значения параметров $l > 1$ и $\alpha(t) \geq 0$. Функция (30) должна быть монотонно возрастающей, так что её производная

$$\xi'(y) = \frac{\xi'_1}{1 + \alpha^2 y^2} + \frac{l\beta}{\Delta y} \left(\frac{y}{\Delta y} \right)^{l-1} \quad (31)$$

во всей области определения должна быть положительной $\xi'_1 > 0$. Таким образом, получим условие на возможные значения коэффициента $\beta > \beta_{\min}$

$$\beta_{\min} = \min \left\{ \frac{\Delta y \xi'_1}{l(1 + \alpha^2 y^2)} \left(\frac{\Delta y}{y} \right)^{l-1} \right\} = -\frac{\Delta y \xi'_1 z}{l} < 0; \quad (32)$$

$$z(\alpha) = \frac{1}{1 + (\alpha \Delta y)^2} \leq 1. \quad (33)$$

Легко видеть, что значение $\beta = 0$ является допустимым. Но для того чтобы всегда обеспечивать выполнение условия $\xi(y = \Delta y) = k$, далее будем полагать $\beta = \beta_0$:

$$\beta_0 = k - \xi'_1 \arctan(\alpha \Delta y) / \alpha. \quad (34)$$

Тогда условие $\beta_0 > \beta_{\min}$ ограничивает возможные значения параметра α . При этом желательно его выбрать так, чтобы модельная функция воспроизводила производную при $x = x_0$ в соответствии с авто-модельным законом (21)

$$\xi'_1(y = \Delta y) = \xi'_1 \frac{1}{c_0 t}. \quad (35)$$

Если в выражении (31) положить $\beta = \beta_1$, то условие (35) автоматически выполнится:

$$\beta_1 = \frac{\Delta y}{l} (\xi'_1 - z \xi'_1) > \beta_{\min}. \quad (36)$$

Кроме того, будет выполняться условие монотонности.

Исследуем условия, при которых возможно выбирать параметр α так, чтобы он был корнем уравнения $\beta_0 = \beta_1$. Для этого исследуем функцию

$$f(\alpha) = \alpha(\beta_0 - \beta_1). \quad (37)$$

Естественно, что $f(0) = 0$. Однако нас интересует наличие положительного корня $\alpha_0 > 0$, когда $f(\alpha_0) = 0$. Для его существования необходимо изменение знака производной $df/d\alpha$ рассматриваемой функции при $\alpha > 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\xi'_1 \Delta y}{l} [2z^2 - (l+1)z + H]; \quad (38)$$

$$H = \frac{kl}{\xi'_1 \Delta y} - \frac{\xi'_0}{\xi'_1}. \quad (39)$$

Это возможно, если существуют вещественные корни уравнения $df/d\alpha = 0$. Для этого необходимо, чтобы вещественными были значения

$$z_{1,2} = \frac{l+1 \mp \sqrt{(l+1)^2 - 8H}}{4}. \quad (40)$$

Теперь учтём ограничение (33) для диапазона изменения $z \leq 1$, и далее будем полагать $l = 3$ с целью добиться однозначного выбора. Тогда получим выражение

$$z_1 = 1 - \sqrt{1 - H/2}, \quad (41)$$

которое даёт допустимое значение при условии

$$0 \leq H \leq 2. \quad (42)$$

Величине z_1 соответствует

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{1/z_1 - 1}}{\Delta y}. \quad (43)$$

Возвращаясь к корню уравнения (37), получим оценку снизу диапазона его существования $\alpha_0 > \alpha_1$. Для получения оценки сверху отметим, что если $f(\alpha_0) = 0$, то удовлетворяется соотношение

$$\alpha = \xi'_1 \arctan(\alpha_0 \Delta y) / (k - \beta_1), \quad (44)$$

которое представляет собой это же уравнение, но переписанное в другом виде. На основе определения (36) можно сделать оценку $\beta_1 < \beta_1^{\max}$:

$$\beta_1^{\max} = \Delta y \xi'_1 / 3. \quad (45)$$

После этого становится понятным неравенство $\alpha_0 < \alpha_2$:

$$\alpha_2 = \frac{\pi \xi_1'}{2(k - \beta_1^{\max})}. \quad (46)$$

С точки зрения численного алгоритма можно использовать метод Ньютона для нахождения нуля функции (37) с использованием её производной (38) в диапазоне значений

$$\alpha_1 < \alpha_0 < \alpha_2. \quad (47)$$

Ограничения при использовании модели. Модель содержит единственный параметр, который разумно задавать исходя из сравнения с экспериментами. Это время t_1 , за которое из баллона выходит ΔN частиц. Естественно, что опустошение баллона не должно быть полным, т.е.

$$\Delta N/N_0 < 1. \quad (48)$$

Если учесть определение (23), то из этого получается следующее ограничение:

$$t_1 < \frac{V}{Sc_0} \left(\frac{k+1}{k} \right)^{k+1}. \quad (49)$$

Вообще говоря, знак меньше в (49) лучше понимать как много меньше, поскольку в противном случае сильно нарушаются условия, при которых проведено модельное рассмотрение.

Теперь разберём, что означают условия (42) на величину H для существования корня z_1 . Перепишем эти условия в виде

$$0 < 2x_0 + x_1 < 2\xi_{\text{lim}}x_0/k; \quad \xi_{\text{lim}} = \xi_1'(x_0 - x_1). \quad (50)$$

Здесь уже учтено значение $l = 3$. Смысл обозначения ξ_{lim} состоит в том, какое значение получится у этой переменной в точке x_0 при линейном росте с нулевого значения в точке x_1 . Используя определения (28), перепишем условия (50) в виде условия на параметр t_1

$$1 + (2v_0/v_1)(1 - \xi_{\text{lim}}/k) < t_1/t < 1 + 2v_0/v_1; \quad \xi_{\text{lim}} = \xi_1'[(v_0 - v_1)t + v_1t_1]. \quad (51)$$

Отметим, что величина ξ_{lin} увеличивается со временем, так что с некоторого момента ограничение снизу полностью снимается. Однако модель распространения фронта газового импульса может не очень хорошо работать при описании динамики процессов при малых временах после открытия клапана, так как сильно ограничен диапазон выбора параметра t_1 . Понятно, что такая ситуация возникает для точек, расположенных близко к клапану. Фактически это означает попытку описания переходных процессов, включающих расширение газовой струи до стенок трубы.

Феноменологическая модель газового импульса, предложенная в этой работе, была реализована в виде подпрограммы на языке фортран для включения в комплексные коды динамики плазмы. Однако при её использовании могут возникать ситуации, когда не удаётся выполнить условия (51), но желательно избежать аварийного завершения расчётов. По этой причине для таких случаев в подпрограмме должен быть предусмотрен алгоритм выбора другого вида модельной функции, который может не обеспечивать выполнения условия (35), но обладает свойством монотонности. Так, при уменьшении отношения t_1/t ниже нижней границы в условии (51) формально будем полагать параметр $\alpha = 0$, что равно его предельному значению. Это соответствует

$$\xi(y) = \xi_1'y + (k - \xi_1'\Delta y)(y/\Delta y)^3. \quad (52)$$

При точном равенстве отношения t_1/t верхней границе условия (51) формально надо положить параметр $\alpha = \infty$. Однако соответствующая этому случаю функция $\xi(y) = k(y/\Delta y)^3$ является плохой, так как в соответствии с (25) определяет нулевое значение концентрации частиц в конце фронта газового импульса. По этой причине будем считать верхнюю границу условий (51) абсолютным ограничением для применения модели.

СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

В качестве экспериментального материала используем результаты из секции 3 работы [5]. Не претендуя на знание абсолютно точных значений, будем считать неизменными во всех рассматриваемых опытах

объём баллона $V = 650 \text{ см}^3$ и внутренний диаметр соединительной трубы $d_t = 3,8 \text{ см}$. Кроме того, начальную температуру газа в баллоне будем считать комнатной — $T_0 = 300 \text{ К}$.

В первом случае проведены опыты с гелием, скорость звука для которого равна $c_0 = 1015 \text{ м/с}$. После открытия клапана в момент $t = 0$ этот газ вытекал из баллона в трубу через клапан с диаметром $d_v = 1 \text{ см}$. При этом изменение концентрации частиц фиксировалось на расстоянии от клапана $x = 4,5 \text{ м}$. На рис. 1 жирными точками показаны значения отношения измеренной концентрации частиц в трубе к еёначальному значению в баллоне для некоторых моментов времени. Указанные значения являются не совсем точными, поскольку визуальным образом взяты с графика № 7 из работы [5]. На этом же графике линиями 2, 3 и 4 показаны результаты применения феноменологической модели при значениях подгоночного параметра $t_1 = 2, 3, 4 \text{ мс}$ соответственно. Приход самого начала фронта газового импульса в точку измерения соответствует скорости его движения $v_0 = 3045 \text{ м/с}$ и достаточно хорошо соответствует эксперименту. Кроме того, после 10 мс все модельные кривые вполне удовлетворительно описывают уменьшение концентрации частиц во времени. Момент времени излома кривых приходится на конец фронта при скорости его движения $v_1 = 1616 \text{ м/с}$. Конечно, излом исходно заложен в модель, а в действительности всё происходит плавно. Однако в рамках модели средняя кривая представляется наиболее близкой к эксперименту. Отметим, что при оптимальном значении параметра $t_1 = 3 \text{ мс}$ время опустошения баллона в 8 раз равно значению $k/C = 45 \text{ мс}$ ($N_1/N_0 = 0,884$).

Другие данные из работы [5] относятся к опытам с неоном, у которого скорость звука равна $c_0 = 454 \text{ м/с}$. Измерение концентрации этого газа проводилось на расстояниях от клапана $x = 4,5, 2,6 \text{ м}$. При этом основное внимание уделялось распространению фронта газового импульса. Основным вывод этих экспериментов сводится к утверждению, что характер изменения концентрации газа хорошо описывается автомодельным законом. Однако рассчитанная по формуле (20) концентрация должна быть умножена на некоторый коэффициент, который подбирался для наилучшего согласования с экспериментом. На первый взгляд, этот коэффициент должен быть равен отношению площадей поперечного сечения клапана и соединительной трубы $(d_v/d_t)^2$, но оказалось это не совсем так. В работе [5] результаты измерений на графиках представлены в зависимости от автомодельной переменной $x/c_0 t$. По этой причине результаты применения феноменологической модели далее будут представлены в таких же координатах.

На рис. 2 показан случай, когда диаметр клапана был равен $d_v = 1 \text{ см}$. На нём две сплошные кривые относятся к разным расстояниям до точки наблюдения. Они соответствуют феноменологи-

Рис. 1. Изменение отношения концентрации гелия (He) в трубе на расстоянии $4,5 \text{ м}$ от клапана к его начальной концентрации в баллоне: ● — результаты измерений; 2, 3 и 4 — результаты феноменологической модели при значениях подгоночного параметра $t_1 = 2, 3, 4 \text{ мс}$ соответственно

Рис. 2. Изменение отношения концентрации неона (Ne) в трубе при значениях координаты $x = 4,5, 2,6 \text{ м}$ к его начальной концентрации в баллоне в зависимости от автомодельной переменной $x/c_0 t$. Расчёты соответствуют оптимальному параметру $t_1 = 5 \text{ мс}$ и диаметру клапана $d_v = 1 \text{ см}$

ческой модели с значением параметра $t_1 = 5$ мс, которое представляется оптимальным. Отметим, что при этом максимальные значения концентрации частиц получаются достаточно близкими экспериментальным измерениям. Кроме того, уменьшение модельных кривых при уменьшении аргумента $x/c_0 t$ достаточно хорошо описывает эксперимент. Для полноты изложения приведём значения некоторых переменных: $v_0 = 1361$ м/с, $v_1 = 731$ м/с, $k/C = 100$ мс ($N_1/N_0 = 0,913$). На этом же рисунке для сравнения пунктиром даётся автомоделная зависимость (20), умноженная на 0,1. Справедливости ради отметим, что в работе [5] имеются результаты измерений при $x = 0,6$ м. Однако в этом случае рассмотренную модель нельзя применять из-за выхода за границы ограничения (51).

Рис. 3 аналогичен рис. 2, но относится к случаю, когда диаметр клапана был увеличен ($d_v = 2,8$ см).

Рис. 3. Изменение отношения концентрации n/n_0 неона (Ne) при значениях координаты $x = 4,5, 2,6$ м к его начальной концентрации в баллоне в зависимости от автомодельной переменной $x/c_0 t$. Расчёты соответствуют оптимальному параметру $t_1 = 1,5$ мс, диаметру клапана $d_v = 2,8$ см

Здесь сплошные кривые соответствуют феноменологической модели с значением параметра $t_1 = 1,5$ мс, которое представляется оптимальным. Значения переменных в модели: $v_1 = 579$ м/с, $k/C = 13,4$ мс ($N_1/N = 0,796$). В отличие от ситуации, к которой относится рис. 2, для рассматриваемого случая сильно уменьшается до 13,4 мс характерное время опустошения баллона. На этом рисунке пунктиром даётся автомоделная зависимость (20), умноженная на 0,6. Совпадение с экспериментом здесь значительно хуже. Это прежде всего касается положения максимума кривых, который в эксперименте получался при меньших значениях аргумента $x/c_0 t$. Кроме того, экспериментальные максимумы получаются более размытыми. Однако всё равно феноменологическая модель в целом правильно отражает основные особенности импульса газа и вполне может быть использована для комплексного моделирования отклика плазмы на массивную газовую инжекцию.

Для того чтобы феноменологическая модель импульса газа была замкнута, не хватает априорного алгоритма определения подгоночного параметра, t_1 .

Ранее были рассмотрены три разных эксперимента, и для каждого из них были определены (пусть несколько субъективно) его оптимальные значения. При этом менялись площадь клапана и скорость звука, которая связана с массой атомов газа. На основе этого прослеживается следующая закономерность, которую можно выразить в виде следующего скейлинга:

$$t_1 = \Delta t + w \frac{V}{c_0 S}, \quad (53)$$

здесь по физическому смыслу Δt — время срабатывания клапана; w — безразмерный коэффициент. Если бы баллон имел форму длинной трубы с диаметром клапана, то можно было бы ожидать значение $w = 2$. Это получается из предположения, что переходный процесс заканчивается после того, как волна разрежения дойдёт до торца трубы и вернётся назад к клапану. Для конкретной конструкции баллона и способа открытия клапана эмпирически получаются примерно следующие значения: $\Delta t \sim 1$ мс и $w \sim 0,22$. Для контроля по формуле (53) рассчитаем значения подгоночного параметра для рассмотренных случаев $t_1 = 2,8, 5,0, 1,51$ мс. Это очень близко к указанным оптимальным значениям.

Возникает вопрос о проверке модели с использованием феноменологического параметра по алгоритму (53) с коэффициентами $\Delta t = 1$ мс и $w = 0,22$, которые соответствуют экспериментальным данным [5]. Для этого вернёмся к результатам стендовых измерений системы газового напуска установки JET [6] с параметрами $V = 0,65$ см³, $d_t = 3,8$ см, $d_c = 1$ см. Так, на рис. 7 работы [6] показан график изменения общего числа частиц смеси 10%Ar + 90%D₂, которые прошли сечение трубы на расстоянии $x = 4,5$ м от

клапана. Для смеси одноатомного и двухатомного газов показатель адиабаты зависит от соответствующих пропорций смешения ($a_1 = 0,1$, $a_2 = 0,9$):

$$y = 1 + \frac{2}{3a_1 + 5a_2} = 1,417. \quad (54)$$

Тогда для комнатной температуры 300 К и средней массы частиц смеси $m = 7,6$ а.е. скорость звука равна $c_0 = 679$ м/с. Другие параметры модели равны $k = 4,79$, $v_0 = kc_0 = 3258$ м/с, $v_1 = 1303$ м/с, $t_1 = 3,68$ мс. При этом задержка t_1 рассчитана по формуле (53). Отметим, что в работе [6] для двухатомного газа неправильно считается задержка прихода фронта газового импульса, так как в этом случае надо полагать $k = 5$, а не $k = 3$.

На рис. 4 показано рассчитанное изменение величины $1 - N(t')/N_0$, имеющей смысл отношения полного числа частиц, вышедших из трубы к их начальному содержанию в баллоне N_0 . При этом число оставшихся в баллоне частиц $N' = N(t')$ относится к более раннему моменту времени t , который рассчитывается по формуле (16). Сравним этот рисунок с кривой на рис. 7 из работы [6], которая относится к газовому импульсу. Момент времени, при котором в эксперименте достигается значение указанного отношения 0,001 (с него начинается кривая на рис. 7 из работы [5]), примерно совпадает с соответствующим моментом на рис. 4. Кроме того, и в целом кривые на этих рисунках достаточно хорошо совпадают.

Рис. 4. Изменение отношения полного числа частиц смеси газов 10%Ar + 90%D₂, вышедших из трубы ($x = 4,5$ м), к их начальному содержанию в баллоне N_0 . При этом число оставшихся в баллоне частиц $N' = N(t')$ относится к более раннему моменту времени t'

КОМБИНИРОВАННАЯ МОДЕЛЬ

При формулировании комбинированной модели ставилась задача предложить гладкую аппроксимацию, которая объединяет квазистационарное вытекание газа из трубы с начальным переходным режимом. Пусть длительность τ означает время, прошедшее после начала выхода газа из трубы:

$$\tau = t - t_0; \quad t_0 = \frac{x}{kc_0}. \quad (55)$$

Запишем уравнение для изменения общего числа частиц N' в баллоне и трубе

$$\frac{dN'}{d\tau} = -G = -BC_0 \left(\frac{N'}{N_0} \right)^{\frac{k+1}{k}} f(\tau); \quad C_0 = \frac{Sc_0}{V} \left(\frac{k}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2}}. \quad (56)$$

Здесь первый коэффициент B имеет то же значение для потока частиц, как и в выражении (17). Принципиальное отличие этого уравнения от (6) состоит в наличии в правой части монотонной функции f . По смыслу она описывает плавное изменение потока частиц G от начала до перехода в квазистационарный режим так, что $f(0) = 0$ и $f(\tau \rightarrow \infty) = 1$. Решение уравнения (56) имеет вид

$$N'(\tau) = N_0 [1 + F(\tau)BC_0/k]^{-k}; \quad F(\tau) = \int_0^\tau f(\tau') d\tau', \quad (57)$$

при этом сам поток частиц будет равен

$$G(\tau) = BC_0 [1 + F(\tau)BC_0/k]^{-(k+1)} f(\tau). \quad (58)$$

Далее будем задавать функцию f в следующем виде:

$$f(\tau) = \exp[-\ln^2(\tau_f/\tau)]; \quad 0 < \tau < \tau_f; \quad f(\tau) = 1, \quad \tau \geq \tau_f. \quad (59)$$

Здесь τ_f — варьируемый параметр, который фиксирует момент окончания переходного режима. Отметим, что в этот момент производная от функции (59) равна нулю ($f'(\tau_f) = 0$), интеграл по времени выражается аналитически с использованием функции интеграла вероятности erf :

$$F(\tau) = \tau_f e^{1/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ 1 - \text{erf} \left[\ln(\tau_f/\tau) + 1/2 \right] \right\}; \quad 0 \leq \tau \leq \tau_f; \quad F(\tau) = F(\tau_f) + \tau - \tau_f, \quad \tau > \tau_f. \quad (60)$$

Вместо варьируемого параметра τ_f легче подбирать коэффициент пропорциональности q :

$$\tau_f = q t_1. \quad (61)$$

Рис. 5. Скорость изменения отношения числа частиц в системе к их начальному значению в баллоне: 1 — условия рис. 4; 2 — формула (58) с $q = 2$ в (61); 3 — формула (58) с $q = 1,5$

Напомним, что для определения интервала t_1 используется алгоритм (53). Так, в случае рис. 4 этот интервал равен $t_1 = 3,68$ мс. Для этого случая на рис. 5 кривая 1 показывает скорость изменения отношения числа частиц в системе инжекции газа к их начальному значению в баллоне. Для сравнения там же показаны кривые 2 и 3, которые рассчитаны по выражению (58) для двух значений коэффициента пропорциональности в формуле (61) при $q = 2$ и $1,5$ соответственно. Значение $q = 2$ является близким к оптимальному, так как кривая 2 практически точно совпадает с кривой 1, начиная с определённого момента времени. Это связано с тем, что число частиц, вышедших из трубы за интервал времени τ_f , оказывается в расчётах равным между собой. Аналогичное число частиц при меньшем значении $q = 1,5$ увеличивается, и после определённого момента времени кривая 3 лежит ниже кривых 1 и 2. То, что в дан-

ном случае оптимальное значение коэффициента пропорциональности q оказалось очень близким к двум, является случайностью. В действительности точное совпадение потоков частиц, соответствующее двум рассматриваемым моделям, при достаточно большом времени происходит при выборе

$$\tau_f = \frac{1}{\Lambda} \left[t_1 + x/v_1 - t_0 - \frac{1 - (N_1/N_0)^{1/k}}{BC/k} \right]; \quad (62)$$

$$\Lambda = 1 - e^{1/4} \Lambda \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \text{erf}(1/2)] = 0,454. \quad (63)$$

Тогда в нашем конкретном случае оптимальным значением будет $q = 2,04$. Выражение (62) получается, если приравнять правые части зависимостей (57) и (8) для числа частиц $N'(\tau) = N(t')$ при $\tau = \tau_f$ и $t = t_0 + \tau_f$. При этом следует использовать выражение (16а) для определения t' и учесть $C/C_0 = (N_1/N_0)^{1/k}$.

При получении аппроксимации потока (58) не предполагалось изменения во времени скорости газа, которое тоже может потребоваться в практических приложениях. Предложим следующую аппроксимацию для скорости газа, которая не содержит дополнительных параметров:

$$v(\tau) = \frac{c_0}{1 + F(\tau)BC_0/k} \left\{ k[1 - f^{1/k}(\tau)] + \sqrt{\frac{uk}{k+1}} f^{1/k}(\tau) \right\}. \quad (64)$$

Эта зависимость определяет плавное уменьшение скорости с $v(0) = kc_0$ до скорости квазистационарного течения. На рис. 6 кривая 1 соответствует условиям рис. 4, кривая 2 рассчитана по формуле (62) с учётом значения $q = 2$. Сравнение этих кривых показывает, что при хорошем совпадении значений скорости в начале и после определённого момента зависимость (62) является более плавной. Отметим, что

добиться более точного совпадения не являлось целью рассмотрения, поскольку сама феноменологическая модель фронта газового импульса (кривая 1) не претендует на высокую точность. После того, как алгоритм расчёта скорости газа определён, можно найти изменение концентрации частиц газа по формуле (18). С учётом зависимостей рис. 6 для полноты изложения на рис. 7 показано соответствующее изменение отношения концентрации частиц n/n_0 при выходе смеси газов из трубы к их начальной

Рис. 6. Изменение отношения скорости смеси газов в конце трубы к скорости звука в баллоне до открытия клапана: 1 — условия рис. 4; 2 — формула (64) с $q = 2$ в (61)

Рис. 7. Изменение отношения концентрации частиц при выходе смеси газов из трубы к их начальной концентрации в баллоне: 1 — условия рис. 4; 2 — комбинированная модель

концентрации в баллоне. С физической точки зрения кривая 2 кажется более естественной, чем кривая 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена модель для описания динамики поступления газа в камеру токамака. Она представляет собой сшивку почти стационарного режима течения газа с феноменологической моделью фронта импульса. В соответствии с этой моделью в каждый конкретный момент времени после открытия клапана можно рассчитать поток частиц газа из трубы. Для этого нужно использовать формулу (17) или (27) в зависимости от того, какой режим течения газа имеется в данный момент в конце трубы. Все определения, имеющие отношение к формулам (17) и (27), имеются в тексте статьи. Однако полный алгоритм вычислений является достаточно громоздким. По этой причине для практического использования на языке фортран была разработана программа GASFLUX, которая выполняет все необходимые вычисления для определения потока частиц в зависимости от времени при интересующих геометрических параметрах системы массивной инжекции газов.

Предложенная модель была использована для описания результатов стендовых экспериментов с системой массивной инжекции газа в плазму на установке JET. При этом была выявлена зависимость (53) подгоночного параметра модели t_1 от скорости звука, объёма баллона и площади сечения клапана. В целом после такой настройки получается хорошее совпадение с экспериментом. В дальнейшем программа GASFLUX может быть использована для оптимизации параметров системы массивной инжекции газов в ИТЭР на основе комплексного моделирования.

Для удобства использования предложена параметрическая зависимость (58), с помощью которой можно гладко аппроксимировать во времени поток газа, соответствующий указанной модели. Зависимость (58) содержит подгоночный параметр τ_f , оптимальное значение которого нужно задавать в соответствии с формулой (62). Кроме того, для скорости выходящей из трубы газовой струи можно использовать аппроксимацию (64). В совокупности зависимости (58) и (64) вместе с относящимися к ним опре-

делениями составляют комбинированную модель работы системы массовой инъекции газов, которая также реализована в программе GASFLUX.

REFERENCES

1. **Lehnen M.** ITER disruption mitigation system. — In: Joint Meeting of US-Japan MHD Workshop and ITPA MHD Topical Group Meeting. Toki, Japan, 10—14th March 2014.
2. **Parks P.B., Wu W.** — Nucl. Fusion, 2011, vol. 51, 073014 (13 p.).
3. **Izzo V.A. et al.** NIMROD modeling of MGI in ITER. — In: Joint Meeting of US-Japan MHD Workshop and ITPA MHD Topical Group Meeting. Toki, Japan, 10—14th March 2014.
1. **Landau L.D., Lifshits E.M.** Hydrodynamics. Course of theoretical physics. Vol. 6. — M.: Nauka (Science), 1986 (in Russian).
2. **Bozhenkov S.A. et al.** — Nucl. Fusion, 2011, vol. 51, 083033 (10 p).
3. **Lehnen M. et al.** — Nucl. Fusion, 2011, vol. 51, 123010 (12 p).

AUTHORS

Zhogolev V.E. NRC “Kurchatov Institute”, pl. Kurchatova 1, 123182 Moscow, Russia; Zhogolev_VE@nrcki.ru

Received 20 March 2014
Problems of Atomic Science and Technology
Ser. Thermonuclear Fusion, 2014, vol. 37, issue 2, pp. 60—72.