Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 9, jul. 2017

Suzete Maria Silva Afonso
Universidade Estadual Paulista -
Júlio Mesquita Filho
smafonso@rc.unesp.br

Carolinne Stefane de Souza
Universidade Estadual Paulista -
Júlio Mesquita Filho
ssouza.carolinne@gmail.com

Soluções periódicas de um tipo de equação diferencial de terceira ordem com retardo

Periodic solutions of a kind of third-order delay differential equation

Resumo

Neste trabalho, estabeleceremos condições para garantir a existência de solução ω -periódica para a equação diferencial funcional neutra de terceira ordem $x'''(t) + ax''(t) + g(x'(t - \tau(t))) + f(x(t - \tau(t))) = p(t)$, em que a é uma constante positiva, $g, f, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, τ e p são ω -periódicas, com $\omega > 0$ e $\int_0^\omega p(t)dt \neq 0$. Para isso, encontraremos uma equação a operadores $Lx = N(x, \lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$, onde L é um operador de Fredholm de índice zero e $N_\lambda = N(\cdot, \lambda)$ é um operador L -compacto, ambos definidos e tomando valores em espaços adequados de funções, de tal modo que da existência de solução para tal equação, que será garantida pelo Teorema de Continuação de Mawhin, possamos inferir que a equação acima possui pelo menos uma solução ω -periódica em $\mathbb{R}$.

Palavras-chave: Solução periódica. Equação diferencial funcional neutra. Teorema da Continuação de Mawhin.

Abstract

In this work, we will establish conditions to guarantee the existence of a ω -periodic solution for the third-order neutral functional differential equation $x'''(t) + ax''(t) + g(x'(t - \tau(t))) + f(x(t - \tau(t))) = p(t)$, where a is a positive constant, $g, f, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ are continuous functions, τ and p are ω -periodic, with $\omega > 0$ and $\int_0^\omega p(t)dt \neq 0$. For this, we will find an operator equation $Lx = N(x, \lambda)$, $\lambda \in [0, 1]$, where L is a Fredholm operator of index zero and $N_\lambda = N(\cdot, \lambda)$ is a L -compact operator, both defined and taking values in appropriate spaces of functions such that, from the existence of solution for such equation, which will be guaranteed by Mawhin's Continuation Theorem, we can infer that the above equation has at least one ω -periodic in $\mathbb{R}$.

Keywords: Periodic solution. Neutral functional differential equation. Mawhin's Continuation Theorem.

1 Introdução

Nos últimos anos, alguns resultados sobre existência de solução periódica de equações diferenciais com retardo têm sido obtidos através do Teorema de Continuação de Mawhin, veja os artigos [1], [2] e [3], por exemplo. Em [3], Ma; Wang e Yu obtiveram resultados sobre a existência de solução periódica para a equação de Duffing com retardo:

$$x''(t) + m^2 x(t) + g(x(t - \tau)) = p(t).$$

Em [4], Gui e Ge estabeleceram condições que garantem a existência de solução periódica para a equação diferencial com retardo de terceira ordem:

$$x'''(t) + ax''(t) + g(x'(t - \tau(t))) + f(x(t - \tau(t))) = p(t), \quad (1)$$

em que

- 1) a é uma constante positiva;
- 2) $g, f, p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas;
- 3) τ e p são funções ω -periódicas ($\tau(t + \omega) = \tau(t)$ e $p(t + \omega) = p(t)$), com $\omega > 0$;
- 4) $\int_0^\omega p(t) dt \neq 0$.

Este artigo é uma tradução em português, mais detalhada, do trabalho de Gui e Ge ([4]). O artigo [4] contém um erro, que está no exemplo presente no final do trabalho. A função $f(u) = 2(\sin u)^2 \arctan u$ não satisfaz a hipótese (H2) do Teorema 1-[4], para $K = 1$, $D > \frac{\pi}{4}$ e $M = \pi$, e $a = 0.4$ não cumpre $\omega = 2\pi < \frac{1}{a^2}$, o que torna o exemplo inviável para ilustrar o resultado obtido. Aqui, nós apresentamos um exemplo válido para concluir o trabalho de Gui e Ge. Ademais, fizemos uma pequena alteração na hipótese (H3) do Teorema 1-[4].

Caracterizamos este artigo como um trabalho de divulgação. Pretendemos mostrar como uma ferramenta topológica - a teoria do grau coincidente - pode ser empregada para resolver problemas de equações diferenciais funcionais com retardo de forma elegante.

Sob algumas condições, provamos que a equação (1) tem pelo menos uma solução periódica na Seção 3. A principal ferramenta para obter este resultado é o Teorema de Continuação de Mawhin. Na Seção 4, fornecemos um exemplo em que aplicamos o resultado obtido.

2 Notações

Os seguintes símbolos serão usados na sequência.

1. $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$.
2. $|\cdot|$ denota o módulo de um número real.
3. $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é o espaço vetorial das funções contínuas $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
4. $C^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é o espaço vetorial das funções n vezes diferenciáveis $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tais que $\varphi^{(n)} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua.
5. $|p|_0 = \max\{|p(t)|; t \in [0, \omega]\}$.

6. $\|x\| = \max\{|x|_0, |x'|_0, |x''|_0\}$.
7. $\overline{\Omega}$ denota o fecho do conjunto Ω .
8. $\text{int } \Omega$ denota o interior do conjunto Ω .
9. $\partial\Omega$ denota a fronteira do conjunto Ω .

3 Existência de soluções periódicas

Vamos considerar a equação (1), com as hipóteses 1), 2), 3) e 4) satisfeitas. Dizemos que $x \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ é solução da equação (1) quando x satisfaz (1). Além disso, se $x(t + \omega) = x(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, então x será dita uma solução ω -periódica de (1).

Vamos assumir que existem três constantes positivas K , D e M , tais que:

- (H₁) $|g(x)| \leq K$, para todo $x \in \mathbb{R}$;
- (H₂) $|f(x)| > K + |p|_0$ e $xf(x) > 0$ para $|x| \geq D$;
- (H₃) $|f(x)| \leq M$ para $x \leq -D$.

Além disso, vamos admitir que

- (H₄) $\omega < \frac{1}{a^2}$.

O resultado central deste trabalho é o seguinte teorema.

Teorema 1. *Se as hipóteses (H₁), (H₂), (H₃) e (H₄) estão satisfeitas, então a equação (1) tem pelo menos uma solução ω -periódica em $\mathbb{R}$.*

Na sequência apresentaremos conceitos importantes para a demonstração do Teorema 1.

Sejam X e Z espaços de Banach. Um operador linear $L : \text{dom } L \subset X \rightarrow Z$ é dito *operador de Fredholm* se estão satisfeitas as seguintes condições:

- i) $\text{Ker } L$ possui dimensão finita ($\dim \text{Ker } L < \infty$);
- ii) $\text{Im } L$ possui codimensão finita ($\text{codim Im } L < \infty$);
- iii) $\text{Im } L$ é um conjunto fechado ($\text{Im } L = \overline{\text{Im } L}$).

Quando $\dim \text{Ker } L = \text{codim Im } L$, L é dito um *operador de Fredholm de índice zero*.

Prova-se que, se L for um operador de Fredholm de índice zero, então existirão operadores lineares contínuos e idempotentes $P : X \rightarrow X$ e $Q : Z \rightarrow Z$, tais que

$$\text{Ker } L = \text{Im } P \quad \text{e} \quad \text{Im } L = \text{Ker } Q.$$

Consequentemente, a restrição L_P do operador L ao conjunto $\text{dom } L \cap \text{Ker } P$ é invertível, com inversa $K_P : \text{Im } L \rightarrow \text{dom } L \cap \text{Ker } P$. Para a análise destes fatos, veja [5].

Denotaremos por $K_{P,Q} : Z \rightarrow \text{dom } L \cap \text{Ker } P$ a inversa generalizada de L definida por $K_{P,Q} = K_P(I - Q)$.

Dados Ω um subconjunto aberto e limitado de X e um operador $N : \overline{\Omega} \rightarrow Z$, diremos que N é um *operador L -compacto* em Ω se $QN(\overline{\Omega})$ é limitado e o operador $K_{P,Q}N$ é compacto.

Para provar o Teorema 1 necessitamos do seguinte Teorema de Continuação de Mawhin, cuja demonstração pode ser encontrada em [5].

Lema 2 (Teorema de Continuação de Mawhin). *Sejam X, Z espaços de Banach e Ω um subconjunto aberto e limitado de X . Considere a equação*

$$Lx = \lambda N(x, \lambda),$$

em que $L : \text{dom } L \subset X \rightarrow Z$ é um operador de Fredholm de índice zero, $\lambda \in [0, 1]$ e N é um operador definido em $\overline{\Omega} \times [0, 1]$ com valores em Z .

Sejam $P : X \rightarrow X$ e $Q : Z \rightarrow Z$ projeções contínuas, tais que $\text{Im } P = \text{Ker } L$ e $\text{Ker } Q = \text{Im } L$.

Suponha que o operador $N_\lambda : \overline{\Omega} \rightarrow Z$, definido por $N_\lambda(x) = N(x, \lambda)$, seja L -compacto em $\overline{\Omega}$, para cada $\lambda \in [0, 1]$ fixo. Suponha, também, que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- i) para $\lambda \in (0, 1)$ e $x \in \partial\Omega \cap \text{dom } L$, tem-se $Lx \neq \lambda N_\lambda(x)$;*
- ii) para $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker } L$, tem-se $QN_0(x) \neq 0$;*
- iii) $\deg(QN_0, \Omega \cap \text{Ker } L, 0) \neq 0$.*

Nestas condições, a equação $Lx = N(x, 1)$ possuirá pelo menos uma solução em $\overline{\Omega} \cap \text{dom } L$.

Visando utilizar o Lema 2 para demonstrar o Teorema 1, encontraremos uma equação a operadores $Lx = N(x, \lambda)$, onde L é um operador de Fredholm de índice zero e N_λ é um operador L -compacto, ambos definidos e tomando valores em espaços adequados de funções, de forma que da existência de solução para tal equação seja possível concluir que a equação (1) possui pelo menos uma solução ω -periódica em $\mathbb{R}$.

Sejam

$$X = \{x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}); x(t + \omega) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

e

$$Z = \{z \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}); z(t + \omega) = z(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$$

espaços de Banach com as normas $\|\cdot\|, |\cdot|_0$, respectivamente.

Defina $\text{dom } L = \{x \in C^3(\mathbb{R}, \mathbb{R}); x(t + \omega) = x(t), \forall t \in \mathbb{R}\}$ e

$$Lx = x''', \quad \text{para } x \in \text{dom } L.$$

Claramente $\text{dom } L \subset X$.

Definamos agora, para $\lambda \in [0, 1]$,

$$N(x(t), \lambda) = -ax''(t) - \lambda g(x'(t - \tau(t))) - f(x(t - \tau(t))) + \lambda p(t).$$

Considere as seguintes projeções contínuas:

$$Px(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega x(t) dt \quad \text{e} \quad Qz(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega z(t) dt, \quad \text{para } x \in X, z \in Z, t \in \mathbb{R}.$$

Proposição 3. *L é um operador de Fredholm de índice zero.*

Demonstração. Faremos a prova deste resultado em três passos.

- (I) É simples verificar que $\text{Im } L = \{z \in Z; \int_0^\omega z(t) dt = 0\}$. Vamos, pois, provar que $\text{Im } L$ é um conjunto fechado. Com efeito, seja $y \in \overline{\text{Im } L}$. Então, existe uma sequência $(y_n) \subset \text{Im } L$, tal que

$$\int_0^\omega y_n(t) dt = 0 \quad \text{e} \quad y_n \rightarrow y.$$

Como a convergência $y_n \rightarrow y$ é uniforme, temos que

$$\int_0^{\omega} y_n(t) dt \rightarrow \int_0^{\omega} y(t) dt,$$

de onde segue que $\int_0^{\omega} y(t) dt = 0$ e, conseqüentemente, o conjunto $\text{Im } L$ é fechado.

- (II) Se $x \in \text{Ker } L$, então $x''' = 0$, ou seja, $x'''(t) = 0$ para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Deste modo, $x''(t) = c_1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, o que implica $x'(t) = c_1 t + c_2$, para todo $t \in \mathbb{R}$, em que c_1 e c_2 são constantes reais.

Do fato de x ser periódica, podemos concluir que x' é periódica e, portanto, $x'(t) = c_2$ e $x(t) = c_2 t + c_3$, para todo $t \in \mathbb{R}$, em que c_3 é uma constante real. Como x é periódica, concluímos que $x(t) = c_3$, para todo $t \in \mathbb{R}$, ou seja, x é uma função constante. Por conseguinte,

$$\dim \text{Ker } L = \dim \mathbb{R} = 1.$$

- (III) Da forma como a projeção Q foi definida, vemos que $\text{Im } Q \simeq \mathbb{R}$. Então, $\dim \text{Im } Q = \dim \mathbb{R} = 1$.

Note que $\text{Im } Q \cap \text{Ker } Q = \{0\}$. Assim,

$$Z = \text{Im } Q \oplus \text{Ker } Q. \quad (2)$$

Vimos em (I) que $\text{Ker } Q = \text{Im } L$ e, portanto,

$$\dim \text{Ker } Q = \dim \text{Im } L. \quad (3)$$

Das igualdades (2) e (3), obtemos

$$\text{codim Im } L = \dim \text{Im } Q = 1.$$

Por (I), (II) e (III), podemos concluir que L é um operador de Fredholm de índice zero. □

Fixe $\lambda \in (0, 1)$ e considere a equação

$$Lx = \lambda N(x, \lambda), \quad (4)$$

que é equivalente a

$$x'''(t) + \lambda a x''(t) + \lambda^2 g(x'(t - \tau(t))) + \lambda f(x(t - \tau(t))) = \lambda^2 p(t). \quad (5)$$

Proposição 4. *Se as condições (H_1) , (H_2) , (H_3) e (H_4) estão satisfeitas, então existe uma constante positiva A_0 , que não depende de λ , tal que se $x \in \text{dom } L$ satisfaz (4) então $\|x\| < A_0$.*

Demonstração. Seja $x \in \text{dom } L$ uma solução da equação (5). Integrando ambos os membros da igualdade (5) sobre $[0, \omega]$, obtemos

$$-\int_0^{\omega} [x'''(t) + \lambda a x''(t)] dt = \int_0^{\omega} [\lambda^2 g(x'(t - \tau(t))) + \lambda f(x(t - \tau(t))) - \lambda^2 p(t)] dt,$$

de onde segue que

$$- [x''(\omega) - x''(0) + \lambda a(x'(\omega) - x'(0))] = \lambda \int_0^\omega [\lambda g(x'(t - \tau(t))) + f(x(t - \tau(t))) - \lambda p(t)] dt.$$

Como x' e x'' são periódicas, obtemos

$$0 = \int_0^\omega [\lambda g(x'(t - \tau(t))) + f(x(t - \tau(t))) + \lambda p(t)] dt. \quad (6)$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \int_0^\omega [f(x(t - \tau(t))) - K - |p|_0] dt &\leq \int_0^\omega [f(x(t - \tau(t))) - \lambda |g(x'(t - \tau(t)))| - \lambda p(t)] dt \leq \\ &\leq \int_0^\omega [f(x(t - \tau(t))) + \lambda g(x'(t - \tau(t))) - \lambda p(t)] dt = 0. \end{aligned}$$

Defina $E_1 = \{t \in [0, \omega]; x(t - \tau(t)) > D\}$ e $E_2 = [0, \omega] - E_1$. Então,

$$\int_{E_2} |f(x(t - \tau(t)))| dt \leq 2\omega \max\{M, \sup\{|f(x)|; |x| \leq D\}\}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{E_1} [|f(x(t - \tau(t)))| - K - |p|_0] dt &\leq \int_{E_1} [f(x(t - \tau(t))) - K - |p|_0] dt = \\ &= \int_{E_1} [f(x(t - \tau(t))) - K - |p|_0] dt = \int_0^\omega [f(x(t - \tau(t))) - K - |p|_0] dt - \\ &- \int_{E_2} [f(x(t - \tau(t))) - K - |p|_0] dt \leq - \int_{E_2} [f(x(t - \tau(t))) - K - |p|_0] dt \leq \\ &\leq \int_{E_2} |f(x(t - \tau(t))) - K - |p|_0| dt \leq \int_{E_2} |f(x(t - \tau(t)))| dt + \int_{E_2} [K + |p|_0] dt. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |f(x(t - \tau(t)))| dt &= \int_{E_1} |f(x(t - \tau(t)))| dt + \int_{E_2} |f(x(t - \tau(t)))| dt \leq \\ &\leq \int_{E_2} |f(x(t - \tau(t)))| dt + \int_{E_2} [K + |p|_0] dt + \int_{E_1} [K + |p|_0] dt + \int_{E_2} |f(x(t - \tau(t)))| dt = \\ &= 2 \int_{E_2} |f(x(t - \tau(t)))| dt + \int_0^\omega [K + |p|_0] dt \leq 4\omega \max\{M, \sup\{|f(x)|; |x| > D\}\} + \omega (K + |p|_0) = \\ &= \omega [4 \max\{M, \sup\{|f(x)|; |x| > D\}\} + K + |p|_0] = \omega M_1, \end{aligned}$$

em que $M_1 = 4 \max\{M, \sup\{|f(x)|; |x| > D\}\} + K + |p|_0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |x'''(s)| ds &= \int_0^\omega |-\lambda a x''(s) - \lambda^2 g(x'(s - \tau(s))) - \lambda f(x(s - \tau(s))) + \lambda p(s)| ds \leq \\ &\leq a \int_0^\omega |x''(s)| ds + \int_0^\omega |g(x'(s - \tau(s)))| ds + \int_0^\omega |f(x(s - \tau(s)))| ds + \int_0^\omega |p|_0 ds \leq \end{aligned}$$

$$\leq a \int_0^\omega |x''(s)| ds + \omega(K + M_1 + |p|_0) \leq a\sqrt{\omega} \left[\int_0^\omega |x''(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} + \omega(K + M_1 + |p|_0),$$

ou seja,

$$\int_0^\omega |x'''(s)| ds \leq a\sqrt{\omega} \left[\int_0^\omega |x''(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} + \omega(K + M_1 + |p|_0). \quad (7)$$

Cabe observar que, para obter a última desigualdade, utilizamos a Desigualdade de Hölder.

A equação (6) implica que existe $t_1 \in [0, \omega]$, tal que

$$\lambda g(x'(t_1 - \tau(t_1))) + f(x(t_1 - \tau(t_1))) - \lambda p(t_1) = 0.$$

Assim,

$$|f(x(t_1 - \tau(t_1)))| \leq \lambda [|g(x'(t_1 - \tau(t_1)))| + |p|_0] \leq |g(x(t_1 - \tau(t_1)))| + |p|_0 \leq K + |p|_0.$$

Por (H_3) , podemos concluir que $|x(t_1 - \tau(t_1))| < D$.

Finalmente, se $t_1 - \tau(t_1) \in [0, \omega]$, tome $t_2 = t_1 - \tau(t_1)$, caso contrário, como x é periódica, existe $t_2 \in [0, \omega]$, tal que $x(t_2) = x(t_1 - \tau(t_1))$. Isto é, existe $t_2 \in [0, \omega]$, tal que $|x(t_2)| < D$.

Então,

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |x(t_2) + (x(t) - x(t_2))| = \left| x(t_2) + \int_{t_2}^t x'(s) ds \right| \leq |x(t_2)| + \int_{t_2}^t |x'(s)| ds \leq \\ &\leq D + \int_0^\omega |x'(s)| ds \leq D + \sqrt{\omega} \left[\int_0^\omega |x'(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|x(t)| \leq D + \sqrt{\omega} \left[\int_0^\omega |x'(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Como $x(0) = x(\omega)$, existe $t_0 \in [0, \omega]$, tal que $x'(t_0) = 0$, pelo Teorema do Valor Médio. Portanto,

$$|x'(t)| = |x'(t) - x'(t_0)| = \left| \int_{t_0}^t x''(s) ds \right| \leq \int_0^\omega |x''(s)| ds \leq \sqrt{\omega} \left[\int_0^\omega |x''(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (9)$$

Temos então

$$\left[\int_0^\omega |x'(s)| ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\omega} \max\{|x'(t)|; t \in [0, \omega]\} \leq \omega \left[\int_0^\omega |x''(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Como x'' é periódica, do mesmo modo que na equação (9), obtemos

$$|x''(t)| \leq \int_0^\omega |x'''(t)| dt.$$

Então,

$$\left[\int_0^\omega |x''(s)| ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\omega} \max\{|x''(t)|; t \in [0, \omega]\} \leq \sqrt{\omega} \int_0^\omega |x'''(t)| dt. \quad (11)$$

Substituindo a equação (7) na equação (11), temos

$$\left[\int_0^\omega |x''(s)|^2 ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq \frac{\omega^{\frac{3}{2}}}{1-a\omega} (K + M_1 + |p|_0). \quad (12)$$

Substituindo a equação (12) na equação (7), obtemos

$$|x''|_0 \leq \int_0^\omega |x'''(t)| dt \leq \frac{a}{1-a\omega} (K + M_1 + |p|_0) := A_3. \quad (13)$$

Substituindo a equação (12) na equação (9), temos

$$|x'|_0 \leq \frac{\omega^2}{1-a\omega} (K + M_1 + |p|_0) := A_2. \quad (14)$$

Agora, usando as equações (12), (10) e (8), obtemos

$$|x|_0 \leq D + \frac{\omega^3}{1-a\omega} (K + M_1 + |p|_0) := A_1. \quad (15)$$

Seja $A_0 = \max\{A_1, A_2, A_3\} + 1$. Por (13), (14) e (15), concluímos que se $x \in \text{dom } L$ satisfaz (4) então $\|x\| < A_0$. $\square$

Nas próximas linhas, obteremos um conjunto aberto e limitado $\Omega \subset X$, tal que o operador N_λ é L -compacto em $\overline{\Omega}$, para $\lambda \in [0, 1]$, e as condições (i) (ii) e (iii) do Lema 2 estão satisfeitas.

Defina

$$\Omega = \{x \in X; \|x\| < A_0\}. \quad (16)$$

Proposição 5. Para cada $\lambda \in [0, 1]$, N_λ é um operador L -compacto em $\overline{\Omega}$.

Demonstração. Se $x \in \overline{\Omega}$, então $\|x\| \leq A_0$ e

$$\begin{aligned} |Q(N(x(t), \lambda))| &= \left| \frac{1}{\omega} \int_0^\omega N(x(t), \lambda) dt \right| = \\ &= \frac{1}{\omega} \left| \int_0^\omega [ax''(t) - \lambda g(x'(t - \tau(t))) - f(x(t - \tau(t))) + \lambda p(t)] dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |g(x'(t - \tau(t)))| dt + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |f(x(t - \tau(t)))| dt + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega |p(t)| dt \leq \\ &\leq \sup\{|g(z)|; z \in [-A_0, A_0]\} + \sup\{|f(z)|; z \in [-A_0, A_0]\} + |p|_0. \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto $QN_\lambda(\overline{\Omega})$ é limitado.

Denotando por $K_P : \text{Im } L \rightarrow \text{dom } L \cap \text{Ker } P$ a inversa do operador L restrito a $\text{dom } L \cap \text{Ker } P$, temos

$$\begin{aligned} K_P(y(s)) &= \frac{t}{2} \int_0^\omega (\omega - s)y(s) ds - \frac{t}{2\omega} \int_0^\omega (\omega - s)^2 y(s) ds - \\ &- \frac{t^2}{2\omega} \int_0^\omega (\omega - s)y(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t (t - s)^2 y(s) ds. \end{aligned}$$

Com o auxílio do Teorema de Arzelà-Ascoli, é possível provar que $K_{P,Q}N_\lambda = K_P(I - Q)N_\lambda$ é um operador compacto para cada $\lambda \in [0, 1]$. A prova deste fato não apresenta detalhes de difícil compreensão; basta lembrar do conceito de operador compacto e verificar que as hipóteses do Teorema de Arzelà-Ascoli são satisfeitas. Ela é omitida aqui apenas por ser extensa.

Logo, para cada $\lambda \in [0, 1]$, N_λ é um operador L -compacto em $\overline{\Omega}$. $\square$

Proposição 6. Se as condições (H_1) , (H_2) , (H_3) e (H_4) forem satisfeitas, então se cumprirão as condições seguintes:

- i) para $\lambda \in (0, 1)$ e $x \in \partial\Omega \cap \text{dom} L$, tem-se $Lx \neq \lambda N_\lambda(x)$;
- ii) para $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker} L$, tem-se $QN_0(x) \neq 0$;
- iii) $\deg(QN_0, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) \neq 0$.

Demonstração. i) Se $Lx = \lambda N(x, \lambda)$, então $|x|_0 \leq A_1$, $|x'|_0 \leq A_2$ e $|x''|_0 \leq A_3$, pela Proposição 4. Portanto,

$$\|x\| \leq \max\{A_1, A_2, A_3\} < A_0 \Rightarrow x \in \Omega = \text{int } \Omega,$$

de onde segue que $x \notin \partial\Omega \cap \text{dom} L$.

- ii) Seja $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker} L = \partial\Omega \cap \mathbb{R}$. Então, x é uma função constante e, como $\|x\| = A_0$, temos $x(t) = \pm A_0$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Logo, para $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker} L$, temos

$$QN(x, 0) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega [-ax''(t) - f(x(t - \tau(t)))] dt = -\frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(\pm A_0) dt \neq 0,$$

pois $A_0 > A_1 > D$ e, pela hipótese (H_2) , é verdade que $|f(\pm A_0)| > K + |p|_0 > 0$.

- iii) Considere a homotopia

$$H(x, \mu) = \mu x + \frac{1 - \mu}{\omega} \int_0^\omega f(x) ds, \quad \mu \in [0, 1].$$

Para $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker} L$ e $\mu \in [0, 1]$, temos

$$xH(x, \mu) = \mu x^2 + \frac{1 - \mu}{\omega} \int_0^\omega x f(x) ds > 0,$$

de onde podemos inferir que $0 \notin H((\partial\Omega \cap \text{Ker} L) \times [0, 1])$. Usando a propriedade da invariância do grau por homotopia, concluímos que

$$\deg(QN_0, \Omega \cap \text{Ker} L, 0) = \deg(-f, \Omega, \cap \mathbb{R}, 0) = \deg(-I, \Omega \cap \mathbb{R}, 0) \neq 0.$$

□

Neste momento, estamos em condições de demonstrar o Teorema 1, que é o resultado principal deste trabalho.

Demonstração. (do Teorema 1) Suponha que as condições (H_1) , (H_2) , (H_3) e (H_4) estejam satisfeitas. Pelas Proposições 3, 4, 5 e 6, as hipóteses do Lema 2 estão satisfeitas. Portanto, a equação (4) tem pelo menos uma solução em $\overline{\Omega} \cap \text{dom} L$, o que equivale a dizer que a equação (5) tem pelo menos uma solução ω -periódica em $\mathbb{R}$. □

4 Exemplo

Considere a seguinte equação

$$x'''(t) + \frac{3}{10}x''(t) + \exp[-(x'(t - \cos(t)))^2] + 2 \arctan(x(t - \cos(t))) = 1 + \sin(t). \quad (17)$$

Temos $a = \frac{3}{10}$, $g(u) = \exp(-u^2)$, $f(u) = 2 \arctan(u)$, $\tau(t) = \cos(t)$ e $p(t) = 1 + \sin(t)$.

É fácil verificar que as condições do Teorema 1 estão satisfeitas para $K = 1$, $M = \pi$, $D = 20$ e $\omega = 2\pi$. Então, a equação (17) admite pelo menos uma solução 2π -periódica.

5 Referências bibliográficas

1. LU, Shiping; GE, Weigao; ZHENG, Zuxiu. Periodic solutions for a kind of Rayleigh equation with a deviating argument. **Appl. Math. Letters**, v. 17, n. 4, p. 443-449, 2004.
2. LU, Shiping; GE, Weigao. Periodic solutions for a kind of second order differential equation with multiple deviating arguments. **Appl. Math. Comput.**, v. 146, n. 1, p. 195-209, 2003.
3. MA, Shiwang; WANG, Zhicheng; YU, Jianshe. Coincidence degree and periodic solutions of Duffing equations. **Nonlinear Analysis TMA**, v. 34, n. 3, p. 443-460, 1998.
4. GUI, Zhanji; GE, Weigao. A priori bounds for periodic solutions of a kind of third-order delay differential equation. **Applied Mathematics-A Journal of Chinese Universities**, v. 20, n. 1, p. 59-63, 2005.
5. GAINES, Robert E.; MAWHIN, Jean. L. **Coincidence degree and nonlinear differential equations**. Berlin: Springer-Verlag, 1977.