**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 9, jul. 2017

**Milínia Stephanie Nogueira
Barbosa Felício**

Secretaria de Educação do
Estado do Ceará/SEDUC-CE
millinia@gmail.com

Jonatan Floriano da Silva

Universidade Federal do Ceará/UFC
jonatanfloriano@gmail.com

Francisco Regis Vieira Alves

Instituto Federal de Educação,
Ciência e Tecnologia do Estado
do Ceará/IFCE
fregis@ifce.edu.br

Teorema de Borsuk no plano

The Borsuk's theorem on plane

Resumo

O trabalho versa sobre o Teorema de Borsuk na dimensão 2. É exposta inicialmente uma parte sobre o momento histórico que Borsuk vivenciou e sua conjectura refutada em elevadas dimensões. Para a dimensão do plano a ideia gira em torno da pergunta "Qual o menor número de partes que podemos dividir uma região F , de modo a garantir que em cada parte, o diâmetro é menor que o diâmetro da região F ?" Borsuk chamou a este número de partes de $a(F)$ e demonstrou, a partir do lema de Pall, que $a(F)$, o número de divisões necessárias, é menor ou igual a 3 para plano. Conceitos como diâmetro de uma figura plana qualquer, reta de apoio, hexágono centrossimétrico, apenas citados no presente trabalho encontram-se explorados no trabalho de conclusão do curso do PROFMAT/UFC.

Palavras-chave: Teorema de Borsuk. Diâmetro de figuras planas. Lema de Pall.

Abstract

The paper deals with Borsuk's Theorem in dimension 2. An historical part of the historical moment that Borsuk has experienced and his refuted conjecture in high dimensions is initially posed. For the dimension of the plane the idea revolves around the question "What is the smallest number of parts that we can divide a region F , so as to ensure that in each part the diameter is smaller than the diameter of the region F ?" Borsuk called To this number of parts of $a(F)$ and demonstrated from the lemma of Pall that $a(F)$, the number of divisions required, is less than or equal to 3 for plane. Concepts such as the diameter of any flat figure, support line, centrosymmetric hexagon, only mentioned in the present work are explored in the work of completing the PROFMAT / UFC course.

Keywords: Borsuk's theorem, Diameters of plane figures, Pall's lemma.

1 Introdução

É objetivo do presente trabalho compreender, por meio de alguns fundamentos de ordem histórica e epistemológica, elementos que concorreram para a Conjectura de Karol Borsuk (1905 – 1982) e, conseqüentemente, entender e discutir sua demonstração no plano.

O matemático polonês K. Borsuk contribuiu para Topologia e conjecturou o teorema, através de uma solução trivial para uma figura unidimensional, onde mostrou que ao dividir um segmento de linha, de certo comprimento, existiriam dois pedaços (da referida figura) mais curtos e assim generalizou para todas as dimensões: Para qualquer corpo F n -dimensional é verdade que $a(F) \leq n + 1$, onde $a(F)$ é o número de divisões necessárias, para que cada região tenha diâmetro menor, que o diâmetro da região inicial, ocupada pela figura no plano.

Borsuk não sabia ao certo se estava correto quanto à sua conjectura e, apenas 60 anos depois, o matemático norte-americano, especialista em combinatória, Jeff Ned Kahn, e o matemático hebreu Gil Kalai, da universidade de Yale, em Jerusalém, produziram um contraexemplo na dimensão 946 (KAHN; KALAI, 1993). Eles não só provaram que em espaços de dimensão elevada é possível criar um contraexemplo como mostraram que $a(F)$ cresce exponencialmente quando a dimensão tende para o infinito. Outras dimensões menores foram provadas. Em 2014 Andriy V. Bondarenko demonstrou um contraexemplo na dimensão 65 e no mesmo ano, Thomas Jenrich e Andries E. Brouwer demonstraram um contraexemplo na dimensão 64.

2 Diâmetro de figuras planas

Considere todos os pontos de uma região delimitada, fechada, plana e não vazia. Admita um conjunto de comprimento de distâncias formadas, a partir da distância entre os pontos da região. O diâmetro pode ser definido como: o maior elemento do conjunto das distâncias. Este elemento será o supremo das distâncias.

Seja d o diâmetro de uma região plana e $\rho(M,N)$, a distância euclidiana entre dois pontos M e N no plano. Dados M, N pertencentes a um círculo S , vale $\rho(M,N) \leq d$, de modo que existem A e B pertencentes a S em que $\rho(A,B) = d$. Neste caso, A e B localizam-se na circunferência de S . Veja Figura 1:

Figura1- Diâmetro no plano.

Fonte: Elaborado pelo autor.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é limitado superiormente, se $\exists b \in \mathbb{R}$, de modo que $x \leq b, \forall x \in X$, e é limitado inferiormente se $\exists a \in \mathbb{R}$, de modo que $a \leq x, \forall x \in X$. Quando um conjunto X é limitado superiormente e inferiormente diz-se que o conjunto é limitado. Denomina-se um conjunto acotado quando o conjunto tem um limite superior e inferior.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente e não vazio, b é o supremo do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X . Para tal, b segue as seguintes condições:

$\forall x \in X, x \leq b$ e se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c, \forall x \in X$, então $b \leq c$.

Conclui-se que não existe um número real menor que b , de modo que seja cota superior de X , ou seja, b é supremo de X , ou ainda, $b = \sup X$. Definimos:

$$\text{Diam}(F) = \sup \{ \rho(M, N) : M, N \in F \}$$

Uma figura plana é fechada quando todos os pontos limites da figura F estão em F . Estes pontos limites estão no bordo da figura F .

Para uma região F fechada temos $0 < \rho(M, N) \leq d$, um conjunto de distâncias acotadas.

Seja l um arco em uma circunferência. Quando l é menor que a semicircunferência, a medida do diâmetro será a medida da corda que passa pelos extremos de l . Quando l for maior que a semicircunferência, o diâmetro terá medida d , o próprio diâmetro do círculo. Veja:

Sejam A, B, C, D pontos de uma circunferência S , onde $\text{diam}(S) = d$. Dados A e B , pontos diametralmente opostos, verifica-se $\rho(A, B) = d$.

Se C e D são pontos não diametralmente opostos, então $\rho(C, D) < d$. Seja $\rho(C, D) = a$. A corda $\overline{CD}$ determina o arco l e dividirá S em duas regiões: H_1 e H_2 . Em H_1 temos $\widehat{CD} < \widehat{AB}$ e em H_2 temos $\widehat{CD} > \widehat{AB}$.

Para um ponto X sobre a circunferência em H_1 forma-se um triângulo $\Delta(CXD)$. De fato, $\overline{CD}$ será o maior segmento de H_1 , já que será o maior lado de qualquer triângulo formado nessas condições. Portanto, $\text{diam}(H_1) = a$. Em H_2 é possível encontrar C' e D' diametralmente opostos a C e D , respectivamente, tal que $\rho(C, C') = \rho(D, D') = d$. Veja Figura 2.

Figura2- $\text{diam}(H_1) = \text{diam}(H_2) = d$

Fonte: Elaborado pelo autor.

2.1 Diâmetro de polígonos

Em um polígono, o diâmetro é a maior distância entre seus vértices. Seja um polígono F , onde $\text{diam}(F) = d$. Sejam V e W os vértices de F que realizam a maior distância. Por definição, $\rho(V, W) \leq d$.

Existem A e $B \in F$, tal que $\rho(A, B) = d$. Neste caso, A e B pertencem ao bordo F , de modo análogo tem-se que A e B são vértices. Logo:

$$\rho(V, W) \leq d = \rho(A, B) \leq \rho(V, W) \quad \therefore d = \rho(V, W)$$

Em um triângulo o diâmetro é o comprimento de seu maior lado. Na elipse um par de pontos realiza a distância do diâmetro, no quadrado dois pares de pontos realizam a maior distância.

2.1.1 Diâmetro de polígonos regulares

Seja n o número de vértices de um polígono regular e d seu diâmetro, com $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{Z}$. Quando n é par, existem $\frac{n}{2}$ pares de pontos que realizam a distância d , e para n ímpar, n pares de pontos formam a distância d . Veja:

Nos polígonos regulares com um número par de lados, cada vértice forma a distância d com seu vértice oposto. Ao imaginar uma circunferência circunscrita a este polígono, percebe-se que cada vértice forma um par com o vértice diametralmente oposto. Logo, para n par, $\frac{n}{2}$ pares de vértices realizam a distância d . Já para polígonos regulares com um número ímpar de lados, a cada vértice, dois outros vértices realizam a distância d . Portanto, para n ímpar, n pares de vértices formam a distância d .

3 Construção do problema

Ao dividir um círculo S , com diâmetro d , em duas regiões H_1 e H_2 , pelo menos uma das regiões irá conter, no mínimo, um par de pontos que formem a distância d , ou seja, o diâmetro d estará representado em uma dessas regiões.

Seja um círculo S em que $\text{diam}(S) = d$ está representado pela união de dois subconjuntos fechados. Podemos verificar que um destes terá diâmetro d . Veja:

Sejam H_1 e H_2 conjuntos fechados tais que $H_1 \cup H_2$ formam o círculo. Seja $K_1 \subset H_1$ pontos na circunferência em H_1 e $K_2 \subset H_2$, os pontos da circunferência em H_2 . $K_1 \cup K_2$ formam a circunferência. Caso $K_2 = \emptyset$, K_1 é a própria circunferência e H_1 o próprio círculo. Logo, K_1 e K_2 não estão vazios, e $B \in K_1 \cap K_2$, já que a circunferência é contínua. B' é diametralmente oposto a B e $B' \in K_1$, sem perda de generalidade, B e $B' \in K_1$. Portanto, H_1 contém pelo menos um par de pontos que realizam a distância d . Deste modo H_1 também contém este par de pontos.

Portanto, dividir um círculo em duas partes, não é suficiente para garantir que cada região contenha um diâmetro menor que d .

Em um triângulo equilátero de diâmetro d , dividir em duas partes não será suficiente, já que dois vértices estarão na mesma região, e já foi demonstrado que em um polígono a maior distância, do conjunto das distâncias entre os vértices, forma o diâmetro.

As linhas de divisões devem ser abertas e simples para garantir a proposta de Borsuk. Ao falar em linhas abertas diz-se daquelas que não têm coincidência de origem da linha com sua extremidade e simples faz referência a linhas que não se cruzam.

Para divisões em número maior de partes, deve-se garantir que uma das extremidades de cada linha de divisão seja traçada de um dos pontos, que estão no bordo da figura, e a outra extremidade pertença a um novo ponto do bordo da figura, ou a outra linha de divisão. Entre todas as linhas traçadas deve existir pelo menos um ponto de intersecção. Veja Figura 3 e Figura 4.

Figura 3- Círculo dividido em 3 partes, satisfazendo a conjectura de Borsuk

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 4- Círculo dividido em 3 partes não satisfazendo a conjectura de Borsuk.

Fonte: Elaborado pelo autor.

3.1 Dados históricos da conjectura de Borsuk

Figura 5- Karol Borsuk

Fonte: Aigner e Ziegler, (2010, p. 95)

Borsuk (1905- 1982) era Polonês e resistiu com a Segunda Guerra Mundial, quando muitos acadêmicos foram enviados para campos de concentração e mortos de acordo com School of Mathematics and Statistics Borsuk.

Borsuk tentou manter o funcionamento da Universidade clandestina de Varsóvia, foi descoberto, preso e conseguiu fugir, mantendo-se escondido até o fim da guerra.

Todo o sistema educativo foi destruído durante o confronto. Borsuk desempenhou um papel importante na reconstrução do material perdido. Influenciou fortemente o desenvolvimento de toda a área de topologia de dimensão infinita.

Segundo Cipra (1993) a observação trivial que uma figura unidimensional de diâmetro d , isto é, um segmento de linha de certo comprimento, pode ser cortado em dois pedaços mais curtos, foi generalizado por Borsuk da seguinte forma:

Considere um corpo F de n dimensões, para este vale que $a(F) \leq n+1$.

A conjectura de Borsuk foi provada para a esfera e corpos lisos em geral. Muitos matemáticos tentaram provar a veracidade ou falsidade dessa conjectura. Alguns contraexemplos foram demonstrados em dimensões menores. Em 2003, foi reduzido para a dimensão 298. Jenrich e Brouwer (2014) afirmam terem encontrado um contraexemplo na dimensão 64.

4 Teorema de Borsuk na dimensão 2

Nosso objetivo é mostrar o Teorema de Borsuk, que diz que toda figura plana F com $\text{diam}(F) = d$ pode ser dividida em três partes de diâmetro menor que d , ou seja, $a(F) \leq 3$. De início apresentamos o lema de Pall que diz: Toda figura plana de diâmetro d pode ser colocada em um hexágono regular de tal forma que a distância entre seus lados paralelos seja igual a d . Veja Figura 6.

Figura 6- Distância entre lados paralelos do hexágono igual a d.

Fonte: Boltianski, e Gojberg (1973, p. 98)

Uma reta de apoio trata-se de uma reta, que tem pelo menos um ponto em comum com uma região F , onde F se dispõe integralmente em um dos semiplanos determinados por tal reta.

Seja l_1 a primeira reta de apoio traçada em uma região F . A reta l_1 pode ser gerada a partir de uma aproximação gradual de uma reta l , traçada inicialmente, de modo que $l \cap F = \emptyset$, e $l // l_1$. Já l_2 pode ser traçada de modo que $l // l_1 // l_2$, sendo l_2 reta de apoio de F . Veja Figura 7.

Figura 7- l_1 e l_2 são retas de apoio de F .

Fonte: Boltianski, e Gojberg (1973, p. 98)

Seja $M_1 \in l_1 \cap F$ e $M_2 \in l_2 \cap F$, de modo que F está inserido entre l_1 e l_2 . A distância entre estas retas não será maior que d , visto que $\text{diam}(F) = d$. Logo $\rho(l_1, l_2) \leq \rho(M_1, M_2) \leq d$.

Em seguida deve-se traçar a reta m , com $m \cap F = \emptyset$ e $\angle(l, m) = 60^\circ$ para posteriormente encontrar $m_1 // m_2 // m$.

As retas l_1, l_2, m_1, m_2 formarão um paralelogramo P com $P \supset F$. P é o paralelogramo $ABCD$, com $A = m_1 \cap l_2$, $B = m_1 \cap l_1$, $C = m_2 \cap l_1$, e $D = m_2 \cap l_2$.

De forma análoga, podemos formar a reta p , de modo que $\angle(l, p) = 120^\circ$. Basta aproximar p de F , paralela a si mesma, a fim de encontrar p_1 e p_2 , retas de apoio de F .

Sejam M e N , em p_1 e p_2 respectivamente, os pontos das retas formados pelos pés da perpendicular da diagonal $\overline{AC}$ conforme figura 8.

Figura 8- $l_1, l_2, m_1, m_2, p_1, p_2$ são retas de apoio de F.

Fonte: Boltianski, e Gojberg (1973, p. 13)

Define-se a Magnitude de F como $M = \overline{AM} - \overline{CN}$. A escolha de l_1 pode ser feita de forma que $\overline{AM} = \overline{CN}$. Vejamos:

Considere, sem perda de generalidade, que $\overline{AM} \neq \overline{CN}$ de tal forma que $\overline{AM} < \overline{CN}$. Observa-se que a magnitude é negativa, já que $M = \overline{AM} - \overline{CN}$. Ao fixar a figura F e variar l_1 em outras direções em torno de F, observa-se que $\overline{AM} = \overline{CN}$ para alguma posição de l_1 .

De fato, se M percorreu de um valor negativo, até um valor positivo, em algum momento $M=0$.

Dando continuidade ao lema de Pall, sabe-se que em todo quadrilátero, a soma dos ângulos internos é 360° . Já foi dado que $\angle(l, m) = 60^\circ$, sem perda de generalidade, temos $\angle(l_1, m_2) = \angle(l_2, m_1) = \angle(l, m) = 60^\circ$, daí vem que $\angle(l_1, m_1) = \angle(l_2, m_2) = 120^\circ$. Além do mais, traçou-se p, tal que $p \cap F = \emptyset$, de modo $\angle(l_1, p) = 120^\circ$ e $p_1 // p_2 // p$, encontrando portanto um hexágono.

Quando $AM = CN$ o resultado será um hexágono centrossimétrico e o ponto de simetria central do hexágono será o mesmo do paralelogramo.

Nota-se, pelo próprio modelo de construção, que os ângulos internos do hexágono da Figura 7 serão de 120° . De fato $\angle BIJ = 120^\circ$, pois $\angle(l_1, p_2) = 120^\circ$ e pelos ângulos internos do paralelogramo formado pelas retas l_1, l_2, m_1, m_2 , tem-se $\angle IBH = \angle KDJ = 120^\circ$. Além do mais, $\angle CIJ = \angle HAK = 60^\circ$.

Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , no $\triangle ICJ$ tem-se $\angle CJI = 60^\circ$, e $\angle IJD = 120^\circ$, já que são suplementares.

Também, $\angle BIJ = \angle HKD$, já que são ângulos opostos do paralelogramo formado pelas retas l_1, l_2, m_1, m_2 . Por fim, $\angle BIJ + \angle IJD + \angle JDK + \angle HKD + \angle HBI = 600^\circ$, logo $\angle BHK = 120^\circ$, já que a soma dos ângulos internos de um hexágono resulta em 720° .

Como $\rho(l_1, l_2) \leq d$, $\rho(m_1, m_2) \leq d$ e $\rho(p_1, p_2) \leq d$, para tornar o hexágono regular deve-se manter a figura fixa e deslocar as retas, mantendo suas direções, até que a distância seja exatamente d , daí resultará um hexágono centrossimétrico regular.

Portanto, foi provado o lema de Pall, ao garantir que toda figura plana de diâmetro d pode ser colocada em um hexágono regular, de tal forma que, a distância entre seus lados paralelos seja igual a d .

Agora vamos demonstrar o Teorema de Borsuk enunciado no começo da seção. O Teorema de Borsuk para o plano diz que toda figura plana F com $\text{diam}(F) = d$, pode ser dividida em três partes de diâmetro menor que d , ou seja, $a(F) \leq 3$. Considere $a(F)$ o número de partes que se deve dividir uma figura plana F com $\text{diam}(F)=d$ de modo que cada parte tenha o diâmetro menor que d .

De posse do Lema de Pall, basta então mostrar que o hexágono regular pode ser dividido em três partes e o diâmetro de cada uma dessas regiões não é maior que d . Sejam P , Q e R pontos médios, de três lados não consecutivos do hexágono, e seja O o centro deste hexágono.

Sem perda de generalidade, prolonga-se a reta que passa por O e P . L será o ponto de intersecção da reta com o lado paralelo oposto ao lado do hexágono que contém P . Traça-se os segmentos $\overline{PO}$, $\overline{RO}$ e $\overline{QO}$, assim o hexágono se dividirá em três regiões: H_1, H_2, H_3 , cinco pentágonos com mesma área. Veja Figura 9.

Figura 9- Hexágono regular

Fonte: Elaborado pelo autor.

É fácil perceber que o segmento $\overline{PQ}$ é o diâmetro de H_1 , já que é a maior diagonal do pentágono, e já foi dito que em todo polígono regular o diâmetro é a maior distância entre seus vértices. Tem-se no $\Delta(PQL)$ que $\angle PQL = 90^\circ$ e o $\Delta(OQL)$ é equilátero. Veja Figura 10.

Figura 10 - $\Delta(PQL)$ e $\Delta(OQL)$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Daí vem que $d^2 = \overline{PQ}^2 + (\frac{d}{2})^2$ e $\overline{PQ}^2 = d^2 - (\frac{d}{2})^2$, então $\overline{PQ} = \frac{d\sqrt{3}}{2}$. O que deixa claro toda figura plana pode ser dividida em três partes, onde o diâmetro de cada região não será maior que $\frac{d\sqrt{3}}{2} \cong 0,8660d$.

Para um círculo S interno ao hexágono, com $\text{diam}(S)=d$, o diâmetro de cada região será exatamente igual a que $\frac{d\sqrt{3}}{2}$, e não é possível uma divisão onde cada uma das partes seja menor que esse valor, pois $\widehat{PQ} < 120^\circ$, $\widehat{PR} < 120^\circ$ e $\widehat{RQ} < 120^\circ$ e estes não cobrem uma circunferência. Veja figura 11.

Figura 11- Círculo inscrito em um hexágono regular.

Fonte:Elaborado pelo autor.

4 Considerações finais

De fato, o Teorema de Borsuk no Plano é um conhecimento repleto em geometria plana básica. Os elementos envolvidos, Lema de Pall, hexágono centrossimétrico são conteúdos pouco explorados, principalmente no presente idioma e necessitam de mais estudo e bibliografia. O principal referencial teórico utilizado no presente trabalho foi o livro "Division de Figuras em Partes Menores" de V.G. Boltianski e I.Ts. Gojberg, além do trabalho de conclusão de curso intitulado Teorema de Borsuk no plano já mencionado anteriormente. Fica a curiosidade de se explorar para quais elementos do plano $a(F)=2$ e para quais $a(F)=3$. Vale refletir que para o espaço tridimensional pode ser feito estudo semelhante. Em um elipsoide alongado E , por exemplo, o número de Borsuk é igual a 2 e vale 3 para um cone C com altura menor que o diâmetro da base, enquanto um cone C com altura maior que o diâmetro da base tem número de Borsuk igual a 2, já que se pode parti-lo em duas partes de menor diâmetro. Uma esfera precisa de 4 divisões para garantir a conjectura na dimensão 3.

5 Referências

- AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. **Proofs from the book**. 4. ed. Berlin: Springer, 2010.
- BOLTIANSKI, V. G.; GOJBERG, I. C. **División de figuras en partes menores**. Rússia: Editorial Mir Moscú, 1973.
- BONDARENKO, A.V. On Borsuk's conjecture for two-distance sets. **Discrete & Computational Geometry**, v. 51, n. 3, p. 509-515, 2014. Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1305.2584v2.pdf>. Acesso em: 1 mar. 2017.
- CIPRA, B. **What's happening in the mathematical sciences**. Providence: American Mathematical Society, 1993. v. 1, p. 21-29.
- FELÍCIO, M. S. N. B. **Teorema de Borsuk no plano**. 2016. 88 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Curso de Matemática PROFMAT, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2016. Disponível em: <http://www.profmatsbm.org.br/dissertacoes?polo=&titulo=borsuk&aluno=>. Acesso em: 12 fev. 2017.
- JENRICH, T; BROUWER, A. E. A 64-dimensional counterexample to Borsuk's conjecture. **The Electronic Journal of Combinatorics**, v. 21, n. 4, p. 1-3, 2014. Disponível em: <http://www.win.tue.nl/~aeb/preprints/borsuk64.pdf>. Acesso em: 1 mar. 2017.
- KAHN, J; KALAI, J. A contourexample to Borsuk's conjecture. **BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY**, v. 29, n. 1, p. 60-62, 1993.
- LIMA, E.L. **Análise real**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1993. v. 1.
- MATH.INFO. Karol Borsuk. Disponível em: <http://www.learnmath.info/portugal/historyDetail.htm?id=Borsuk>. Acesso em: 10 jan. 2017.