Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 8, dez. 2016
Edição Iniciação
Científica

Glaucia Maria Bressan
Universidade Tecnológica
Federal do Paraná.
Departamento de Matemática.
Câmpus Cornélio Procópio, PR
glauciabressan@utfpr.edu.br

Eduardo Oliveira Belinelli
Universidade Tecnológica
Federal do Paraná.
Departamento de Matemática.
Câmpus Cornélio Procópio, PR
edubelinelli@hotmail.com

Modelagem e solução de problemas de corte e empacotamento por meio da programação linear

Modeling and solution of cutting and packing problems using linear programming

Resumo

Muitas indústrias que trabalham com processos de corte e empacotamento podem gerar sobras indesejáveis de materiais que muitas vezes não podem ser reaproveitadas. O estudo de problemas por meio da modelagem matemática e da Programação Linear permite estabelecer padrões de corte e de empacotamento que resultem na perda ou no custo mínimo. Neste contexto, este trabalho tem o objetivo de estudar a modelagem matemática dos problemas de corte e de empacotamento, por meio da Programação Linear, aplicados em duas fábricas distintas. O primeiro estudo minimiza a perda de alimento durante o processo de empacotamento de amendoins de uma fábrica do município de Nova Fátima-PR, por meio da aplicação do Problema de Empacotamento. O segundo estudo minimiza a perda de matéria-prima durante o processo de corte e acabamento de papéis, por meio da aplicação do Problema do Corte, numa gráfica do município de Ibatí-PR. Os resultados foram obtidos por meio da aplicação do Método Simplex com apoio computacional.

Palavras-chave: Programação Linear. Método Simplex. Problema do Corte. Problema de Empacotamento.

Abstract

Many industries that work with cutting and packing processes can generate undesirable waste materials that often cannot be reused. The study of problems using mathematical modeling and Linear Programming allows us to establish cutting and packaging standards that result in minimum loss or minimum cost. In this context, the goal of this paper is to study the mathematical modeling of cutting and packaging problems, using Linear Programming and to apply its in two distinct companies. The first study minimizes loss of product during the process of packaging of peanuts from a factory in the Nova Fátima-PR city, by applying the packaging problem. The second study minimizes the loss of raw material during the paper cutting process, by applying the cutting problem from a printing company located in Ibatí-PR city. The results were obtained using the Simplex Method with computational support.

Keywords: Linear Programming. Simplex Method. Cutting Problem. Packing Problem.

1 Introdução

A Pesquisa Operacional (PO) é uma poderosa ferramenta na criação de métodos para a tomada de decisões, mediante a modelagem matemática de problemas reais, que busca encontrar soluções ótimas aplicadas à realidade [1]. Embora não haja uma definição formal, a Pesquisa Operacional pode ser definida como uma ciência que agrega métodos matemáticos e estatísticos empregados para auxiliar a tomada de decisões. Esta ciência é aplicada a problemas em que se faz necessário especificar, de forma quantitativa, a condução e a coordenação das operações ou atividades dentro de uma organização. Possui grande utilidade na solução de problemas de otimização, na tomada de decisões e no gerenciamento de sistemas, selecionando as melhores decisões, dentre todas as possíveis [1].

O desenvolvimento desta ciência teve origem durante a Segunda Guerra mundial, mediante a necessidade de alocação de recursos militares e de otimização de recursos escassos. Atualmente, a Pesquisa Operacional é amplamente utilizada no ramo empresarial e em qualquer ramo industrial em que se deseja minimizar os custos ou maximizar os lucros. Os principais modelos de Pesquisa Operacional são denominados Programação Matemática, uma das mais importantes variedades dos modelos quantitativos que apresenta uma grande utilidade na solução (exata) de problemas de otimização. Na Programação Matemática, as técnicas de solução se agrupam em algumas subáreas: Programação Linear, Programação Não Linear e Programação Inteira [2].

A importância dos sistemas de apoio para a tomada de decisão vem crescendo significativamente com o advento das estações de trabalho, que oferecem grande capacidade de cálculo, de armazenamento e de recursos gráficos, disponíveis anteriormente apenas em máquinas caras e de grande porte. Além disso, a interpretação de resultados obtidos e a consequente tomada de decisão se mostram ainda mais relevantes que a manipulação das ferramentas computacionais.

Diante deste cenário, o objetivo deste trabalho é aplicar métodos de Programação Linear para modelagem e solução de problemas reais que podem ser formulados como Problemas de Corte e de Empacotamento [3]. Dois estudos de caso são apresentados: No primeiro estudo, o objetivo é minimizar a perda de alimento (em gramas) durante o processo de empacotamento de amendoins (problema de empacotamento). No segundo estudo, o objetivo é minimizar o desperdício de matéria-prima (em gramas) utilizado por uma gráfica no processo de corte e acabamento de papéis (problema de corte). A principal contribuição deste trabalho é oferecer um processo de otimização para as manufaturas em estudo o qual forneça uma diminuição do desperdício de matéria-prima durante os processos de corte e empacotamento realizados pelas fábricas.

De forma geral, a Programação Linear (PL) estuda formas de resolver problemas de otimização que podem ser expressos por variáveis contínuas que apresentam comportamento linear (equações lineares) [2]. A otimização linear é amplamente aceitável no ramo industrial devido à sua habilidade de modelar problemas reais e apresentar resultados que auxiliam na tomada de decisões [1]. Sua contextualização é amplamente encontrada na literatura. Nos trabalhos [4] e [5] são estudados a aplicação da Programação Linear na redução de custos, planejamento, transporte e controle de produção. O Problema do Corte e Empacotamento é amplamente estudado na literatura. Em [6], por exemplo, os autores consideram o problema de corte de estoque guilhotina bidimensional, decorrente da indústria do corte de placas de madeira. Várias heurísticas são apresentadas, considerando a otimização de duas funções objetivo: a minimização de perdas e a maximização da produtividade do equipamento de corte, que pode ser obtido pelo corte de placas idênticas em paralelo. Um problema unidimensional para a formulação matemática de um Problema de Corte é formulado em [5] e esta modelagem é estendida para problemas com dimensões maiores. Em [7], é feita uma revisão das abordagens propostas na literatura para os problemas de

empacotamento em faixas bi-dimENSIONAL.

Poldi e Arenales (2009) abordam um caso em que existem vários comprimentos de estoque disponíveis em quantidades limitadas. Alguns métodos heurísticos são propostos a fim de obter uma solução inteira e comparada com outras soluções [8]. Os métodos heurísticos são analisados empiricamente por meio da solução de um conjunto de instâncias geradas aleatoriamente e um conjunto de instâncias da literatura.

O problema de corte, quando escrito como um problema de programação inteira, o grande número de variáveis envolvidas geralmente torna a resolução infactível. Para superar esta dificuldade, Gilmore e Gomory (1961) desenvolveram uma técnica para a formulação do problema com programação linear. A técnica permite o cálculo sempre com uma matriz que não tenha mais colunas do que linhas [9].

Na literatura, são encontrados estudos de Problemas de Corte e Empacotamento, que fazem uma abordagem geral de aplicações de problemas de otimização linear em problemas reais. Em [10], por exemplo, é realizado uma abordagem da Formulação Inteira para o Problema de Empacotamento em Faixa 2d com Restrições de Balanceamento e Ordem. Nesse contexto, é estudado um modelo de programação linear inteira para o caso em que itens não podem ser rotacionados, mas devem ser empacotados de forma ortogonal aos lados da faixa. Em [11], é realizado uma abordagem de Problemas de Corte e Empacotamento, que estuda a aplicação de problemas de corte e empacotamento com restrições práticas que representa cenários reais na indústria.

No trabalho de [12] são discutidos modelos matemáticos de problemas de empacotamento bi-dimensionais, algoritmos de aproximação, métodos heurísticos e metaheurísticos e aproximações numéricas. Casos especiais onde itens são empacotados em forma de linhas são discutidos em detalhes.

Dois modelos robustos de programação linear inteira mista são propostos em [13] para o problema de empacotamento de tirar irregulares, com o objetivo de contornar as limitações dos modelos existentes quanto à complexidade dos algoritmos de manipulação geométrica, necessários para as restrições de não sobreposição de peças. Novas instâncias baseadas no mundo real com geometrias mais complexas são propostas e utilizadas para verificar a robustez dos novos modelos.

Este trabalho está organizado da seguinte forma: a Seção 2 apresenta a formulação geral de um Problema de Programação Linear, bem como o algoritmo do Método Simplex. A Seção 3 descreve os fundamentos e a formulação do Problema de Corte e Empacotamento. Em seguida, a Seção 4 apresenta os estudos de casos e seus resultados numéricos obtidos pela aplicação do Método Simplex. Conclusões e considerações finais são apresentadas na Seção 5.

2 Problema de Programação Linear (PPL)

A abordagem de resolução de um problema por meio da Programação Linear (PPL) envolve a execução de alguns passos. Primeiramente, é necessário definir o problema, ou seja, o que se deseja maximizar ou minimizar. Em seguida, o problema é formulado matematicamente como um PPL. Depois disso, algum método de resolução deve ser aplicado para solucionar o problema em estudo. Por fim, deve-se validar a solução, ou seja, verificar se o modelo proposto representa o comportamento real da situação [2].

Na formulação geral de um PPL, se existem n decisões a serem tomadas, é associada uma variável a cada um dos valores quantitativos do problema e esta variável é chamada de *variável de decisão*. Desta forma, as variáveis de decisões são representadas por x_i com $i = 1, 2, \dots, n$ e, ao aplicar um método de solução o valor dessas variáveis são determinados. O objetivo principal do problema é aquilo que se pretende maximizar (lucros, receitas, vendas) ou minimizar (custos, perdas, recursos). Uma função numérica das variáveis de decisão, chamada de *função objetivo*, é então estruturada para representá-lo. Deve-se também analisar quais são as limitações impostas ao problema. Tais limitações devem ser expressas matematicamente por meio de equações e/ou inequações lineares, chamadas de *restrições* do problema. Inerente aos problemas de Programação Linear, está a condição de que todas as variáveis de decisão pertencem ao primeiro quadrante, ou seja, são maiores ou iguais a zero: $x \geq 0$. Esta é chamada de *condição de não-negatividade* [2].

Assim, para a formulação de um PPL, deve-se expressar a função objetivo (FO), o conjunto de restrições e as condições de não-negatividade, conforme as Equações (1) a (3).

$$\min \quad \text{ou} \quad \max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

sujeito a

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & \quad [sinal] \quad b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & \quad [sinal] \quad b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n & \quad [sinal] \quad b_3 \\ (...) & \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n & \quad [sinal] \quad b_m \\ x_1, x_2, x_3, \dots, x_n & \geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Em que,

- i. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as variáveis de decisão;
- ii. $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ são os coeficientes (números reais) da função objetivo;
- iii. $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ são as constantes (números reais) de cada uma das restrições;
- iv. a_{ij} são os coeficientes (números reais) das restrições;
- v. o símbolo [sinal] indica que a restrição pode ser uma equação ou uma inequação.

A equação (1) representa a função objetivo; as equações (2) representam o conjunto das restrições e a equação (3) representa a condição de não-negatividade.

2.1 O Método Simplex

O Método Simplex é um algoritmo que se utiliza de uma ferramenta baseada na Álgebra Linear para determinar, por um método iterativo, a solução que minimiza ou maximiza a função objetivo (1) de um Problema de Programação Linear (PPL) [14]. Esta solução é chamada de *solução ótima*. O Método Simplex foi o primeiro método efetivo desenvolvido para resolver um problema de Programação Linear e sua aplicação fundamenta-se no Teorema Fundamental da PL.

Teorema Fundamental da Programação Linear: Se o Problema de Programação Linear admitir solução ótima, esta poderá ser encontrada em pelo menos um ponto extremo de seu conjunto viável.

A demonstração deste teorema pode ser vista em [15].

Em linhas gerais, o Método Simplex é um método numérico de auxílio à tomada de decisões que, a partir de uma solução inicial (pertencente a um vértice do sistema de equações que constituem as restrições do problema), busca novas soluções viáveis (novos vértices) de valor igual ou melhor que a solução corrente, até que a solução ótima seja encontrada, se esta existir. Mais detalhes sobre o Método Simplex podem ser consultados em [2, 3, 14].

Considere o problema primal de otimização linear na forma padrão como a seguir [2]:

$$\begin{aligned}\min f(x) &= c^T x \\ \text{s.a: } Ax &= b \\ x &\geq 0\end{aligned}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e, sem perda de generalidade, assuma que $\text{posto}(A) = m$

A solução geral do sistema em $Ax = b$ pode ser descrita considerando uma partição nas colunas de A :

$$A = (B, N)$$

tal que $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$, formada por m colunas da matriz A , seja não singular. Desta forma, a matriz B é constituída pelas colunas básicas de A e a matriz N pelas colunas não básicas. A partição equivalente é feita no vetor das variáveis:

$$x = (x_B, x_N),$$

onde x_B é chamado *vetor de variáveis básicas* e x_N *vetor de variáveis não básicas*. Assim,

$$\begin{aligned}Ax = b &\Leftrightarrow Bx_B + Nx_N = b \Leftrightarrow \\ x_B &= B^{-1}b - B^{-1}Nx_N.\end{aligned}$$

Dada uma escolha qualquer para x_N , tem-se x_B bem determinado, de modo que o sistema está verificado.

Definição 1 A solução particular x obtida por $x_B^0 = B^{-1}b, x_N^0 = 0$ é chamada *solução básica*. Se $x_B^0 = B^{-1}b \geq 0$, então a solução básica é *primal factível*.

Considere também a partição nos coeficientes do gradiente da função objetivo c :

$$c^T = (c_B, c_N)^T.$$

Definição 2 O vetor $y \in \mathbb{R}^m$, dado por

$$y^T = c_B^T B^{-1}$$

é definido como *vetor das variáveis duais* ou *vetor multiplicador simplex*. Se

$$c_j - y^T a_j \geq 0,$$

para $j = 1, \dots, n$ então y é uma solução básica dual factível, e diz-se que a partição é dual factível, onde a_j representa a coluna j da matriz de restrições A .

Definição 3 Denomina-se estratégia simplex a seguinte perturbação da solução básica: escolha $k \in N$, onde N é o conjunto de índices de variáveis não básicas, tal que $c_k - y^T a_k < 0$; faça $x_k = \varepsilon \geq 0$, $x_j = 0, \forall j \in N - k$.

A estratégia simplex produz uma nova solução dada por

$$\begin{cases} x_B = x_B^0 + \varepsilon d_B \\ x_N = \varepsilon e_k \end{cases}$$

e o valor da função objetivo dado por:

$$f(x) = f(x^0) + (c_k - y^T a_k) \varepsilon$$

onde $d_B = -B^{-1} a_k$ e $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{m-n}$ com 1 na k -ésima componente.

A direção $d \in \mathbb{R}^n$, dada por $d = (d_B, d_N)^T = (d_B, e_k)^T$, define uma perturbação da solução básica e é chamada *direção simplex*. Se a solução básica for não-degenerada, isto é, $x_B^0 > 0$, então d é uma direção factível. Note ainda que o produto escalar entre d e o gradiente da função objetivo é $c^T d = c_k - y^T a_k < 0$. Portanto d é uma direção de descida.

Da estratégia simplex, pode-se determinar o maior valor de ε , impondo $x_B \geq 0$:

$$\varepsilon^0 = \min \left\{ -\frac{x_{B_e}^0}{d_{B_e}} \mid d_{B_e} < 0, i = 1, \dots, m \right\}$$

onde $x_{B_e}^0$ é a e -ésima componente de x_B^0 , que sai da base.

Em suma, o Método Simplex basicamente vai experimentar uma sequência de soluções básicas viáveis, na busca do valor ótimo para a função objetivo.

2.2 O Algoritmo Primal Simplex

O algoritmo do Método Primal Simplex é descrito a seguir, para um problema de minimização escrito na forma padrão.

fase I

Encontre uma partição básica primal-factível: $A = (B, N)$.

Faça PARE=FALSO, IT=0

(Será FALSO até que a condição de otimalidade seja verificada. IT indica o número da iteração.)

fase II

Enquanto NÃO PARE faça:

- Determine a solução básica primal factível: $x_B = B^{-1}b$.
- Teste de otimalidade:
Determine a solução básica dual: $y^T = c_B^T B^{-1}$;
Encontre x_k com custo relativo: $c_k - y^T a_k < 0$.
Se $c_k - y^T a_k \geq 0, \forall k = 1, \dots, n - m$, então a solução na iteração IT é ótima.

PARE=VERDADE.

Senão:

- Determine a direção simplex: $d_B = -B^{-1}a_k$, de mudança nos valores das variáveis básicas
- Determine o passo: $\varepsilon^0 = \min \left\{ -\frac{x_{B_e}^0}{d_{B_e}} \mid d_{B_e} < 0, i = 1, \dots, m \right\}$.

Se $d_B \geq 0$, o problema não tem solução ótima finita.

PARE=VERDADE.

Senão:

- Atualize a partição básica: $a_{B_l} \leftrightarrow a_k, IT \leftarrow IT + 1$.

Fim enquanto.

O Método Simplex, por se tratar de um processo iterativo, pode ser implementado em qualquer linguagem de programação para execução de suas iterações.

3 Problema do Corte e Empacotamento

No processo de manufatura de algumas empresas, muitas vezes se faz necessário cortar peças maiores em itens menores de tamanhos variados para que seja possível atender toda a demanda [3]. Nesse processo de corte, são geradas sobras de materiais que, muitas vezes, não podem ser reaproveitadas. Desta forma, o *Problema do Corte* consiste em escolher padrões de corte de materiais, como rolos de papel, chapas metálicas, etc., de modo a atender a demanda, utilizando a menor quantidade de material ou resultando na menor perda possível [16]. O Problema do Corte pode ser considerado *unidimensional* em que, por exemplo, barras metálicas, barras de aço e bobinas de papel são cortados apenas em uma dimensão, ou *bidimensional* em que placas de madeira, tecido e chapas de aço são cortadas em duas dimensões, ou *tridimensional*, em que blocos de espumas, por exemplo, para a produção de colchões, travesseiros e empacotamento de produtos são cortados em três dimensões [3].

Analogamente, podemos definir o *Problema de Empacotamento*. No processo de manufatura de algumas empresas, o Problema de Empacotamento pode ser definido como o caso em que itens (peças menores) devem ser alocados em objetos (peças maiores), de tamanhos variados, para atender as solicitações de clientes, de modo que a perda de itens seja minimizada [3]. Analogamente, o Problema de Empacotamento consiste na escolha de padrões de empacotamentos de modo que seja atendida a demanda, resultando na menor perda de material possível [4]. Este tipo de problema pode ser formulado por meio da Programação Linear [3] e é amplamente estudado na literatura.

Em um problema unidimensional, deseja-se cortar barras disponíveis de um tamanho padronizado L para a produção de m tipos de itens, com tamanhos $l_1, l_2, \dots, l_m$, em quantidades variadas $b_1, b_2, \dots, b_m$, respectivamente [3]; isto é, deve ser produzida a quantidade b_i da peça de comprimento l_i . Vários padrões de corte distintos podem ser determinados. Um vetor $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^T$ representa um padrão de corte unidimensional se, e somente se, o sistema (4) é satisfeito.

$$l_1 a_1 + l_2 a_2 + \dots + l_m a_m \leq L \quad (4)$$

$$a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, \dots, a_m \geq 0 \text{ e inteiros}$$

Suponha que existam n padrões de corte, ou seja, n soluções possíveis para o sistema. Uma vez definidos os padrões, o problema consiste em determinar quantas barras devem ser cortadas de acordo com cada padrão, de modo que a demanda de cada item seja atendida, utilizando-se o menor número possível de barras [3]. Define-se a variável x_j como o número de barras cortadas conforme o padrão de corte j . O problema de corte pode então ser formulado como nas equações (5).

$$\begin{aligned} & \text{Min } x_1 + x_2 + \dots + x_n \text{ (função objetivo)} \\ & \text{sujeito a} \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{aligned} \quad (5)$$

Como as variáveis deste modelo representam o número de barras a serem cortadas, devem ser necessariamente inteiras. Na prática, esta condição dificulta a resolução do modelo. Desta forma, suponha que a demanda b_i seja dada em uma unidade de peso. Desta forma, de acordo com [3], pode ser feita uma mudança de variável, em que y_j denota a quantidade (peso) cortada conforme o padrão de corte j , obtendo-se um modelo equivalente conforme as equações (6) e (7).

$$\begin{aligned} & \text{Min } y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n \text{ (função objetivo)} \\ & \text{sujeito a} \\ & (l_1/L)a_{11}y_1 + (l_1/L)a_{12}y_2 + \dots + (l_1/L)a_{1n}y_n = b_1 \\ & (l_2/L)a_{21}y_1 + (l_2/L)a_{22}y_2 + \dots + (l_2/L)a_{2n}y_n = b_2 \\ & \vdots \\ & (l_m/L)a_{m1}y_1 + (l_m/L)a_{m2}y_2 + \dots + (l_m/L)a_{mn}y_n = b_m \end{aligned} \quad (6) \quad (7)$$

onde $y_j \geq 0$ significa a quantidade (em uma unidade de peso) de material que deve ser cortada no padrão j .

4 Estudo de Casos

Esta seção apresenta a formulação matemática de dois problemas reais por meio da Programação Linear, que minimizem a quantidade de perda de materiais utilizados durante o processo de manufatura de algumas indústrias. O objetivo do primeiro estudo é formular um problema de Programação Linear que minimize a perda do produto durante o processo de empacotamento de amendoins de uma fábrica do município de Nova Fátima-PR. No segundo estudo, o objetivo é minimizar o desperdício de material (em gramas) utilizado por uma gráfica de papel do município de Ibití-PR, durante o processo de corte e acabamento de papéis. Os estudos são fundamentados no Problema de Corte e Empacotamento conforme descritos na Seção 3.

4.1 Aplicação da Programação Linear em uma Fábrica de Empacotamentos de Amendoim

O objetivo deste estudo é formular um Problema de Programação Linear (PPL) que minimize a perda do alimento (amendoim) durante o processo de empacotamento de amendoins de uma fábrica do município de Nova Fátima-PR, por meio da aplicação do Problema de Empacotamento.

Para este proposto problema de empacotamento de amendoins, a solução ótima é obtida pela aplicação do Método Simplex [7] com apoio computacional. A fábrica em estudo empacota amendoins em dois diferentes tipos de embalagens: A (60 g) e B (140 g), sendo que a fábrica dispõe de 1000 embalagens tipo A e 1000 embalagens tipo B. Para empacotar os amendoins nessas embalagens, são adquiridos 60.000g de amendoins, comprados a granel. Os padrões de empacotamento são pré-estabelecidos de acordo com os equipamentos e mão-de-obra disponíveis. O problema consiste em decidir quantas vezes cada padrão de empacotamento deve ser executado (variáveis de decisão) de forma que a perda de produto (amendoim) seja a mínima possível (função objetivo) e a demanda seja atendida. A demanda consiste nos pedidos de 3 locais para onde os produtos, após o processo de empacotamento nas embalagens A e B, serão distribuídos. Um dos locais solicita 12kg de amendoins empacotados e os demais solicitam, respectivamente, 18kg e 30kg. A Tabela 1 apresenta essas demandas (tipos de pedidos) e os possíveis padrões de empacotamento de amendoins, juntamente com a perda de amendoim em cada padrão definido. As unidades foram convertidas para gramas. As variáveis de decisão $x_i; i = 1, \dots, 9$ representam os padrões de empacotamento pré-estabelecidos de acordo com o equipamento e mão-de-obra da fábrica.

Tabela 1: Possíveis padrões de empacotamento.

Tipos de pedidos	1000 embalagens tipo A				1000 embalagens tipo B				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
1. 12000g	1	2	2	0	2	5	3	1	1
2. 18000g	1	0	2	0	3	1	4	0	5
3. 30000g	1	1	0	2	2	2	1	4	1
PERDA (g)	0	6000	0	0	2000	2000	2000	8000	8000

A formulação matemática do problema de minimização das perdas de produto é descrito conforme as equações (8), como um problema de programação linear. O objetivo é minimizar as perdas de alimento no processo de empacotamento e satisfazer a demanda dos tipos de pedidos. Alguns limitantes foram incluídos devido ao arranjo de padrões que devem ser executados na prática em virtude dos equipamentos e mão-de-obra disponíveis. O sinal $\geq$ nas restrições garante que as demandas dos pedidos serão atendidas.

$$\min 6000x_2 + 2000x_5 + 2000x_6 + 2000x_7 + 8000x_8 + 8000x_9$$

Sujeito a :

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_5 + 5x_6 + 3x_7 + x_8 + x_9 \geq 12000$$

$$x_1 + 2x_3 + 3x_5 + x_6 + 4x_7 + 5x_9 \geq 18000$$

$$x_1 + x_2 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 + 4x_8 + x_9 \geq 30000 \quad (8)$$

$$x_5 > 1000, x_6 > 1000, x_7 > 1000, x_8 > 0$$

$$x_3 > 1000, x_4 > 1000, x_1 > 1000, x_9 > 1000, x_4 > 1000$$

A solução ótima é obtida pela aplicação do Método Simplex, com 12 iterações, com apoio do software LINDO (www.lindo.com). A solução aponta o desperdício mínimo de 14.000kg de produto e as variáveis de decisão são o número de execuções de cada padrão de empacotamento: $x_5 = x_6 = x_7 = x_9 = 1000, x_1 = 4000, x_3 = 1000, x_4 = 10000, x_2 = x_8 = 0$. Esta solução foi comparada com a execução tradicional dos padrões, conforme é feita atualmente, ou seja, para que a demanda seja satisfeita, todos os padrões devem ser executados, no total, pelo menos 10000 vezes. Desta forma, cada padrão é executado, em média, 1.111 vezes. Desta forma, a perda total será de 31.108kg. Conclui-se então, que o modelo proposto neste trabalho reduz o desperdício em 17.108kg, ou seja, quase 55%.

Portanto, a aplicação do Problema de Empacotamento é eficaz para minimizar a perda na quantidade de amendoins, uma vez que reduz o desperdício, satisfazendo a demanda.

4.2 Aplicação da Programação Linear em uma Gráfica

O objetivo deste estudo é formular um Problema de Programação Linear (PPL) que minimize a perda do produto durante o corte e acabamento de papéis de uma gráfica do município de Ibatí-PR, por meio da aplicação do Problema do Corte.

O Problema do Corte proposto neste trabalho pode ser definido como o caso em que uma gráfica de papel utiliza folhas de resmas de um tamanho padrão L , para cortá-la em unidades menores de tamanhos e quantidades variadas para atender uma demanda. A gráfica em estudo, corta 5 tipos de papéis das folhas de resma compradas pela gráfica em pacotes de 500 folhas.

Os 5 tipos de papéis cortados pela gráfica são apresentados na Tabela 2 juntamente com o tamanho de cada corte feito na folha de resma e a demanda.

No entanto, durante esse processo de corte feito pela gráfica, são geradas sobras de papéis que muitas vezes não podem ser cortadas novamente para atender outra demanda. Desta forma, definimos um Problema de Programação Linear que minimize o desperdício de papéis gerados durante o processo de corte.

A formulação matemática deste problema pode ser feita em um problema bidimensional [3] em que deseja-se cortar folhas de resmas de um tamanho padronizado $L \times W$, para a produção

de m tipos de itens (unidades menores de papéis) com tamanhos $l_1 \times w_1, l_2 \times w_2, \dots, l_m \times w_m$

Tabela 2: Dados para um Problema de Corte

Tipos de papel	Tamanho do Corte	Demanda
Comum 1	26cm por 18cm	5mil
Copiativo 1	21cm por 14,5cm	40 blocos
Copiativo 2	22cm por 15cm	5 blocos
Adesivo 1	21,5cm por 20cm	6 mil
Adesivo 2	20cm por 19cm	24 mil

em quantidades variadas $b_1, b_2, \dots, b_m$. Ou seja, deve ser produzida a quantidade b_i da peça de tamanho $l_i \times w_i$ para que seja atendida a demanda [4]. Para este estudo a solução ótima é obtida por meio da aplicação do Método Simplex com apoio computacional.

O tamanho padrão $L \times W$ é o tamanho de uma folha de resma utilizado pela gráfica ($66cm \times 96cm$). Todas as variáveis e parâmetros do problema foram convertidos para gramas. Isto é, multiplica-se o tamanho de uma folha de resma (largura x altura) pelo peso (250g) e pelas 500 folhas de resma. Ou seja, $96 \times 66 \times 250 \times 500 = 79,2Kg$. Como um pacote de resma tem 500 folhas podemos obter o peso (em gramas) de uma folha. Divide-se o peso da resma pela quantidade de folhas: $79,2/500 = 158g$. Cada folha de resma possui 158g. O mesmo procedimento é aplicado para encontrar o peso de cada quantidade de papel cortada pela gráfica. Dessa forma, multiplica-se o tamanho de cada papel cortado pelo peso e pela quantidade de folhas de resma. Com isso, encontramos o valor em quilos de cada papel. Em seguida, divide-se pela demanda, encontrando o peso de gramas de cada unidade cortada. A Tabela 3 apresenta o valor de cada demanda em gramas.

Tabela 3: Dados para um Problema de Corte

Tipos de papel	Demanda	Peso/Demanda
Comum 1	5000	790000g
Copiativo 1	4000	632000g
Copiativo 2	4000	632000g
Adesivo 1	6000	948000g
Adesivo 2	24000	3792000g

O problema consiste em decidir quantas vezes cada padrão de corte deve ser executado de forma que a demanda seja atendida e a perda do produto seja minimizada.

A Tabela 4 apresenta os possíveis e pré-estabelecidos padrões de corte de papéis juntamente com a perda (em gramas) de cada padrão definido. As variáveis de decisão y_j ; $j = 1, \dots, 10$ representam os padrões estabelecidos de acordo com a matéria-prima disponível e a demanda da gráfica.

A formulação matemática do problema que minimiza a perda de papéis é descrita conforme as equações (8) como um Problema de Programação Linear. O objetivo é minimizar o desperdício de papéis utilizados durante o processo de corte feita pela gráfica. O sinal de $\geq$ nas restrições garante que as demandas dos tipos de papel serão atendidas.

Tabela 4: Possíveis Padrões de Corte

Demanda	Padrões de Corte									
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
1. 790000g	4	2	0	4	0	5	3	3	4	4
2. 632000g	2	2	5	2	3	0	1	0	1	3
3. 632000g	3	2	4	1	2	0	3	2	0	2
4. 948000g	4	3	1	3	4	4	2	4	2	1
5. 3792000g	2	1	0	2	2	1	3	1	5	4
PERDA (g)	0,002	0,006	0,075	0,035	0,056	0,045	0,041	0,053	0,035	0,026

$$\min 0,002y_1 + 0,006y_2 + 0,075y_3 + 0,035y_4 + 0,056y_5 + \dots$$

$$\dots + 0,045y_6 + 0,041y_7 + 0,053y_8 + 0,035y_9 + 0,026y_{10}$$

Sujeito a :

$$4y_1 + 2y_2 + 4y_4 + 5y_6 + 3y_7 + 3y_8 + 4y_9 + 4y_{10} \geq 790000$$

$$2y_1 + 2y_2 + 5y_3 + 2y_4 + 3y_5 + y_7 + y_9 + 3y_{10} \geq 632000$$

$$3y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4 + 2y_5 + 3y_7 + 2y_8 + 2y_{10} \geq 632000 \quad (9)$$

$$4y_1 + 3y_2 + y_3 + 3y_4 + 4y_5 + 4y_6 + 2y_7 + 4y_8 + 2y_9 + y_{10} \geq 948000$$

$$2y_1 + y_2 + 2y_4 + 2y_5 + y_6 + 3y_7 + y_8 + 5y_9 + 4y_{10} \geq 3792000$$

$$y_1 < 900000, y_2 < 800000, y_3 > 500, y_4 > 900, y_5 > 600, y_6 > 800, y_7 > 800, y_9 > 900, y_{10} > 10000$$

A solução ótima é obtida pela aplicação do Método Simplex, com 16 iterações, com apoio do software LINDO (www.lindo.com). A solução aponta o desperdício mínimo de 14.526,90g de papel e as variáveis de decisão são o número de execuções de cada padrão de corte. Ou seja, $y_1 = 900000, y_2 = 800000, y_3 = 500, y_4 = 900, y_5 = 600, y_6 = 800, y_7 = 800, y_8 = 700, y_9 = 900, y_{10} = 296275$. Esta solução foi comparada com a execução tradicional dos padrões de corte feitos pela gráfica. Desta forma, a perda total de papel em situações práticas da gráfica, para satisfazer esta demanda, é de 24.648,00g. Portanto, o modelo proposto neste trabalho reduz o desperdício em 41,07%. Desta forma, pode ser concluído que a aplicação do Problema do Corte é eficaz para minimizar a perda da quantidade de papéis, uma vez que reduz o desperdício e satisfaz a demanda.

5 Conclusão

Este trabalho teve por objetivo apresentar a modelagem dos Problemas de Corte e Empacotamento em situações reais e aplicar o método Simplex para obter a solução para estes problemas de otimização linear, em que deseja-se minimizar o custo de empacotamento de produtos e o desperdício de material no processo de corte, procedimentos estes utilizados por indústrias de pequeno porte durante o processo de manufatura de seus produtos e serviços.

Esta abordagem é feita em indústrias que utilizam processos de corte e empacotamento de seus produtos sem a aplicação de um método de otimização, gerando custos e perdas indesejáveis de materiais que, muitas vezes, não podem ser utilizados novamente para atender a uma outra demanda.

Desta forma, por meio dos resultados obtidos neste trabalho, verifica-se que a aplicação dos métodos de otimização dos Problemas de Corte e Empacotamento foi eficaz para a redução do custo e do desperdício de materiais. Estes resultados corroboram com outros resultados encontrados na literatura a respeito da efetividade na minimização de funções por meio da aplicação do Método Simplex.

Minimizando o custo no processo de empacotamento, bem como minimizando o desperdício de papel no processo de corte, os resultados obtidos neste trabalho contribuem para a redução do descarte de dejetos e para o impacto ambiental, apresentando assim uma contribuição positiva para o meio ambiente.

Referências

- [1] SILVA, W. B.; **Pesquisa Operacional: visão geral**. João Pessoa: Administradores - o portal da Administração, 2011. Disponível em: <http://www.administradores.com.br/artigos/tecnologia/pesquisa-operacional-visao-geral/57475/>. Acesso em: 29 nov. 2016.
- [2] BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. **Linear programming and network flows**. 4. ed. Hoboken: John Wiley, 2010.
- [3] ARENALES, M. N. et al. **Pesquisa operacional para cursos de engenharia**. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora Campus, 2015.
- [4] ROCHA NETO, A.; DEIMLING, M. F.; TOSATI, M. C. Aplicação da programação linear no planejamento e controle de produção: definição do mix de produção de uma indústria de bebidas. In: SIMPÓSIO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, 14., 2007, Bauru. **Anais...** Bauru: Unesp, 2007.
- [5] FERREIRA, F. M.; BACHEGA, S. J. Programação Linear: um estudo de caso sobre os custos de transporte em uma empresa do setor de confecções de Catalão-GO. In: ENCONTRO NACIONAL DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO (ENEGEP), 31., 2011, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte, 2011.
- [6] MALAGUTI, E.; MEDINA DURAN, R.; TOTH, P. Approaches to real world two-dimensional cutting problems. **Omega**, v. 47, p. 99-115, 2014.

- [7] RIFF, M. C.; BONNAIRE, X.; NEVEU, B. A revision of recent approaches for two-dimensional strip-packing problems. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 22, n. 4-5, p. 823-827, 2009.
- [8] POLDI, K. C.; ARENALES, M. N. Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths. **Computers and Operations Research**, v. 36, n. 6, p. 2074-2081, 2009.
- [9] GILMORE, P. C.; GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. **Operations Research**, v. 9, n. 6, p. 849-859, 1961.
- [10] QUEIROZ, T. A. de; MIYAZAWA, F. K. Formulação inteira para o problema de empacotamento em faixa 2D com restrições de balanceamento e ordem. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 43., 2011, Ubatuba, **Anais...** Ubatuba, 2011.
- [11] ALVAREZ MARTINEZ, D. **Estudo dos problemas de corte e empacotamento**. 2014. 161 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Ilha Solteira, 2014.
- [12] LODI, A.; MARTELLO, S.; MONACI, M. Two-dimensional packing problems: a survey. **European Journal of Operational Research**, v. 141, n. 2, p. 241-252, 2002.
- [13] CHERRI, L. H.; et al. Robust mixed-integer linear programming models for the irregular strip packing problem. **European Journal of Operational Research**, v. 253, n. 3, p. 570-583, 2016.
- [14] GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear**. 2. ed., rev. atual. Rio de Janeiro: Elsevier, 2005.
- [15] CAMARGO, R. S. S. **Introdução à programação linear no ensino médio utilizando a resolução gráfica**. 2014. 44 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal do Amazonas, Manaus, 2014.
- [16] LINS, M. P. E.; CALOBA, G. M. **Programação linear: com aplicações em teoria dos jogos e avaliação do desempenho**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.