DOI 10.21178/2079–6080.2021.4.42
УДК 502/504:630*53

Нелинейная модель смешанных эффектов зависимости высоты от диаметра деревьев в древостоях лиственницы

© Н.Н. Дубенок, В.В. Кузьмичев, А.В. Лебедев

The nonlinear mixed effects «height–diameter» model in larch stands

N.N. Dubenok, V.V. Kuzmichev, A.V. Lebedev (Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy)

The dependence of tree heights on diameter at breast height is important in forestry. Due to the laborious process of measuring tree heights, tree heights are often calculated using models. The aim of the study was to develop a nonlinear model of mixed effects of the dependence of the height on the diameter of trees in larch stands. The object of the study was larch cultures on permanent test plots in the Lesnaya Experimental Station of the Russian State Agrarian University – Moscow Timiryazev Agricultural Academy. Parameters were determined for 15 two-parameter and 14 three-parameter simple models “height–diameter”. For each obtained equation, quality metrics were calculated (root of the mean square error, average absolute percentage of error, determination coefficient, adjusted determination coefficient, Akaike information criterion and Bayesian information criterion), which allow judging the quality of the model. A comprehensive assessment of the quality metrics of two- and three-parameter simple models “height–diameter” revealed that the best generalizing ability is characterized by two-parameter models. Three-parameter models, showing good quality on the training set, are characterized by lower values of the quality metrics on the test set, data from which were not used in parameter estimation. As the best model, the logarithmic dependence of the heights of larch trees on the diameters at the height of the breast is substantiated. The mixed effects model is more accurate in predicting heights than the fixed effects model. The missing heights of a large number of trees on a site can be calculated more accurately using the blended effects model rather than using a fixed effects model or using only a fixed portion (mean response) of the mixed effects model.

Keywords: larch, height, diameter, tree, mixed effects model

Нелинейная модель смешанных эффектов зависимости высоты от диаметра деревьев в древостоях лиственницы

Н.Н. Дубенок, В.В. Кузьмичев, А.В. Лебедев

Зависимость высот деревьев от диаметра на высоте груди имеет важное значение в лесном хозяйстве. Из-за трудоемкого процесса измерения высоты деревьев часто рассчитываются с применением моделей. Целью исследования являлась разработка нелинейной модели смешанных эффектов зависимости высоты от диаметра деревьев в лиственничных древостоях. Объектом исследования послужили культуры лиственницы на постоянных пробных площадях в Лесной опытной даче Российского государственного аграрного университета — МСХА имени К.А. Тимирязева. Проводилось определение параметров для 15 двухпараметрических и 14 трехпараметрических простых моделей «высота—диаметр». Для каждого полученного уравнения рассчитывались метрики качества (корень из среднеквадратической ошибки, средний абсолютный процент ошибки, коэффициент детерминации, скорректированный коэффициент детерминации, информационный критерий Акаике и информационный критерий Байеса), позволяющие судить о качестве модели. Проведенная комплексная оценка метрик качества двух- и трехпараметрических простых моделей «высота—диаметр» выявила, что лучшей обобщающей способностью характеризуются двухпараметрические модели. Трехпараметрические модели, показывая хорошее качество на обучающей выборке, характеризуются более низкими значениями метрик качества на тестовой выборке, данные из которых не использовались при оценивании параметров. В качестве лучшей модели обоснована логарифмическая зависимость высот деревьев лиственницы от диаметров на высоте груди. Модель со смешанными эффектами более точно предсказывает значения высот по сравнению с моделью фиксированных эффектов. Недостающие значения высот большого количества деревьев на участке можно вычислить более точно с помощью модели смешанных эффектов, а не с применением модели фиксированных эффектов или с использованием только фиксированной части (среднего отклика) модели смешанных эффектов.

Ключевые слова: лиственница, высота, диаметр, дерево, модель смешанных эффектов

Дубенок Николай Николаевич — академик РАН, профессор, д-р с.-х. наук, заведующий кафедрой сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства

Кузьмичев Валерий Васильевич — д-р биол. наук, профессор, заведующий лабораторией кафедры сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства

Лебедев Александр Вячеславович — канд. с.-х. наук, старший преподаватель кафедры сельскохозяйственных мелиораций, лесоводства и землеустройства

E-mail: alebedev@rgau-msha.ru

ФГБОУ ВО «Российский государственный аграрный университет — МСХА имени К.А. Тимирязева»

127550, г. Москва, ул. Тимирязевская, д. 49

Введение

Зависимость высот деревьев от диаметра на высоте груди имеет важное значение в лесном хозяйстве. Высота и диаметр являются основными показателями, которые применяются при определении объемов стволов, биомассы и др. Измерение высоты дерева по сравнению с измерением его диаметра представляет собой более трудоемкую задачу [4, 5, 21]. Поэтому, как правило, на лесном участке измеряются высоты только некоторого количества деревьев. Недостающие значения высот могут быть рассчитаны с использованием специальных моделей, среди которых выделяются простые и обобщенные [5, 20, 22]. От того, насколько достоверно модель соответствует реальному объекту, зависит точность определения запаса древостоя.

В России в настоящее время при ведении лесохозяйственной деятельности продолжают применяться таблицы разрядов высот, которые условно отражают связь между высотой и диаметром деревьев. При разработке моделей «высота—диаметр» в последние десятилетия наиболее распространенным методом является использование нелинейных смешанных эффектов [6, 22, 10, 26]. Применение данного метода позволяет получать более точные прогнозы, даже когда доступны данные измерений только нескольких деревьев [12]. Целью проведенного нами исследования являлась разработка нелинейной модели смешанных эффектов зависимости высоты от диаметра деревьев в лиственных древостоях.

Объекты и методы исследований

Объектом исследования послужили культуры лиственницы сибирской и европейской на постоянных пробных площадях в Лесной опытной даче Российского государственного аграрного университета — МСХА имени К.А. Тимирязева. Площадь территории Лесной опытной дачи составляет 248,6 га. Первые культуры лиственницы начали создаваться в последней четверти XIX века. На протяжении более 150 лет лесохозяйственной практики наблюдалось увеличение занятой лиственницей площади и запаса древесины: в 1915 году — 4,0 га (585 м³), в 1962 году — 24,3 га (5435 м³) и в 2009 году — 34,8 га (11891 м³) [2, 3].

В исследовании используются данные обмеров деревьев на 6 постоянных пробных площадях с 1957 по 2014 год. Возраст древостоев на момент проведения измерений — от 20 до 120 лет. По итогам выполнения 26 перечетов массив данных составил 408 наблюдений. Измерение диаметра проводилось мерной вилкой у растущих деревьев на высоте груди от шейки корня. Высоты определялись при помощи механического высотомера. Для анализа отобранные данные были случайным образом разделены в соотношении 7:3 на обучающую выборку, которая использовалась для подгонки модели, и тестовую, на которой выполнялась проверка обобщающей способности. Описательная статистика экспериментальных данных приведена в таблице 1.

Таблица 1

Описательная статистика экспериментальных данных

Показатель	Обучающая выборка				Тестовая выборка			
	Mean	Min	Max	SD	Mean	Min	Max	SD
DBH	32,5	8,4	73,3	12,8	33,3	8,7	64,8	13,1
h	28,2	13,0	43,0	7,2	28,4	13,9	41,3	7,3
Dq	32,7	13,7	48,0	8,7	33,0	13,7	48,0	8,5
H	27,6	15,0	37,6	6,5	27,8	15,0	37,6	6,4

Примечание. *Mean* — средняя арифметическая; *Min* — минимальное значение; *Max* — максимальное значение; *SD* — среднеквадратическое отклонение; *DBH* — диаметр на высоте груди, см; *h* — высота, м; *Dq* — среднеквадратический диаметр древостоя, см; *H* — средняя высота древостоя, м.

Методика анализа данных предполагала на первом этапе построение парных визуализаций зависимости высоты от диаметра и проверку выборок на наличие выбросов. В дальнейшем проводилось определение параме-

тров для 15 двухпараметрических (M1–M15) и 14 трехпараметрических простых моделей (M16–M29), наиболее часто встречающихся в литературных источниках, общий вид которых приведен в таблице 2.

Таблица 2

Используемые уравнения связи высот с диаметрами

ID	Уравнение	Источник
Двухпараметрические модели		
M1	$h = 1.3 + b_1 DBH^{b_2}$	J. Huxley и G. Teissier [16]
M2	$h = 1.3 + \left(\frac{DBH}{b_1 + b_2 DBH} \right)^2$	M. Näslund [24]
M3	$h = 1.3 + \frac{b_1 DBH}{b_2 + DBH}$	S. Huang с соавт. [17]
M4	$h = 1.3 + b_1 \left(\frac{DBH}{1 + DBH} \right)^{b_2}$	S. Huang с соавт. [17]
M5	$h = 1.3 + b_1 \left(1 + \frac{1}{DBH} \right)^{b_2}$	R.O. Curtis [13]
M6	$h = 1.3 + \frac{b_1 DBH}{(1 + DBH)^{b_2}}$	R.O. Curtis [13]
M7	$h = 1.3 + b_1 (1 - \exp(-b_2 DBH))$	H.A. Meyer [23]
M8	$h = 1.3 + \exp \left(b_1 + \frac{b_2}{DBH + 1} \right)$	W.R. Wykoff с соавт. [35]
M9	$h = 1.3 + \frac{b_1 DBH}{(DBH + 1) + b_2 DBH}$	D.M. Bates и D.G. Watts [9]
M10	$h = 1.3 + b_1 DBH \exp(-b_2 DBH)$	S. Huang с соавт. [17]
M11	$h = 1.3 + \exp \left(b_1 + \frac{b_2}{DBH} \right)$	C. Staudhammer и V. LeMay [34]
M12	$h = 1.3 + b_1 \exp \left(\frac{b_2}{DBH} \right)$	M.A. Buford [11]
M13	$h = 1.3 + b_1 (\ln(1 + DBH))^{b_2}$	H.O. El Momoun с соавт. [14]
M14	$h = 1.3 + \left(b_1 + \frac{b_2}{DBH} \right)^{-5}$	H.O. El Momoun с соавт. [14]

ID	Уравнение	Источник
M15	$h = 1.3 + \left(\left(\frac{b_1}{DBH} \right)^{b_2} \right)^{-1}$	F.N. Ogana [26]
Трехпараметрические модели		
M16	$h = 1.3 + \frac{b_1}{1 + b_2 DBH^{-b_3}}$	S. Huang с соавт. [17]
M17	$h = 1.3 + \frac{DBH^2}{b_1 + b_2 DBH + b_3 DBH^2}$	S. Huang с соавт. [18]
M18	$h = 1.3 + \frac{b_1}{1 + b_2 \exp(-b_3 DBH)}$	S. Huang с соавт. [18]
M19	$h = 1.3 + b_1 (1 - \exp(-b_2 DBH^{b_3}))$	R.C. Yang с соавт. [36]
M20	$h = 1.3 + b_1 (1 - \exp(-b_2 DBH))^{b_3}$	C. Peng с соавт. [27]
M21	$h = 1.3 + b_1 \exp(-b_2 \exp(-b_3 DBH))$	S. Huang с соавт. [18]
M22	$h = 1.3 + \exp(b_1 + b_2 DBH^{b_3})$	D.R. Larsen и D.W. Hann [19]
M23	$h = 1.3 + \exp\left(b_1 + \frac{b_2}{DBH + b_3}\right)$	D.A. Ratkowsky [29]
M24	$h = 1.3 + b_1 \exp(-b_2 DBH^{-b_3})$	A.R. Stage [33]
M25	$h = \left(1.3^{b_1} + (b_2^{b_1} - 1.3^{b_1}) \frac{1 - \exp(-b_3 DBH)}{1 - \exp(-100 b_3)} \right)^{\frac{1}{b_1}}$	J. Schnute [30]
M26	$h = 1.3 + b_1 \sqrt{DBH} + b_2 DBH + b_3 DBH^2$	О.А. Атрощенко [1]
M27	$h = 1.3 + \frac{b_1}{1 + (b_2 DBH^{b_3})^{-1}}$	W. Peschel [28]
M28	$h = 1.3 + b_1 DBH^{b_2 DBH^{-b_3}}$	E. Sibbesen [32]
M29	$h = 1.3 + DBH \frac{b_1}{b_2 + b_3 DBH^{b_1}}$	Н.О. El Momoun с соавт. [14]

Примечание. h – высота дерева, м; DBH – диаметр дерева на высоте груди, см, b – параметры модели.

Сравнение оценок для каждой из моделей основывалось на численном и графическом анализе остатков. Для каждого полученного уравнения рассчитывались метрики качества (корень из среднеквадратической ошибки, средний абсо-

лютный процент ошибки, коэффициент детерминации, скорректированный коэффициент детерминации, информационный критерий Акаике и информационный критерий Байеса), позволяющие судить о качестве модели (табл. 3).

Таблица 3

Метрики качества моделей

ID	Название	Формула
1	Корень из среднеквадратической ошибки (RMSE)	$RMSE = \sqrt{\sum \frac{(y_i - \hat{y}_i)^2}{n}}$
2	Средний абсолютный процент ошибки (MAPE)	$MAPE = 100 \times \sum \left \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right / n$
3	Коэффициент детерминации (R^2)	$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}$
4	Скорректированный коэффициент детерминации ($R^2_{adj.}$)	$R^2_{adj.} = 1 - (1 - R^2) \frac{(n - 1)}{(n - k)}$
5	Информационный критерий Акаике (AIC)	$AIC = 2k + n \ln \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}$
6	Информационный критерий Байеса (BIC)	$BIC = k \ln n + n \ln \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n}$

Примечание. k – количество параметров модели, n – количество наблюдений, y_i – фактическое значение, $\hat{y}_i$ – предсказанное по модели значение.

Модель, для которой получены наибольшие значения коэффициентов детерминации и наименьшие значения информационных критериев, среднеквадратической ошибки и среднего процента абсолютной ошибки признавалась лучшей. Для моделей проводился графический анализ полученных кривых, так как их формы могут значительно отличаться даже если статистика о качестве моделей аналогична [25].

На заключительном этапе для уравнения, обоснованно принятого в качестве лучшего, производилось оценивание с использованием регрессионной модели смешанных эффектов для устранения случайного влияния отдельных групп наблюдений на фиксированные параметры. Регрессионные модели смешанных эффектов находят широкое применение при изучении связи между высотами и диаметрами деревьев [6]. Анализ данных проводился с использованием Python 3.5 + NumPy 1.17.1 + SciPy 1.3.2 и R 3.6.3 + lme4 1.1.

Результаты исследований

Итоговая сводка по пяти лучшим двухпараметрическим и трехпараметрическим моделям приведена в таблице 4.

На обучающей выборке лучшее качество по комплексу метрик показывает трехпараметрическая модель M19 ($RMSE = 3,929$; $MAPE = 11,319$; $R^2 = 0,708$; $R^2_{adj.} = 0,704$; $AIC = 786,0$; $BIC = 797,0$). Но при оценке обобщающей способности на тестовой выборке лучше оказались двухпараметрические модели. По комплексу метрик качества на обучающей и тестовой выборках лучшей признана двухпараметрическая модель M13: на обучающей ($RMSE = 3,934$; $MAPE = 11,345$; $R^2 = 0,707$; $R^2_{adj.} = 0,705$; $AIC = 784,7$; $BIC = 792,0$) и на тестовой ($RMSE = 3,939$; $MAPE = 11,304$; $R^2 = 0,677$; $R^2_{adj.} = 0,671$; $AIC = 341,2$; $BIC = 346,8$) выборках.

Оценки параметров для пяти лучших двухпараметрических и трехпараметрических моделей представлены в таблице 5.

Таблица 4

Итоговая сводка по пяти лучшим двухпараметрическим и трехпараметрическим моделям

Id	Обучающая выборка						Тестовая выборка					
	RMSE	MAPE	R ²	R ² -adj.	AIC	BIC	RMSE	MAPE	R ²	R ² -adj.	AIC	BIC
Двухпараметрические модели												
M1	3,953	11,514	0,704	0,702	787,5	794,8	3,996	11,236	0,667	0,662	344,8	350,4
M3	3,940	11,496	0,706	0,704	785,6	792,9	3,907	11,322	0,682	0,677	339,2	344,9
M6	3,949	11,478	0,705	0,703	786,9	794,2	3,988	11,244	0,669	0,663	344,3	349,9
M7	3,961	11,693	0,703	0,701	788,7	796,0	3,891	11,372	0,684	0,679	338,2	343,9
M13	3,934	11,345	0,707	0,705	784,7	792,0	3,939	11,304	0,677	0,671	341,2	346,8
Трехпараметрические модели												
M16	3,929	11,347	0,708	0,705	785,9	796,9	3,924	11,202	0,679	0,671	342,3	350,7
M18	3,930	11,318	0,707	0,704	786,1	797,1	3,925	11,247	0,679	0,671	342,3	350,8
M19	3,929	11,319	0,708	0,704	786,0	797,0	3,922	11,234	0,679	0,671	342,2	350,7
M20	3,926	11,374	0,708	0,705	785,6	796,6	3,900	11,076	0,683	0,675	340,8	349,2
M25	3,925	11,318	0,708	0,705	785,4	796,3	3,909	11,165	0,682	0,673	341,4	349,8

Таблица 5

Оценки параметров пяти лучших двухпараметрических и трехпараметрических моделей

Id	Параметр	Оценка	t-статистика	p-value
Двухпараметрические модели				
M1	b_1	4,149e+00	1,214e+01	<2e-16
	b_2	5,392e-01	2,359e+01	<2e-16
M3	b_1	5,837e+01	1,999e+01	<2e-16
	b_2	3,613e+01	1,015e+01	<2e-16
M6	b_1	4,470e+00	1,161e+01	<2e-16
	b_2	4,777e-01	2,014e+01	<2e-16
M7	b_1	4,098e+01	2,843e+01	<2e-16
	b_2	3,496e-02	1,434e+01	<2e-16
M13	b_1	2,514e+00	9,512e+00	<2e-16
	b_2	1,902e+00	2,323e+01	<2e-16
Трехпараметрические модели				
M17	b_1	7,888e+01	2,565e+00	1,085e-02
	b_2	3,211e+01	7,541e+00	6,408e-13
	b_3	8,161e-01	5,012e+00	9,530e-07

Id	Параметр	Оценка	<i>t</i> -статистика	<i>p</i> -value
M18	b_1	3,909e+01	2,418e+01	<2e-16
	b_2	3,186e+00	1,117e+01	<2e-16
	b_3	6,210e-02	9,494e+00	<2e-16
M19	b_1	5,459e+01	3,787e+00	1,866e-04
	b_2	4,717e-02	8,608e+00	6,661e-16
	b_3	7,744e-01	6,745e+00	8,679e-11
M20	b_1	5,059e+01	5,414e+00	1,317e-07
	b_2	1,718e-02	1,895e+00	5,905e-02
	b_3	7,197e-01	6,285e+00	1,243e-09
M23	b_1	1,469e+00	5,749e+00	2,330e-08
	b_2	4,531e+01	1,546e+01	<2e-16
	b_3	1,618e-02	1,716e+00	8,729e-02

Для всех рассмотренных двухпараметрических моделей оцененные параметры являются статистически значимыми при p -значении <0,05. Среди трехпараметрических моделей статистически незначимые оценки параметров выявлены для моделей M20 (для

параметра b_2 получено p -значение 0,059) и M23 (для параметра b_3 получено p -значение 0,087).

Графическая визуализация для модели M13, обоснованно принятой в качестве лучшей, представлена на рисунке 1.

Рис. 1. Зависимость высот от диаметров (синие точки — обучающая выборка, красные точки — тестовая выборка, черная линия — модель)

Кривая зависимости высот от диаметров исходит из точки 1,3 м, имеет горизонтальную асимптоту, поэтому удовлетворяет требованиям, предъявляемым к таким функци-

ям [7, 8]. При сопоставлении фактических и предсказанных высот основная часть точек сконцентрирована вдоль диагональной линии (рис. 2).

Рис. 2. Фактическая и предсказанная высота для обучающей (синий цвет) и тестовой (красный цвет) выборки

Результаты многих исследований [6, 15, 31] показывают, что лучшей прогностической способностью характеризуются модели смешанных эффектов, благодаря чему они нашли широкое применение. Модель смешанных эффектов (M13M) после включения в качестве случайного эффекта отдельных перечетов на пробных площадях приняла следующий вид:

$$h = 1.3 + (b_1 + \beta_{1i})(\ln(1 + DBH))^{(b_2 + \beta_{2i})} + \varepsilon_{ij},$$

где h_{ij} — высота для дерева j из выборки i , м;

b — параметры модели;

β_i — вектор случайных эффектов для отдельного перечета из выборки i , имеющий нормальное распределение с нулевым средним и стандартным отклонением σ_{β_i} ;

DBH_{ij} — диаметр на высоте груди для дерева j из выборки i , см;

ε_{ij} — вектор остатков, имеющий нормальное распределение с нулевым средним и стандартным отклонением σ .

Для расширенной модели все оценки параметров и компоненты дисперсии имеют

высокую значимость (p -значение $< 2e-16$) (табл. 6).

И модель фиксированных эффектов, и модель смешанных эффектов адекватно описали зависимость между высотами и диаметрами деревьев в лиственных древостоях. Но, как и ожидалось, первая модель имеет худшие значения метрик качества по сравнению со второй. Включение случайных эффектов на уровне графика высот для отдельного перечета позволило снизить RMSE на 49 %, MAPE на 53 %, AIC на 18 % и BIC на 17 %.

Графическая визуализация зависимости высот от диаметров по модели M13M представлена на рисунке 3.

Модель со смешанными эффектами позволяет получить индивидуальный график высот для каждого перечета. При этом каждая кривая зависимости «высота—диаметр» характеризуется специфичной формой. Модель смешанных эффектов позволяет достаточно точно предсказывать недостающие измерения высот, но при этом стоит учитывать возможные ошибки. Это связано с наличием экстремальных выбросов (рис. 4), которые могут появляться из-за неоднородности древостоев, в том числе обусловленной действием небла-

гоприятных факторов окружающей среды. При отборе деревьев на участке для калибровки коэффициентов модели необходимо учитывать, чтобы они были типичными. Иначе случайные компоненты для отдельного гра-

фика высот могут быть оценены неверно. В работе К. Broniszk и L. Mehtalo [10] показано, что на точность нелинейных моделей смешанных эффектов влияет количество деревьев и стратегия отбора.

Таблица 6

Итоговые оценки для модели фиксированных (M13) и смешанных эффектов (M13M)

Id	Параметр	Оценка	t-статистика	p-value	Критерии качества модели			
					RMSE	MAPE	AIC	BIC
M13	b_1	2,558e+00	1,138e+01	<2e-16	3,928	11,436	2280,2	2292,2
	b_2	1,896e+00	2,766e+01	<2e-16				
Фиксированные компоненты					2,012	5,455	1871,3	1895,3
M13M	b_1	5,567e+00	1,574e+01	<2e-16				
	b_2	1,251e+00	2,826e+01	<2e-16				
	Случайные компоненты							
	$\sigma\beta_{1i}$	8,775e-01	-	-				
	$\sigma\beta_{2i}$	2,118e-05	-	-				
	$corr(\beta_{1i}, \beta_{2i})$	-4,000e-03	-	-				
	σ	2,078e+00	-	-

Рис. 3. Зависимость высот от диаметров (синие точки — фактические данные, красные точки — предсказанные значения по модели смешанных эффектов, черные точки — предсказанные значения по модели фиксированных эффектов)

Рис. 4. Фактическая и предсказанная высота для модели фиксированных эффектов (синий цвет) и смешанных эффектов (красный цвет)

Заключение

Проведенная комплексная оценка метрик качества двух- и трехпараметрических простых моделей «высота—диаметр» выявила, что лучшей обобщающей способностью характеризуются двухпараметрические модели. Трехпараметрические модели, показывая хорошее качество на обучающей выборке, характеризуются более низкими значениями метрик качества на тестовой выборке, данные из которых не использовались при оценивании параметров. В качестве лучшей модели обоснованно признана логарифмическая зависимость высот деревьев лиственницы от диаметров на высоте груди. Модель со сме-

шанными эффектами более точно предсказывает значения высот по сравнению с моделью фиксированных эффектов. Недостающие значения высот большого количества деревьев на участке можно вычислить более точно с помощью модели смешанных эффектов, без применения модели фиксированных эффектов или использования только фиксированной части (средний отклик) модели смешанных эффектов. Методика данного исследования позволяет повторить аналогичную работу для древесных пород и лесорастительных условий, для которых информация о характере связи высоты с диаметром на высоте груди является неполной или отсутствует.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Атрощенко, О.А. Моделирование роста леса и лесохозяйственных процессов / О.А. Атрощенко. – Минск: БГТУ, 2004. – 249 с.
2. Дубенок, Н.Н. Результаты экспериментальных работ за 150 лет в Лесной опытной даче Тимирязевской академии / Н.Н. Дубенок, В.В. Кузьмичев, А.В. Лебедев / РГАУ-МСХА им. К.А. Тимирязева. – М.: Наука, 2020. – 382 с.
3. Кузьмичев, В.В. Изменение породного состава насаждений лесной опытной дачи РГАУ-МСХА имени К.А. Тимирязева за 150 лет / В.В. Кузьмичев, А.В. Лебедев // Мониторинг состояния природных комплексов и многолетние исследования на особо охраняемых природных территориях. – 2018. – № 2. – С. 88–92.

4. Лебедев, А.В. Верификация трехпараметрических моделей зависимости высоты от диаметра на высоте груди для березовых древостоев Европейской части России / А.В. Лебедев, В.В. Кузьмичев // Сибирский лесной журнал. – 2020. – № 5. – С. 45–54. DOI 10.15372/SJFS20200505.
5. Лебедев, А.В. Проверка двухпараметрических моделей зависимости высоты от диаметра на высоте груди в березовых древостоях / А.В. Лебедев, В.В. Кузьмичев // Известия Санкт-Петербургской лесотехнической академии. – 2020. – вып. 230. – С. 100–113. DOI 10.21266/2079-4304.2020.230.100-113.
6. Лебедев, А.В. Регрессионные модели смешанных эффектов в лесохозяйственных исследованиях / А.В. Лебедев, В.В. Кузьмичев // Сибирский лесной журнал. – 2021. – № 1. – С. 13–20. DOI 10.15372/SJFS20210102
7. Подмаско, Б.И. Инвентаризация лиственничных лесов севера Дальнего Востока СССР методом камерального дешифрирования аэроснимков: автореф. дис. ... канд. с.-х. наук / Б.И. Подмаско. – М., 1973. – 24 с.
8. Хлюстов, В.К. Товарно-денежный потенциал древостоев и оптимизация лесопользования / В.К. Хлюстов, А.В. Лебедев. – Иркутск: Мегатринт, 2017. – 328 с.
9. Bates, D.M. Relative curvature measures of nonlinearity / D.M. Bates, D.G. Watts // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). – 1980. – № 42 (1). – P. 1–25.
10. Broniszk, K. Mixed-effects generalized height-diameter model for young sliver birch stands on post-agricultural lands / K. Broniszk, L. Mehtätalo // For. Ecol. Manag. – 2020. – № 460. – Id 117901. DOI: 10.1016/j.foreco.2020.117901
11. Buford, M.A. Height-diameter relationship at age 15 in loblolly pine seed sources / M.A. Buford // Forest Science. – 1986. – № 32 (3). – P. 812–818.
12. Burkhart, H.E. Modeling Forest Trees and Stands / H.E. Burkhart, M. Tomé. – Springer, 2012. – 456 p. DOI: 10.1007/978-90-481-3170-9
13. Curtis, R.O. Height-diameter and height–diameter–age equations for second growth Douglas-fir / R.O. Curtis // Forest Science. – 1967. – № 13. – P. 365–375.
14. El Mamoun, H.O. Modelling Height-Diameter Relationships of Selected Economically Important Natural Forests Species / H.O. El Mamoun, A.I. El Zein, M.I. El Mugira // Journal of Forest Products & Industries. 2013. – № 2 (1). – P. 34–42.
15. Ferraz Filho, A.C. Height-diameter models for *Eucalyptus* sp. plantations in Brazil / A.C. Ferraz Filho, B. Mola-Yudego, A. Ribeiro, J.R.S. Scolforo, R.A. Loos, H.F. Scolforo // Cerne. – 2018. – Vol. 24, № 1. – P. 9–17. DOI: 10.1590/01047760201824012466
16. Huxley, J. Terminology of relative growth rates / J. Huxley, G. Teissier // Nature. – 1936. – № 137. – P. 780–781.
17. Huang, S. Development of ecoregion-based height-diameter models for white spruce in boreal forests / S. Huang, D. Price, S.J. Titus // Forest Ecology and Management. – 2000. – № 129 (1). – P. 125–141.
18. Huang, S. Comparison of nonlinear height–diameter functions for major Alberta tree species / S. Huang, S.J. Titus, D.P. Wiens // Canadian Journal of Forest Research. – 1992. – № 22 (9). – P. 1297–1304.
19. Larsen, D.R. Height–diameter Equations for Seventeen Tree Species in Southwest Oregon. Corvallis / D.R. Larsen, D.W. Hann // Forest Research Laboratory, Oregon State University, Corvallis. – 1987. – Research Paper 49. – 16 p.
20. Lebedev, A.V. New generalized height-diameter models for the birch stands in European Russia / A.V. Lebedev // Baltic Forestry. – 2020. – Vol. 26. – No 2. – P. 1–7. DOI 10.46490/BF499.
21. Lebedev, A. Verification of two- and three-parameter simple height-diameter models for birch in the European part of Russia / A. Lebedev, V. Kuzmichev // Journal of Forest Science. – 2020. – Vol. 66. – No 9. – P. 375–382. DOI 10.17221/76/2020-JFS

22. Mehtätalo, L. Modeling height-diameter curves for prediction / L. Mehtätalo, S. de-Miguel, T.G. Gregoire // Canadian Journal of Forest Research. – 2015. – № 45. – P. 826–837.
23. Meyer, H.A. A mathematical expression for height curves / H.A. Meyer // Journal of Forestry. – 1940. – № 38. – P. 415–420.
24. Näslund, M. Antalet provträd och höjdkurvans noggrannhet / M. Näslund, // Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut. – 1929. – № 25. – S. 93–170.
25. Neter, J. Applied Linear Statistical Models / J. Neter, M.H. Kutner, C.J. Nachtsheim, W. Wasserman. – Chicago: Irwin, 1996. – 1408 p.
26. Ogana, F.N. Comparison of a modified log-logistic distribution with established models for tree height prediction / F.N. Ogana // Journal of Research in Forestry, Wildlife & Environment. – 2018. – № 10 (2). – P. 49–55.
27. Peng, C. Developing and validating nonlinear height–diameter models for major tree species of Ontario’s boreal forests / C. Peng, L. Zhang, J. Liu // Northern Journal of Applied Forestry. – 2001. – № 18 (3). – P. 87–94.
28. Peschel, W. Mathematical methods for growth studies of trees and forest stands and the results of their application / W. Peschel // Tharandter Forstl. Jahrb. – 1938. – № 89. – P. 169–247.
29. Ratkowsky, D.A. Handbook of nonlinear regression / D.A. Ratkowsky. – New-York: Marcel and Dekker, 1990. – 241 p.
30. Schnute, J. A versatile growth model with statistically stable parameters / J. Schnute // Canadian Journal of Forest Research. – 1981. – № 38. – P. 1128–1140.
31. Sharma, R.P. Nonlinear mixed effect height–diameter model for mixed species forests in the central part of the Czech Republic / R.P. Sharma, Z. Vacek, S. Vacek // Journal of Forest Science. – 2016. – № 62 (10). – P. 470–484. DOI: 10.17221/41/2016-JFS
32. Sibbesen, E. Some new equations to describe phosphate sorption by soils / E. Sibbesen // J. Soil Sci. – 1981. – № 32 (1). – P. 67–74.
33. Stage, A.R. A mathematical approach to polymorphic site index curves for grand fir / A.R. Stage // Forest Science. – 1963. – № 9. – P. 167–180.
34. Staudhammer, C. Height prediction equations using diameter and stand density measures / C. Staudhammer, V. LeMay // The Forestry Chronicle. – 2000. – № 76 (2). – P. 303–309.
35. Wykoff, W.R. User’s Guide to the Stand Prognosis Model / W.R. Wykoff, N.L. Crookston, A.R. Stage // General Technical Report INT-133. Ogden: USDA Forest Service, Intermountain Forest and Range Experiment Station, 1982. – 231 p.
36. Yang, R.C. The potential of Weibull-type functions as flexible growth curves / R.C. Yang, A. Kozak, J.H.G. Smith // Canadian Journal of Forest Research. – 1978. – № 8 (4). – P. 424–431.

REFERENCES

1. Atroshhenko O.A. Modelirovanie rosta lesa i lesokhozyajstvennykh protsessov. Minsk, 249 p. (In Russian)
2. Dubenok N.N., Kuz’michev V.V., Lebedev A.V. Rezul’taty ehksperimental’nykh rabot za 150 let v Lesnoj opytnoj dache Timiryazevskoj akademii. Moscow, 2020, 382 p. (In Russian)
3. Kuz’michev V.V., Lebedev A.V. Izmenenie porodnogo sostava nasazhdenij lesnoj opytnoj dachi RGAU-MSKHA imeni K.A. Timiryazeva za 150 let. *Monitoring sostoyaniya prirodnikh kompleksov i mnogoletnie issledovaniya na osobo okhranyaemykh prirodnikh territoriyakh*, 2018, no. 2, pp. 88–92. (In Russian)

4. Lebedev A.V., Kuz'michev V.V. Verifikatsiya trekhparametricheskikh modelej zavisimosti vysoty ot diametra na vysote grudi dlya berezovykh drevostoev Evropejskoj chasti Rossii. *Sibirskij lesnoj zhurnal*, 2020, no. 5, pp. 45–54. DOI 10.15372/SJFS20200505. (In Russian)
5. Lebedev A.V., Kuz'michev V.V. Proverka dvukhparametricheskikh modelej zavisimosti vysoty ot diametra na vysote grudi v berezovykh drevostoyakh. *Izvestiya Sankt Peterburgskoj lesotekhnicheskoy akademii*, 2020, no. 230, pp. 100–113. DOI 10.21266/2079-4304.2020.230.100-113. (In Russian)
6. Lebedev A.V., Kuz'michev V.V. Regressionnyye modeli smeshannykh ehffektov v lesokhozyajstvennykh issledovaniyakh. *Sibirskij lesnoj zhurnal*, 2021, no. 1. pp. 13–20. DOI 10.15372/SJFS20210102. (In Russian)
7. Podmasko B.I. Inventarizatsiya listvennichnykh lesov severa Dal'nego Vostoka SSSR metodom kameral'nogo deshifirovaniya aehrosnimkov: Avtoref. dis. ... kand. s.-kh. nauk. Moscow, 1973, 24 p. (In Russian)
8. Khlyustov V.K., Lebedev A.V. Tovarno-denezhnyj potentsial drevostoev i optimizatsiya lesopol'zovaniya. Irkutsk, 2017, 328 p. (In Russian)
9. Bates D.M., Watts D.G. Relative curvature measures of nonlinearity. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 1980, no. 42 (1), pp. 1–25. (In Russian)
10. Bronisz K., Mehtätalo L. Mixed-effects generalized height-diameter model for young sliver birch stands on post-agricultural lands. *For. Ecol. Manag.*, 2020, no. 460, Id 117901. DOI: 10.1016/j.foreco.2020.117901
11. Buford M.A. Height-diameter relationship at age 15 in loblolly pine seed sources. *Forest Science*, 1986, no. 32 (3), pp. 812–818.
12. Burkhart H.E., Tomé M. Modeling Forest Trees and Stands. *Springer*, 2012, 456 p. DOI: 10.1007/978-90-481-3170-9
13. Curtis R.O. Height-diameter and height–diameter–age equations for second growth Douglas-fir. *Forest Science*, 1967, no. 13, pp. 365–375.
14. El Mamoun H.O., El Zein A.I., El Mugira M.I. Modelling Height–Diameter Relationships of Selected Economically Important Natural Forests Species. *Journal of Forest Products & Industries*, 2013, no. 2(1), pp. 34–42.
15. Ferraz Filho A.C., Mola-Yudego B., Ribeiro A., Scolforo J.R.S., Loos R.A., Scolforo H.F. Height-diameter models for *Eucalyptus* sp. plantations in Brazil. *Cerne*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 9–17. DOI: 10.1590/01047760201824012466
16. Huxley J., Teissier G. Terminology of relative growth rates. *Nature*, 1936, no. 137, pp. 780–781.
17. Huang S., Price D., Titus S.J. Development of ecoregion-based height–diameter models for white spruce in boreal forests. *Forest Ecology and Management*, 2000, no. 129 (1), pp. 125–141.
18. Huang S., Titus S.J., Wiens D.P. Comparison of nonlinear height–diameter functions for major Alberta tree species. *Canadian Journal of Forest Research*, 1992, no. 22 (9), pp. 1297–1304.
19. Larsen D.R., Hann D.W. Height–diameter Equations for Seventeen Tree Species in Southwest Oregon. Forest Research Laboratory, Oregon State University, Corvallis, 1987. Research Paper 49. – 16 p.
20. Lebedev A.V. New generalised height–diameter models for the birch stands in European Russia. *Baltic Forestry*, 2020, vol. 26, no. 2, pp. 1–7. DOI 10.46490/BF499
21. Lebedev A., Kuzmichev V. Verification of two- and three-parameter simple height–diameter models for birch in the European part of Russia. *Journal of Forest Science*, 2020, vol. 66, no. 9, pp. 375–382. DOI 10.17221/76/2020-JFS
22. Mehtätalo L., de-Miguel S., Gregoire T.G. Modeling height–diameter curves for prediction. *Canadian Journal of Forest Research*, 2015, no. 45, pp. 826–837.
23. Meyer H.A. A mathematical expression for height curves. *Journal of Forestry*, 1940, no. 38, pp. 415–420.

24. Näslund M. Antalet provträd och höjdkurvans noggrannhet. *Meddelanden från Statens Skogsforskningsinstitut*, 1929, no. 25, pp. 93–170.
25. Neter J., Kutner M.H., Nachtsheim C.J., Wasserman W. *Applied Linear Statistical Models*. Chicago, 1996, 1408 p.
26. Ogana F.N. Comparison of a modified log-logistic distribution with established models for tree height prediction. *Journal of Research in Forestry, Wildlife & Environment*, 2018, no. 10 (2), pp. 49–55.
27. Peng C., Zhang L., Liu J. Developing and validating nonlinear height–diameter models for major tree species of Ontario’s boreal forests. *Northern Journal of Applied Forestry*, 2001, no. 18 (3), pp. 87–94.
28. Peschel W. Mathematical methods for growth studies of trees and forest stands and the results of their application. *Tharandter Forstl. Jahrb*, 1938, no. 89, pp. 169–247.
29. Ratkowsky D.A. *Handbook of nonlinear regression*. New-York, 1990, 241 p.
30. Schnute J. A versatile growth model with statistically stable parameters. *Canadian Journal of Forest Research*, 1981, no. 38, pp. 1128–1140.
31. Sharma R.P., Vacek Z., Vacek S. Nonlinear mixed effect height–diameter model for mixed species forests in the central part of the Czech Republic. *Journal of Forest Science*, 2016, no. 62 (10), pp. 470–484. DOI: 10.17221/41/2016-JFS
32. Sibbesen E. Some new equations to describe phosphate sorption by soils. *J. Soil Sci.*, 1981, no. 32 (1), pp. 67–74.
33. Stage A.R. A mathematical approach to polymorphic site index curves for grand fir. *Forest Science*, 1963, no. 9, pp. 167–180.
34. Staudhammer C., LeMay V. Height prediction equations using diameter and stand density measures. *The Forestry Chronicle*, 2000, no. 76 (2), pp. 303–309.
35. Wykoff W.R., Crookston N.L., Stage A.R. User’s Guide to the Stand Prognosis Model. General Technical Report INT-133. Ogden: USDA Forest Service, Intermountain Forest and Range Experiment Station, 1982, 231 p.
36. Yang R.C., Kozak A., Smith J.H.G. The potential of Weibull-type functions as flexible growth curves. *Canadian Journal of Forest Research*, 1978, no. 8 (4), pp. 424–431.

Статья поступила в редакцию 1.07.2021