УДК 533.9.08, 621.039.6

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ КОД RPB ДЛЯ РАСЧЁТА ГРАНИЦЫ ПЛАЗМЫ ПО МАГНИТНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ (МОДУЛЬ БИБЛИОТЕКИ «ВИРТУАЛЬНЫЙ ТОКАМАК»)

И.В. Зотов, А.Г. Белов

МГУ им. М.В. Ломоносова, факультет ВМК, Москва, Россия

Одной из актуальных задач физики токамаков с дивертором является диагностика границы плазмы по магнитным измерениям, так как позволяет контролировать развитие вертикальной неустойчивости. В статье приводится краткое описание стандартного кода RPB (Reconstruction of Plasma Boundary) для расчёта границы плазменного шнура в установках токамак по результатам внешних магнитных измерений. С его помощью решается обратная задача МГД-равновесия тороидальной плазмы, основанная на двумерном эллиптическом уравнении Грэда—Шафранова с дополнительными условиями типа Коши на контуре наблюдения. В качестве исходных данных используются измерения полоидального магнитного поля и функции потока, величины токов в полоидальной магнитной системе и наведённых токов в конструктивных элементах установки. Для численного решения поставленной задачи применяется регуляризованный метод интегральных уравнений. Описан интерфейс программы RPB. На примере прямой задачи равновесия плазмы для введённой недавно в строй установки КТМ показаны возможности программы в различных условиях эксперимента. Данный код является одним из модулей библиотеки «Виртуальный токамак».

Ключевые слова: токамак, библиотека стандартных программ, обратная задача МГД-равновесия, магнитная диагностика, граница плазмы.

THE NUMERICAL CODE RPB FOR DETERMINATION PLASMA BOUNDARY FROM MAGNETIC MEASUREMENTS (MODULE OF PROGRAM LIBRARY «VIRTUAL TOKAMAK»)

I.V. Zotov, A.G. Belov

Lomonosov Moscow State University, Computer Science faculty, Moscow, Russia

The diagnostics of plasma boundary using magnetic measurements is one of the urgent problems in physics of Tokamak with a divertor, as it allows you to control the development of vertical instability. The article provides with a brief description of the standard code of RPB (Reconstruction of Plasma Boundary) for the calculation of the boundary plasma in a Tokamak device using the results of the external magnetic measurements. This task is vital for the solution of the inverse problem of the MHD equilibrium of a toroidal plasma, based on the two-dimensional elliptic Grad—Shafranov equation, with additional conditions of the Cauchy type on a contour of observation. Measurements of the poloidal magnetic field and stream function, as well as the current values in the poloidal magnetic system and the induced currents in the structural elements of the installation were used as the initial data. The method of regularized integral equations is used for the numerical solution of the problem. Description of the RPB program interface is provided. Various features of the program in different experimental conditions are shown on the example of the direct problem of plasma equilibrium for the KTM device. This code is one of the modules of the «Virtual Tokamak» library.

Key words: tokamak, the library of standard codes, inverse MHD equilibrium problem, magnetic diagnostics, plasma boundary.

ВВЕДЕНИЕ

Модуль RPB (Reconstruction of Plasma Boundary) в рамках библиотеки «Виртуальный токамак» предназначен для решения задачи определения положения и формы границы плазмы на основе экспериментальных данных, получаемых системой электромагнитной диагностики (СЭМД) установки токамак. В качестве такой экспериментальной информации выступают измерения магнитных полей и потоков, а также величины токов в катушках полоидальной магнитной системы, величины полного тока в плазме и величины наведённых токов на конструктивных элементах установки. В результате работы модуля RPB находятся граница плазменного шнура и магнитное поле вплоть до этой границы. Эта информация может быть использована для анализа работы системы управления положением и формой плазмы, а также для физической диагностики.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одной из основных задач магнитной диагностики плазмы на установках токамак является определение крайней магнитной поверхности на основе экспериментально измеряемых внешних магнитных

полей. Такая задача формулируется как обратная задача магнитогидродинамического равновесия по нахождению неизвестной свободной граничной магнитной поверхности и описывается двумерным эллиптическим уравнением Грэда—Шаффранова [1] с дополнительными условиями типа Коши на границе

$$-\frac{1}{r}\Delta^*\psi = \gamma \begin{cases} j_\phi(r, \psi), & (r, z) \in \Omega_{\text{pl}}, \\ 0, & (r, z) \in \Omega_{\text{v}}, \\ \sum_{k=1}^m I_k^{\text{ext}} \delta(r - r_k, z - z_k), & (r, z) \in \Omega_{\text{ext}}; \end{cases}$$

$$\psi|_{r=0} = 0; \lim_{(r,z) \rightarrow \infty} \psi(r, z) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_L = F_1; \quad \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \Big|_L = F_2, \quad \psi|_L = F_3,$$

где $\Delta^*\psi \equiv r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$, $\gamma = 0,8\pi^2$ — размерный множитель, при котором расстояние измеряется в метрах, ток в МА, магнитный поток в В·с (веберах); (r, ϕ, z) — система цилиндрических координат с осью z , направленной вдоль главной оси тора; $\psi(r, z)$ — поток полоидального магнитного поля; $j_\phi(r, \psi)$ — плотность тороидального тока в плазме; I_k^{ext} — внешние управляющие токи в количестве m ; $\delta(r, z)$ — двумерная дельта-функция; Ω_{pl} — область плазмы, ограниченной контуром Γ_{pl} ; Ω_{v} — вакуумная область вне области плазмы; Ω_{ext} — область за пределами вакуумной камеры; F_1, F_2 — тангенциальный и нормальный компоненты магнитного поля; F_3 — функция потока на контуре наблюдения $L \in \Omega_{\text{v}}$. В качестве определяемой неизвестной границы Γ_{pl} выступает линия уровня функции $\psi(r, z)$, проходящая через заданную точку (r_0, z_0) области Ω_{v} . В качестве (r_0, z_0) принимается либо сепаратрисная точка (r_s, z_s) , где градиент $\nabla \psi(r_s, z_s) = 0$, либо точка касания (r_0, z_0) диафрагмы Γ_{d} , определяемая условием $\psi(r_0, z_0) = \max_{(r,z) \in \Gamma_{\text{d}}} \psi(r, z)$.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА

Общее магнитное поле $\psi(r, z)$ представляется в виде

$$\psi(r, z) = \psi_{\text{ext}}(r, z) + \psi_{\text{pl}}(r, z),$$

где поток $\psi_{\text{ext}}(r, z)$, задаваемый внешними управляющими токами I_k^{ext} , описывается формулой

$$\psi_{\text{ext}}(r, z) = \sum_{k=1}^m I_k^{\text{ext}} G(r, z, r_k, z_k),$$

$\psi_{\text{pl}}(r, z)$ — поток, создаваемый полем плазмы. При этом $G(r, z, r', z')$ есть функция Грина для оператора $\Delta^*\psi$ в неограниченной области.

После выделения из полного поля известной внешней части для определения собственного поля плазмы ставится следующая обратная задача:

$$\psi \begin{cases} \Delta^*\psi = 0, & (r, z) \in \Omega_{\text{v}}, \\ \frac{\partial \psi}{\partial n} \Big|_L = F_1^{\text{pl}}, \\ \psi(0, z) = 0, \quad \lim_{(r,z) \rightarrow \infty} \psi(r, z) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где F_1^{pl} — тангенциальный компонент магнитного поля плазмы на контуре наблюдения $L \in \Omega_{\text{v}}$. Задача (2) решается в кольцевой области Ω_{v} , где контур наблюдения L есть внешняя граница кольца, а искомая граница плазмы Γ_{pl} есть внутренняя граница кольца.

В общем случае, когда неизвестно внешнее поле, для полного равновесного поля $\psi = \psi_{\text{ext}} + \psi_{\text{pl}}$ ставится другая задача Коши вида

$$\begin{cases} \Delta^* \psi = 0, (r, z) \in \Omega_V, \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial n} \right|_L = F_1, \left. \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \right|_L = F_2, \psi|_L = F_3. \end{cases} \quad (3)$$

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для численного решения как задачи (2), так и задачи (3) применяется метод интегральных уравнений [2—4]. В случае задачи (2) решение $\psi_{\text{pl}}(r, z)$ ищется в виде потенциала простого слоя с носителем на контуре l , в качестве которого выбирается некоторый заданный контур внутри плазмы. Фактически это подразумевает замену распределённого двумерного тока внутри плазменного шнура поверхностным током на контуре-носителе l .

Решение задачи (2) (функцию потока плазмы) $\psi_{\text{pl}}(r, z)$ будем искать в виде

$$\psi_{\text{pl}}(M) = \oint_l v(P) G(M, P) dl_P. \quad (4)$$

Для определения плотности поверхностного тока $v(P)$ ($P \in l$) используем краевое условие и получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода

$$\oint_l v(P) \frac{\partial}{\partial n_M} G(M, P) dl_P = F_1^{\text{pl}}(M), M \in L. \quad (5)$$

Собственное поле плазмы после решения уравнения (5) находится во всех точках вне контура l по формуле (4). Граница плазмы Γ_{pl} находится в зависимости от условий удержания по полному равновесному полю $\psi = \psi_{\text{ext}} + \psi_{\text{pl}}$.

В общем случае, когда неизвестно внешнее поле, для обратной задачи (3) также применяется метод интегральных уравнений. Для этого задаются два контура-носителя: l_1 — внутри плазмы и l_2 — вне контура наблюдения L . Так как граница Γ_{pl} неизвестна, продолжаем $\psi(r, z)$ в расширенную область Ω_{1-2} (между контурами l_1 и l_2). Решение ищется в виде суммы двух потенциалов простого слоя с носителями на l_1 и l_2 :

$$\psi(M) = \sum_{j=1}^2 \oint_{l_j} v_j(P_j) G(M, P_j) dl_{P_j}. \quad (6)$$

Используя краевые условия из задачи (3) и равенство (6), для определения $v_j(P_j)$ получим систему интегральных уравнений Фредгольма первого рода

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^2 \oint_{l_j} v_j(P_j) \frac{\partial}{\partial n_M} G(M, P_j) dl_{P_j} = F_1(M), M \in L, \\ \sum_{j=1}^2 \oint_{l_j} v_j(P_j) \frac{\partial}{\partial \tau_M} G(M, P_j) dl_{P_j} = F_2(M), M \in L, \\ \sum_{j=1}^2 \oint_{l_j} v_j(P_j) G(M, P_j) dl_{P_j} = F_3(M), M \in L. \end{cases} \quad (7)$$

При решении уравнения (5) и системы (7) применяется метод регуляризации Тихонова [5] с выбором параметра регуляризации по обобщённому принципу невязки. Для этого минимизируется функционал невязки вида $\min$

$$J(v_1, v_2) = \sum_{i=1}^N p_i (B_{ti} - \tilde{B}_{ti})^2 + \sum_{i=1}^N q_i (B_{ni} - \tilde{B}_{ni})^2 + \sum_{i=1}^{N_p} r_i (\psi_i - \tilde{\psi}_i)^2 + \alpha (\|v_1\|_{W_2^1}^2 + \|v_2\|_{W_2^1}^2) \rightarrow \min_{v_1, v_2}, \quad (8)$$

где N, N_p — количество точек наблюдения поля и потока соответственно; p_i, q_i, r_i — веса, с которыми показания датчиков и петель входят в функционал (в частности, если датчики измеряют только каса-

тельный компонент поля и отсутствуют петли, то $p_i = 1$, $q_i = 0$, $r_i = 0$). Величины B_τ , B_n — компоненты полоидального магнитного поля, определяемые как

$$B_\tau = \frac{1}{2\pi r}(\nabla\psi, \boldsymbol{\tau}); \quad B_n = \frac{1}{2\pi r}(\nabla\psi, \mathbf{n}),$$

где $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{n}$ — касательный и нормальный векторы на контуре наблюдения; α — параметр регуляризации. В задаче (8) используется регуляризация первого порядка [5], т.е. для задания стабилизатора применяется норма в пространстве W_2^1 вида $\|v\|^2 = \int_0^\Lambda (|v|^2 + |v'|^2) dl$, где Λ — длина контура l . Таким образом, поверхностный ток в (5) и (7) ищется в классе ограниченных вместе с их первой производной функций.

ОПИСАНИЕ СТРУКТУРЫ МОДУЛЯ RPB

Вид интерфейса программы RPB с примером расчёта границы плазмы для установки KTM. Показан момент сценария $t = 259$ мс: 1 — точная граница $\psi = 0,10216$; 2 — восстановленная граница $\psi = 0,29821$

Модуль RPB представлен в виде исполняемого (exe) файла для ОС MS Windows. Он написан с использованием библиотек сред Matlab и Delfi. В RPB реализован диалоговый графический многооконный интерфейс с редактором данных, расчётом и визуализацией результатов. Внешний вид интерфейса кода показан на рисунке. В нём возможны просмотр и редактирование исходных данных в виде таблиц, визуализация выходных данных в графическом виде, а также сохранение и просмотр вычисляемых величин в текстовом виде. Графическое окно визуализации результатов вычислений обладает функциями интерактивного определения координат и значений функции потока в интересующих точках, масштабирования, пространственного перемещения и предварительного просмотра изображения, его печати и сохранения в различных форматах (BMP, JPG, TIF, EPS, PCX, PDF, PNG и др.).

Пользователь имеет возможность работать с исходными и выходными данными, сгруппированными в следующих разделах главного меню: «Tokamak geometry», «Loops», «Probes», «Numerical parameters», «Equilibrium», «Setting», «About», «Exit».

В разделе «Tokamak geometry» предусмотрены следующие пункты: «Camera» — число прямолинейных стенок камеры, их координаты, длина, толщина и угол наклона; «Diaphragm» — количество прямолинейных элементов диафрагмы, их координаты, длина, толщина и угол наклона; «Divertor» — число диверторных пластин, координаты их центра, левого и правого концов.

В «Loops»: «Geometry» — число и координаты петель; «Values» — величины измеряемых магнитных потоков в петлях.

В «Probes»: «Geometry» — число и координаты зондов; «Values» — величины измеряемых магнитных полей в зондах.

В «Numerical parameters»: «Values in» — размер сетки, положение контуров-носителей, выбор параметра регуляризации, относительная погрешность измерений; «Values out» — результаты вычислений.

В «Equilibrium»: «Parameters» — число внешних токов, геометрический центр, эллиптичность сечения, положение магнитной оси по z , количество точек по z в сепаратрисной области, значения потока в x -точке сепаратрисы, выбор лимитерного или диверторного режима работы установки; «Exact Poloidal Flux» — точное решение прямой задачи равновесия; «Reconstruction Poloidal Flux» — решение обратной задачи равновесия; «Run reconstruction» — запуск алгоритма реконструкции границы; «Graphics» — визуализация точной и восстановленной границ плазмы.

«Setting» — файловая настройка модуля (путь к директории, содержащей файлы с данными, имя файла реконструированного полоидального потока, имя файла с полными результатами вычислений, режим работы модуля с использованием решения прямой задачи равновесия или на основе экспериментальных данных).

В модуле предусмотрены подробные комментарии по всем используемым параметрам на английском языке. Программа может работать в режиме как нового модельного расчёта, так и визуализации архивных данных. Программа была применена для анализа работы системы СЭМД на установке КТМ [6, 7].

В качестве примера на рисунке показаны результаты работы модуля RPB для расчёта границы плазмы токамака КТМ временной точкой $t = 259$ мс выхода на стационарную стадию разряда. В качестве исходной информации использовались данные, полученные в режиме квазиреального моделирования. На рисунке изображены контур вакуумной камеры, диафрагма (---), диверторный стол (линии в нижней части камеры), положение датчиков ($\square$) и петель ($\bullet$). Исходные данные получены с помощью решения прямой задачи равновесия (код tokameq [8]). В этот момент формируется диверторная конфигурация с одной x -точкой сепаратрисы. Штрих-пунктирная линия соответствует точной границе, полученной из решения прямой задачи, а сплошная линия — решению обратной задачи. Использовалась информация только с магнитных датчиков (B_t , B_n). Относительная погрешность исходных данных задавалась на уровне 1% и моделировалась внесением равномерно распределённых случайных ошибок в эти данные.

ВЫВОДЫ

Разработанный стандартный код RPB предназначен для расчёта границы плазмы в токамаке на основе электромагнитных измерений. Программа обладает удобным графическим многооконным интерфейсом. Позволяет визуализировать результаты расчётов функции полоидального магнитного потока, находить в интерактивном режиме характерные точки, выделять и масштабировать отдельные фрагменты изображения. Программа может работать как в режиме лимитерной, так и в режиме диверторной плазмы. Более подробные инструкции по работе с программой RPB, её exe-файл находятся на интернет-сайте leader.ic.msu.su/~fusion. Возможны консультации с разработчиками программы с помощью e-mail.

Работа поддержана грантом РФФИ № 11-07-00567.

REFERENCES

1. **Dnestrovskiy Yu.N., Kostomarov D.P.** Mathematical simulation of plasma. — M.: Nauka (Science), 1982 (in Russian).
2. **Vabishchevich P.N., Zotov I.V.** Determination of the plasma column boundary according to the data of magnetic measurements. — Fizika plazmy (Plasma Physics), 1987, vol. 13, p. 649 (in Russian).
3. **Vabishchevich P.N., Zotov I.V.** Numerical investigation of the inverse problem of MHD equilibrium of toroidal plasma. — Computational Mathematics and Modelling, 1990, vol. 1, № 3, pp. 297—300 (www.springerlink.com).

4. **Belov A.G., Zotov I.V., Sychugov D.Yu.** Numerical method for reconstruction the toroidal plasma boundary. — In: Intern. Conf. on Applied Mathematics and Sustainable Development — Special Track within SCET2012 (World Congress on Engineering and Technology). Xi'an, China, May 27—30, 2012, pp. 278—280 (www.scirp.org).
5. **Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya.** Methods for solving the ill-conditioned problems. — M.: Nauka (Science), 1986 (in Russian).
6. **Belov A.G., Zotov I.V., Sychugov D.Yu., Shapovalov G.V., Sadykov A.D., Chektybaev B.Zh.** Analysis of magnetic diagnostic in the KTM tokamak. — In: 39 EPS/ICPP Conf. on Plasma Physics. Stockholm, Sweden, 2012, P5.053.
7. **Belov A.G., Zotov I.V., Sychugov D.Yu., Shapovalov G.V., Sadykov A.D., Chektybaev B.Zh.** Analysis of magnetic diagnostic system in the KTM tokamak. — VANT. Ser. Termoyadernyi sintez (Problems of Atomic Science and Technology. Ser. Thermonuclear Fusion), 2012, issue 4, pp. 87—91 (in Russian).
8. **Sychugov D.Yu.** The code TOKAMEQ for simulation MHD-equilibrium (module of program library «Virtual tokamak»). — VANT. Ser. Termoyadernyi sintez (Problems of Atomic Science and Technology. Ser. Thermonuclear Fusion), 2008, issue 4, pp. 85—89 (in Russian).

AUTHORS

Zotov I.V. M.V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, 1-52, Leninskie gory, 119991 Moscow, Russia; iv-zotov@cs.msu.ru

Belov A.G. M.V. Lomonosov Moscow State University, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, 1-52, Leninskie gory, 119991 Moscow, Russia; belov@cs.msu.ru

Received 2 October 2013

Problems of Atomic Science and Technology
Ser. Thermonuclear Fusion, 2014, vol. 37, issue 1, pp. 97—102.