Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 8, dez. 2016
Edição Iniciação
Científica

Fabiano Borges da Silva
Faculdade de Ciências,
UNESP, Bauru/SP.
fabiano@fc.unesp.br

Isabela Silva Rota
Faculdade de Engenharia,
UNESP, Bauru/SP.
ra142012785@feb.unesp.br
Iniciação Científica FAPESP
Processo n. 2015/21044-1

Convergência de matrizes estocásticas regulares

Convergence of regular stochastic matrices

Resumo

Seja T uma matriz estocástica associada a uma Cadeia de Markov finita, isto é, as entradas da matriz representam as probabilidades de transição entre os estados do processo. O presente artigo mostra que se T é regular, então T^n converge para M , quando n tende ao infinito, onde M é uma matriz em que todas as colunas são iguais ao único vetor de probabilidade w que satisfaz a equação $Tw = w$. Além disso, dado um vetor de probabilidade v qualquer, temos que $T^n v$ converge para o vetor w . Geralmente, este resultado é conhecido como uma consequência do Teorema de Perron-Frobenius para operadores positivos. Porém, neste trabalho apresentamos uma demonstração utilizando conceitos básicos de matrizes e sequências de números reais.

Palavras-chave: Matrizes estocásticas. Cadeias de Markov. Convergência. Probabilidade de transição.

Abstract

Let T be a stochastic matrix associated with a finite Markov Chain, i.e. the matrix with entries represent the probabilities transition for the states of the process. This article shows that if T is regular, then T^n converges to M when n tends to infinity, where M is the matrix which all columns are the same as unique probability vector w satisfying the equation $Tw = w$. In addition, given any probability vector v , we have $T^n v$ converges to the vector w . Generally, this result is known as a result of the Perron-Frobenius theorem for positive operators. However, in this paper we present a demonstration using basic concepts of matrices and sequences of real numbers.

Keywords: Stochastic matrices. Markov Chains. Convergence. Transition probability.

1 Introdução

O interesse em convergência de matrizes estocásticas, aparece entre outros, no contexto de Cadeias de Markov finita, o qual é um caso especial de processo estocástico. Mais precisamente, considere um espaço de estados com um número finito de elementos $E = \{e_1, \dots, e_r\}$. Um processo estocástico discreto $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, é uma Cadeia de Markov se a probabilidade condicional satisfizer

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n), \quad (1)$$

para todo $n \geq 1$ e para toda sequência $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ de elementos do espaço de estados E . Essa condição (1) significa, em linguagem natural, que o futuro do processo, uma vez conhecido o estado presente, é independente do passado. Esta definição também pode ser estendida para um conjunto enumerável E .

As probabilidades condicionais

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = e_i | X_n = e_j)$$

são chamadas probabilidades de transição. E se para cada i, j

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = e_i | X_n = e_j) = \mathbb{P}(X_1 = e_i | X_0 = e_j),$$

para todo natural n , a Cadeia de Markov é dita homogênea e as probabilidades de transição são denotadas por p_{ij} .

Intuitivamente, pensando em um modelo de uma partícula que salta em tempos discretos entre os estados, atribui-se a cada estado e_j uma probabilidade da partícula, estando em e_j , de saltar para o e_i . E no caso homogêneo, essa probabilidade não se altera com o tempo.

Um processo de Markov está completamente definido a partir do momento em que se especifica as probabilidades de transição e a distribuição inicial dos estados (ver por exemplo [2, 3]). Ao processo associa-se uma matriz de probabilidades de transição T , chamada em geral por matriz estocástica ou simplesmente de transição, em que as entradas da matriz são dadas pelas probabilidades de transição p_{ij} . Ou seja,

$$T = [p_{ij}]_{r \times r},$$

onde $p_{ij} \geq 0$ e a soma das entradas de cada coluna é igual a 1.

As entradas da matriz T^n correspondem à probabilidade de, saindo do estado e_j , chegar-se ao estado e_i depois de n passos, como pode ser visto, entre outros, em [2, 3]. Desta maneira, dada uma distribuição inicial, representada matricialmente pelo vetor de probabilidade

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{bmatrix},$$

a distribuição do processo no tempo $n \geq 1$ é dada por

$$T^n \cdot v.$$

Uma questão interessante nas aplicações modeladas por Cadeias de Markov, é saber o que acontece com o vetor $T^n(v)$ quando n tende ao infinito. Mostraremos que, se T é regular, isto é, em alguma potência $N \geq 1$, todas as entradas de (T^N) são elementos não-nulos, então T^n aproxima-se de uma matriz M quando n tende ao infinito, onde a matriz estocástica M é tal que todas as suas colunas são iguais w , sendo w o único vetor que satisfaz $Tw = w$. O objetivo principal deste artigo é demonstrar este resultado (Teorema 5), que é enunciado em [1], livro bastante utilizado em cursos de Álgebra Linear, mas que não apresenta uma demonstração por não ser um dos objetivos do livro, conforme menciona os autores do mesmo.

Na literatura, a demonstração do Teorema 5 aparece, em geral, como consequência do Teorema de Perron-Frobenius, onde resultados de teoria espectral são utilizados para sua demonstração. Neste artigo, não seguimos essa direção. Fizemos uma demonstração baseada em técnicas apresentadas por [3], porém com algumas modificações necessárias, uma vez que trabalhamos neste texto com a matriz estocástica agindo à esquerda ($T \cdot v$) (como em [1]), enquanto que em [3] a ação é à direita ($v \cdot T$). Também serviu de apoio para este trabalho algumas ideias apresentadas na demonstração para o caso particular de matrizes estocásticas 2×2 apresentada em [4]. Por fim, é importante ressaltar que a demonstração do Teorema 5, apresentada neste artigo, mesmo sendo geral para matrizes $r \times r$, utiliza resultados básicos de matrizes e convergência de sequências de números reais, tornando um texto bastante acessível para leitores iniciantes em estudos de Cadeias de Markov Finitas ou Álgebra Linear.

2 Matrizes estocásticas regulares

Nesta seção daremos definição de matrizes regulares e um resultado sobre matrizes estocásticas que serão utilizados no Teorema 5.

Definição 1 Dizemos que uma matriz estocástica T é regular se existe natural n tal que T^n tem todas as entradas não nulas.

Por exemplo, vamos verificar se a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,3 \\ 0,7 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

é uma matriz estocástica regular. Fazendo A^2 , obtemos:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0,44 & 0 & 0,40 \\ 0,21 & 0,30 & 0,21 \\ 0,35 & 0,70 & 0,39 \end{bmatrix},$$

logo, em um primeiro momento não podemos afirmar que a matriz A é regular. Continuando o processo, temos que

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0,280 & 0,440 & 0,288 \\ 0,237 & 0,210 & 0,237 \\ 0,483 & 0,350 & 0,475 \end{bmatrix},$$

e, portanto, A é uma matriz estocástica regular.

Contudo, nem toda matriz estocástica é regular. Tomando por exemplo,

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

temos que é estocástica, mas não é regular, pois $T^{2n} = I$ e $T^{2n+1} = T$, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$.

Notemos que no nosso exemplo acima, para a matriz estocástica A obtivemos matrizes A^2 e A^3 também estocásticas. E isto não é um caso particular para a matriz A . Em geral, se T é uma matriz estocástica, então T^n também é estocástica, para todo $n \geq 1$. Isso pode ser verificado com a seguinte proposição.

Proposição 2 *Produto de matrizes estocásticas é estocástica.*

Demonstração. Basta mostrar que se $A = (a_{ij})_{r \times r}$ e $B = (b_{ij})_{r \times r}$ são matrizes estocásticas, então a matriz AB também é estocástica.

Cada entrada ij da matriz AB é dada por

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}.$$

E somando os elementos da j -ésima coluna, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r (AB)_{ij} &= \sum_{i=1}^r \left(\sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj} \right) \\ &= \sum_{k=1}^r \underbrace{\left(\sum_{i=1}^r a_{ik} \right)}_1 b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^r b_{kj} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

3 Convergência para matrizes estocásticas regulares

Nesta seção mostraremos que matrizes estocásticas regulares convergem. Para isso, faremos dois lemas que serão úteis na demonstração desta convergência.

Lema 3 *Seja T uma matriz $r \times r$ tal que todas as entradas são iguais a $\varepsilon = \frac{1}{r}$. Temos então que $T^n = T$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração.

Considere B a matriz com todas as entradas iguais a 1, desta forma temos que $T_{r \times r} = \varepsilon B$

Note que $B^2 = rB$. Logo,

$$\begin{aligned} B^3 &= B.B^2 &= B(rB) \\ &= rB^2 \\ &= r.rB \\ &= r^2B. \end{aligned}$$

E fazendo isso sucessivamente, concluímos que

$$B^n = r^{n-1}B.$$

Portanto, para qualquer $n \geq 1$, temos que:

$$\begin{aligned} T^n &= \varepsilon^n . r^{n-1} B \\ &= \frac{1}{r^n} . r^{n-1} B \\ &= \frac{1}{r} B \\ &= \varepsilon B \\ &= T. \end{aligned}$$

□

Para simplificar, denotaremos de agora em diante por $\max(x)$ a máxima componente do vetor x e $\min(x)$ a menor componente do vetor x . Por exemplo, sendo $x = (\frac{3}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}, \frac{2}{7})$, temos que $\max(x) = \frac{3}{7}$ e $\min(x) = \frac{1}{7}$.

Lema 4 *Seja T uma matriz estocástica $r \times r$ com todas as entradas não-nulas e seja ε o menor valor entre todas as entradas. Seja também x um vetor linha tal que $M_0 = \max(x)$ e $m_0 = \min(x)$. E seja $M_1 = \max(xT)$ e $m_1 = \min(xT)$. Então,*

$$M_1 - m_1 \leq (1 - 2\varepsilon)(M_0 - m_0).$$

Demonstração.

Seja x' o vetor linha obtido de x em que todas as entradas foram substituídas por M_0 com exceção da única entrada m_0 . Ao fazer $x'T$, observa-se que uma entrada α qualquer de T é multiplicada pela mínima componente m_0 do vetor x' e todas as outras entradas são multiplicadas por M_0 . Como as colunas de T somam 1, nos permite representar cada entrada da nova matriz $x'T$ da forma

$$\alpha m_0 + (1 - \alpha)M_0 = M_0 - \alpha(M_0 - m_0).$$

Para cada coluna de T temos um valor de α diferente, porém em todos os casos $\alpha \geq \varepsilon$, e sendo assim

$$M_0 - \alpha(M_0 - m_0) \leq M_0 - \varepsilon(M_0 - m_0).$$

Como $\max(xT) \leq \max(x'T)$, temos

$$M_1 \leq M_0 - \varepsilon(M_0 - m_0).$$

Seja agora x' o vetor linha obtido de x em que todas as entradas foram substituídas por m_0 com exceção da única entrada M_0 .

Novamente, ao fazer $x'T$, observa-se que uma entrada α qualquer de T é multiplicada pela máxima componente M_0 do vetor x' e todas as outras entradas são multiplicadas por m_0 e, portanto, cada entrada da nova matriz $x'T$ é da forma

$$\alpha M_0 + (1 - \alpha)m_0 = m_0 + \alpha(M_0 - m_0).$$

Para o α de cada coluna, temos $\alpha \geq \varepsilon$, e assim

$$m_0 + \alpha(M_0 - m_0) \geq m_0 + \varepsilon(M_0 - m_0).$$

E como $\min(xT) \geq \min(x'T)$, concluímos que

$$m_1 \geq m_0 + \varepsilon(M_0 - m_0),$$

ou ainda,

$$-m_1 \leq -m_0 - \varepsilon(M_0 - m_0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} M_1 - m_1 &\leq M_0 - m_0 - 2\varepsilon(M_0 - m_0) \\ &= (1 - 2\varepsilon)(M_0 - m_0). \end{aligned}$$

□

Teorema 5 Se T é uma matriz estocástica regular $r \times r$ então:

- (i) T^n se aproxima de uma matriz M , no sentido de que cada entrada da matriz T^n aproxima-se da entrada correspondente em M ;
- (ii) Todas as colunas de M são iguais, sendo dadas por um vetor coluna

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix},$$

com $w_i > 0$, para $i = 1, \dots, r$;

(iii) Para qualquer vetor de probabilidades inicial

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_r \end{bmatrix},$$

o vetor de probabilidades $T^n v$ converge para w , quando $n \rightarrow \infty$;

(iv) O vetor w é o único que satisfaz $Tw = w$.

Demonstração.

Prova dos itens (i) e (ii). Dividiremos em duas partes:

Parte A. Vamos supor inicialmente que T é uma matriz com entradas todas não nulas e que $\varepsilon > 0$ seja uma entrada da matriz, cujo valor é menor ou igual que as outras entradas. Particularmente, para a coluna na qual ε pertence, que escrito como vetor linha $[\delta_1, \delta_2, \dots, \varepsilon, \dots, \delta_{r-1}]$ (com ε podendo ocupar qualquer posição e $\delta_i \geq \varepsilon$), temos que

$$0 < r\varepsilon \leq \delta_1 + \delta_2 + \dots + \varepsilon + \dots + \delta_{r-1} = 1.$$

Logo

$$0 < \varepsilon \leq \frac{1}{r}.$$

O caso em que $\varepsilon = \frac{1}{r}$ temos pelo Lema 3 que $T^n \rightarrow T$, e neste caso, $M = T$. Vamos supor daqui em diante que $0 < \varepsilon < \frac{1}{r}$.

Tomemos o vetor $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, ou seja, um vetor com o número 1 na j -ésima posição, e sejam $M_n = \max(e_j T^n)$ e $m_n = \min(e_j T^n)$, para $n = 0, 1, 2, \dots$. Vamos considerar aqui $T^0 = I$ e, portanto, $M_0 = \max(e_j T^0) = \max(e_j) = 1$ e $m_0 = \min(e_j T^0) = \min(e_j) = 0$. Como $M_1 = \max(e_j T)$ e $m_1 = \min(e_j T)$, pelo Lema 4 temos que

$$M_1 - m_1 \leq (1 - 2\varepsilon)(M_0 - m_0).$$

Analogamente, podemos escrever $M_2 = \max((e_j T)T)$ e $m_2 = \min((e_j T)T)$, e aplicando novamente o Lema 4, chegamos a

$$\begin{aligned} M_2 - m_2 &\leq (1 - 2\varepsilon)(M_1 - m_1) \\ &= (1 - 2\varepsilon)(1 - 2\varepsilon)(M_0 - m_0), \end{aligned}$$

ou seja,

$$M_2 - m_2 \leq (1 - 2\varepsilon)^2(M_0 - m_0).$$

Para um n qualquer podemos escrever $M_n = \max((e_j T^{n-1})T)$ e $m_n = \min((e_j T^{n-1})T)$, aplicar o procedimento anteriormente descrito sucessivas vezes e assim obter que

$$M_n - m_n \leq (1 - 2\varepsilon)^n(M_0 - m_0).$$

Como $0 < \varepsilon < \frac{1}{r}$, segue que $0 < (1 - 2\varepsilon) < 1$ e, portanto, $(1 - 2\varepsilon)^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. E ainda, como $M_0 - m_0 = 1$, segue na desigualdade acima que M_n e m_n se aproximam para um limite comum quando $n \rightarrow \infty$, digamos w_j . É claro que $m_n \leq w_j \leq M_n$. Note ainda que $m_1 > 0$, pois m_1 é por definição a menor entrada da j -ésima linha de T , a qual possui entradas não nulas, e $M_1 < 1$, pois se alguma linha de T tiver 1 numa das entradas, teríamos 0 nas demais entradas da coluna, o que não é o caso. E sendo assim, temos que $0 < w_j < 1$.

Portanto, em resumo temos que $e_j T^n$ tende a um vetor em que a maior e a menor componente se aproximam, ou seja, um vetor onde todas as componentes tendem a $w_j > 0$. Logo, a j -ésima linha de M é dada por um vetor de entradas w_j . Assim, as colunas de M são iguais a um vetor

$$w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix}.$$

Como T é uma matriz estocástica, segue pela Proposição 2 que T^n também é estocástica. E, desta forma, a matriz limite M também é estocástica. De fato, em termos das entradas da j -ésima coluna de T^n , obtemos uma sequência em n , digamos

$$\begin{bmatrix} \gamma_{1j}^n \\ \vdots \\ \gamma_{rj}^n \end{bmatrix}$$

tal que $\gamma_{1j}^n + \dots + \gamma_{rj}^n = 1$, para todo $n \geq 1$. E tomando o limite na sequência dada pela soma das entradas da j -ésima coluna temos que

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\gamma_{1j}^n + \dots + \gamma_{rj}^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{1j}^n + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_{rj}^n \\ &= w_1 + \dots + w_r. \end{aligned}$$

Ou seja, M também é uma matriz estocástica.

Parte B. Vamos supor que T é regular e que alguma entrada de T seja zero. Nas mesmas condições do Lema 4, porém para $\varepsilon = 0$, e usando as notações como na Parte A para M_n e m_n , obtemos que

$$M_0 - m_0 \geq M_1 - m_1 \geq M_2 - m_2 \geq \dots$$

Agora, usando o fato que T é regular, temos que existe N tal que T^N é uma matriz estocástica cujas entradas são não nulas. Denotando por ε' o menor valor das entradas de T^N e tomando as mesmas ideias utilizadas na Parte A, temos que $0 < \varepsilon' \leq \frac{1}{r}$. O caso em que $\varepsilon' = \frac{1}{r}$ é resolvido como no Lema 3. Vamos de agora em diante analisar o caso em que $0 < \varepsilon' < \frac{1}{r}$.

Idem a Parte A, também usaremos o vetor $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ com 1 na j -ésima posição. Temos assim que

$$M_{Nk} = \max(e_j (T^N)^k) = \max((e_j T^{Nk-1}) T)$$

e

$$m_{Nk} = \min(e_j (T^N)^k) = \min((e_j T^{Nk-1}) T)$$

para $k \geq 1$. Quando $k = 0$, obtemos $M_{N0} = \max(e_j(T^N)^0) = \max(e_j) = M_0$ e $m_{N0} = \min(e_j(T^N)^0) = \min(e_j) = m_0$. Portanto, analogamente ao que fizemos na Parte A, obtemos que

$$M_{Nk} - m_{Nk} \leq (1 - 2\varepsilon')^k (M_0 - m_0),$$

para $k \geq 0$. Como $0 < \varepsilon' < \frac{1}{r}$ segue que $(1 - 2\varepsilon')^k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ e, portanto, a subsequência $(M_{Nk} - m_{Nk})$ da sequência não crescente $(M_n - m_n)$ tende a 0. Logo a sequência $(M_n - m_n)$ tende a 0 também. E o restante da prova segue como na Parte A.

Prova do item (iii).

Temos que $T^n v$ tende a Mv quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, uma vez que $v_1 + \dots + v_r = 1$, segue que

$$Mv = \begin{bmatrix} w_1 & w_1 & \cdots & w_1 \\ w_2 & w_2 & \cdots & w_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_r & w_r & \cdots & w_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(v_1 + \dots + v_r) \\ w_2(v_1 + \dots + v_r) \\ \vdots \\ w_r(v_1 + \dots + v_r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$T^n v \rightarrow w.$$

Prova do item (iv).

Temos que $T^n T \rightarrow MT$. Por outro lado, $T^{n+1} \rightarrow M$. Logo, pela unicidade do limite, $MT = M$. Analogamente, $TM = M$. E assim temos:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1} & \cdots & p_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_r & \cdots & w_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & \cdots & w_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_r & \cdots & w_r \end{bmatrix}.$$

E desta equação matricial extraímos

$$\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{r1} & \cdots & p_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_r \end{bmatrix}.$$

Ou seja,

$$Tw = w.$$

Vamos agora mostrar a unicidade de w . Suponha que $\tilde{w}$ seja outro vetor de probabilidade com $T\tilde{w} = \tilde{w}$. Logo $T^n \tilde{w} = \tilde{w}$, para todo $n \geq 1$. E assim, $T^n \tilde{w} \rightarrow \tilde{w}$. Mas por (iii) sabemos que $T^n \tilde{w} \rightarrow w$. Logo, pela unicidade do limite, segue que $\tilde{w} = w$. □

Este resultado acima, no contexto de Cadeias de Markov, diz que se a matriz de transição T é regular, então é possível fazer previsões a longo prazo e elas não dependem da distribuição inicial v . O item (iv) nos fornece uma maneira fácil de encontrar o vetor de probabilidades w , que do ponto de vista dinâmico, é um ponto fixo atrator para a aplicação T .

Apenas para ilustrar como este teorema é usado no contexto de Cadeias de Markov, daremos a seguir um exemplo omitindo alguns detalhes formais de processos estocásticos, que são abordados, por exemplo, em [2, 3, 5].

Exemplo 1 *Vamos supor que uma empresa XZ pertencente ao mercado de alimentos industrializados está interessada em fazer um estudo das preferências de seus consumidores. Para isso, notou que quando três produtos A, B e C são ofertados no mercado, inicialmente, 10% dos consumidores compram o produto A, 20% o produto B e 70% preferem o C. No entanto, passado um ano, em 30% das vezes, o consumidor que sempre compra A, opta por comprar B e o restante dos consumidores compram C. Uma vez tendo comprado B, o cliente sempre volta a comprar A. E quando compra C, metade dos clientes permanecem comprando C e 20% deles voltam a comprar A. E este processo se repete a cada ano que passa.*

A longo prazo, como estará a distribuição de preferência do consumidor?

Na questão acima, podemos tomar A, B, C como sendo os estados 1, 2 e 3, ou seja, $E = \{1, 2, 3\}$. Sendo assim, a matriz de probabilidades de transição é dada pelas porcentagens de troca de preferências entre os produtos A, B e C. Portanto, a matriz de transição T para este exemplo acima é a matriz dada em (2), a qual já verificamos ser regular. E o vetor de probabilidades inicial é dado por:

$$v = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,7 \end{bmatrix}.$$

A fim de descobrirmos qual será o vetor de preferências a longo prazo w , podemos usar o item (iv) do Teorema 5, ou seja, resolver a equação matricial

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,3 \\ 0,7 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \\ w_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \\ w_C \end{bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema obtemos que

$$w = \begin{bmatrix} \frac{25}{78} \\ \frac{3}{13} \\ \frac{35}{78} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3205128 \\ 0.230769 \\ 0.4487179 \end{bmatrix}.$$

Isto quer dizer que a longo prazo, teremos aproximadamente 32,1% dos consumidores preferindo o produto A, 23,1% o B e 44,9% preferindo o produto C.

Agora, apenas para ilustrar a convergência $T^n \cdot v \rightarrow w$ no exemplo acima, explicitaremos a seguir alguns resultados para potências da matriz T aplicadas ao vetor de probabilidade inicial v . Em termos da primeira potência temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,3 \\ 0,7 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,34 \\ 0,24 \\ 0,42 \end{bmatrix}.$$

Para a potência 2 por exemplo, obtemos o vetor de probabilidade

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,3 \\ 0,7 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,324 \\ 0,228 \\ 0,448 \end{bmatrix}.$$

Significando que 32,4%, 22,8% e 44,8% dos consumidores preferem os produtos A, B e C, respectivamente, no segundo ano de vendas. E por exemplo, para as potências 5 e 10, obtemos respectivamente que:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,3 \\ 0,7 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,320064 \\ 0,230844 \\ 0,449092 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,3 \\ 0,7 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0,2 \\ 0,7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,32051422624 \\ 0,23076904908 \\ 0,44871672468 \end{bmatrix}.$$

Além disso, podemos também notar que as colunas da matriz T^{10} ,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,3 \\ 0,7 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}^{10} = \begin{bmatrix} 0,3205236024 & 0,3204770800 & 0,3205235000 \\ 0,2307678681 & 0,2307737730 & 0,2307678681 \\ 0,4487085295 & 0,4487491470 & 0,4487086319 \end{bmatrix},$$

possui valores que se aproximam do vetor de probabilidade w como garante o Teorema 5.

Referências

- [1] BOLDRINI, J. L. et al. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.
- [2] BRZEZNIAK, Z.; ZASTAWIAK, T. **Basic stochastic processes: a course through exercises**. London: Springer, 1999.
- [3] KEMENY, J. G.; SNELL, J. L. **Finite Markov chains**. New York: Springer-Verlag, 1960.
- [4] MANOEL, M. R. **Cadeias de Markov: uma abordagem voltada para o ensino médio**. 2016. 69 f. Dissertação (Mestrado Profissional) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2016.
- [5] RUFFINO, P. R. C. **Uma iniciação aos sistemas dinâmicos estocásticos**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.