**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 8, dez. 2016

Rogério César dos Santos
FUP/UnB
rogerc@unb.br

Um estudo probabilístico sobre caminhos em reticulados quadrados

A probabilistic study about paths in square lattices

Resumo

Escolhendo-se aleatoriamente um caminho no plano que parte da origem $(0,0)$ e chega em (N,N) num reticulado quadrado N por N , $N > 0$, cada vértice (x,y) do reticulado possui uma chance $P_N((x,y))$ de ser atravessado – ou visitado – pela trajetória sorteada. Neste artigo, será realizado um estudo sobre a função $P_N((x,y))$, para alguns pontos fixados (x,y) do plano. Para as provas, utilizaremos principalmente os resultados de Santos e Castilho (2013) e também alguns resultados clássicos da análise combinatória. Será verificado que, para certos pontos do plano, a probabilidade P_N aumenta com N , já para outros, P_N diminui. Há pontos ainda para os quais a função P_N não é crescente nem decrescente com N . Os cálculos envolvidos neste artigo podem ser utilizados por professores de matemática dos Ensinos Médio e Superior em suas aulas de análise combinatória e probabilidade.

Palavras-chave: Caminhos no Plano. Probabilidade. Análise Combinatória. Ponto mais visitado. Ensino de Matemática.

Abstract

Choosing randomly a path in the plane, leaving the origin $(0,0)$ and arriving in (N,N) in a square lattice N by N , $N > 0$, each vertex (x,y) of the lattice has a chance $P_N((x,y))$ to be crossed – or visited – by the chosen trajectory. In this paper, a study will be performed on the function $P_N((x,y))$, at some fixed points (x,y) of the plane. For the proofs, we will use mainly the results of Santos and Castilho (2013) and also some classic results of combinatorial analysis. It will be verified that for certain points of the plan, the probability P_N increases with N , while to the other points, P_N decreases. There are still points for which function P_N is not growing neither decreasing with N . The calculations involved in this article can be used by math teachers of teaching middle and upper in their combinatorial analysis and probability classes.

Keywords: Paths in the Plan. Probability. Combinatorial Analysis. Point most visited. Mathematics Teaching.

1 Introdução

Considerando caminhos do plano que saem da origem $(0,0)$ e chegam em (N,N) , caminhos estes formados por passos unitários que são dados unicamente para a direita ou para cima, analisaremos neste artigo como a probabilidade $P_N((x,y))$ de se passar por um ponto fixado (x,y) da grade depende da ordem N do quadrado.

Veremos que, para certos pontos (x,y) do plano, $P_N((x,y))$ é crescente com N , para outros, decrescente, para outros, constante, para outros ainda, crescente em certos intervalos de N e decrescente em outros intervalos de N .

2 Comportamento da função P_N nos pontos $(0,0)$ e (N,N)

Sem quaisquer cálculos, é imediato verificar que $P_N((0,0)) = P_N((N,N)) = 100\% = 1$, pois estes pontos são de passagem obrigatória por qualquer caminho.

Figura 1 – Uma possível rota mostrando que qualquer caminho passa pelos pontos $(0,0)$ e (N,N)
Fonte: figura construída pelo autor no software Winplot

Logo, $P_N((0,0))$ e $P_N((N,N))$ são funções constantes de N .

3 Comportamento da função P_N no ponto $(1,1)$

Calculemos $P_N((1,1))$, inicialmente, de uma maneira lúdica. Imagine uma urna com N bolas azuis e N vermelhas. Cada bola azul sorteada corresponde a um passo para a direita, e cada vermelha um passo para cima. Suponha também que estamos inicialmente parados na origem $(0,0)$.

Desta forma, a chance de se passar pelo ponto $(1,1)$ será a probabilidade de se escolher uma bola azul primeiro – direita – e depois uma vermelha – cima, ou de se escolher uma vermelha e outra azul, ambas as situações sem reposição:

$$P_N((1,1)) = \frac{N}{2N} \cdot \frac{N}{2N-1} + \frac{N}{2N} \cdot \frac{N}{2N-1} = \frac{2N^2}{2N(2N-1)} = \frac{N}{2N-1}.$$

Além disto, esta também é a probabilidade de se passar pelo ponto simétrico ao ponto $(1,1)$, o ponto $(N-1, N-1)$, isto é,

$$P_N((1,1)) = P_N((N-1, N-1)) = \frac{N}{2N-1}.$$

Logo, a chance de se passar pelo ponto $(1,1)$ depende, de fato, do tamanho N do quadrado. E, além disto, à medida que N cresce, a probabilidade $P_N((1,1))$ diminui. Para ver isto, basta observar que a derivada de $\frac{N}{2N-1}$ é $-\frac{1}{(2N-1)^2}$, negativa para todo $N \geq 1$.

Nota-se também que $P_1((1,1)) = 100\%$, pois neste caso o ponto $(1,1)$ coincidiria com o ponto final da trajetória no quadrado unitário 1×1 . Este é o caso trivial.

No quadrado 2×2 , $P_2((1,1)) = \frac{2}{3} \cong 66,67\%$.

Na malha 5×5 , $P_5((1,1)) = \frac{5}{9} = 55,56\%$. E assim sucessivamente.

Observa-se que, segundo Santos e Castilho (2013), fixado N , o ponto $(1,1)$ é o mais provável de ser visitado por um caminho escolhido ao acaso, isto é, fixado N , $P_N((1,1)) \geq P_N((x,y))$ para todo par (x,y) do reticulado, exceto os pontos $(0,0)$ e (N,N) , que são de passagem obrigatória. O ponto $(1,1)$ é chamado, portanto, de *ponto mais visitado*. Ainda assim, $P_N((1,1))$ não é uma probabilidade alta em termos absolutos (menor do que 66,7% para $N \geq 2$), o que torna pouco intuitivo o fato de $(1,1)$ ser o mais visitado dentre os pontos do reticulado.

3.1 Uma outra maneira de calcular $P_N((1,1))$

Uma outra maneira de estudarmos a função $P_N((1,1))$ seria a seguinte: primeiro, nota-se que a quantidade total de caminhos da origem até o ponto final (N,N) é a combinação $C_{2N,N} = \frac{(N+N)!}{N!N!}$, pois, como são $2N$ passos a serem dados ao todo, devem-se escolher N deles para serem dados para cima.

Consequentemente, a quantidade “ c ” de caminhos que *passam por – atravessam –* um ponto qualquer (x,y) é dado pela fórmula

$$c(x,y,N) = \underbrace{\frac{(x+y)!}{x!y!}}_{\text{caminhos que chegam até } (x,y)} \cdot \underbrace{\frac{(N-x+N-y)!}{(N-x)!(N-y)!}}_{\text{caminhos que saem de } (x,y) \text{ e terminam em } (N,N)}.$$

Observe que

$$c(N,N,N) = \frac{(N+N)!}{N!N!} \cdot \underbrace{\frac{(N-N+N-N)!}{(N-N)!(N-N)!}}_{\text{caminhos que saem de } (x,y) \text{ e terminam em } (N,N)} = \frac{(N+N)!}{N!N!} \cdot \frac{0!}{0!0!} =$$

$$\frac{(N+N)!}{N!N!} \cdot 1 = \frac{(N+N)!}{N!N!}.$$

Assim, a *probabilidade* de se passar pelo ponto $(1,1)$ será a razão

$$P_N((1,1)) = \frac{c(1,1,N)}{c(N,N,N)} = \frac{\left[\frac{(1+1)!}{1! \cdot 1!} \cdot \frac{(N-1+N-1)!}{(N-1)! \cdot (N-1)!} \right]}{\left[\frac{(N+N)!}{N!N!} \right]} =$$

$$\frac{2(2N-2)!}{(N-1)!(N-1)!} \cdot \frac{N!N!}{(2N)!} = \frac{2N^2}{2N(2N-1)} = \frac{N}{2N-1},$$

a mesma expressão anterior de $P_N((1,1))$.

É interessante notar que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2N-1} = 0,5$, isto é, a probabilidade de se passar pelo ponto $(1,1)$ apesar de decrescer com N , é maior do que 50% para todo $N > 0$.

4 Comportamento da função P_N no ponto $(1,3)$

Vejamos agora que, ao contrário do que ocorre com o ponto $(1,1)$, a probabilidade não é decrescente com N para certos pontos do plano. No ponto $(1,3)$,

$$P_N((1,3)) = \frac{\left[\frac{(1+3)!}{1!3!} \cdot \frac{(N-1+N-3)!}{(N-1)!(N-3)!} \right]}{\left[\frac{(N+N)!}{N!N!} \right]}.$$

Simplificando os fatoriais, por exemplo, no software livre MAXIMA, chega-se a

$$P_N((1,3)) = \frac{(N-2)N}{(2N-3)(2N-1)}.$$

Derivando com relação a N , e efetuando várias simplificações, que também podem ser feitas no MAXIMA, temos:

$$[P_N((1,3))] = \frac{6(N-1)}{(2N-3)^2(2N-1)^2} > 0, N \geq 3.$$

Ou seja, no ponto $(1,3)$, a função $P_N((1,3))$ é crescente com N . Calculando para alguns valores de N , temos:

$$P_3((1,3)) = \frac{3}{3 \cdot 5} = 20\%,$$

e

$$P_5((1,3)) = \frac{15}{7 \cdot 9} \cong 23,8\% > P_3((1,3)).$$

5 Comportamento da função P_N nos pontos $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,2)$

Dois pontos para os quais P_N é constante são $(1,0)$ e $(0,1)$. Ambos possuem 50% de chance de serem visitados, independentemente de $N > 0$.

Já vimos que para o ponto mais visitado $(1,1)$, P_N é decrescente. Veremos agora que o ponto $(1,2)$ é outro ponto no qual a probabilidade também diminui com N . Usando o software MAXIMA para as simplificações, obtemos:

$$P_{N+1}((1,2)) - P_N((1,2)) = -\frac{3}{16N^2 - 4}.$$

Sendo esta última expressão negativa para todo $N > 0$, conclui-se que $P_N((1,2))$ é decrescente. Alternativamente, derivando $P_N((1,2))$ no MAXIMA, obtemos

$$P'_N((1,2)) = -\frac{0,75}{(2N-1)^2} < 0, \forall N > 0.$$

6 Comportamento da função P_N no ponto $(2,4)$

O ponto $(2,4)$ é um exemplo no qual P_N não é crescente nem decrescente. Podemos ver isto nos casos $N = 6, 7, 8$ e 9 :

$P_6((2,4)) = 24,35\%$, $P_7((2,4)) = 24,48\% = P_8((2,4))$, $P_9((2,4)) = 24,43\%$. Isto é, a probabilidade aumenta de P_6 para P_7 , e por fim diminui em P_9 .

A título de ilustração, mostremos os cálculos de $P_7((2,4))$ e $P_8((2,4))$:

$$P_7((2,4)) = \frac{c(2,4,7)}{c(7,7,7)} = \frac{\frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{8!}{5!3!}}{\frac{14!}{7!7!}} = \frac{35}{143} = 24,48\%.$$

Para $N = 8$,

$$P_8((2,4)) = \frac{c(2,4,8)}{c(8,8,8)} = \frac{\frac{6!}{2!4!} \cdot \frac{10!}{6!4!}}{\frac{16!}{8!8!}} = \frac{35}{143} = 24,48\%$$

7 Comportamento da função P_N nos pontos da diagonal secundária da grade quadrada

Analisemos agora o comportamento da função $P_N((x,y))$ nos pontos da diagonal secundária do quadrado. Veremos que a probabilidade de se passar por um ponto do tipo (x,x) diminui, quando a ordem N do quadrado aumenta, assim como ocorre com o ponto mais visitado $(1,1)$, já analisado anteriormente. Excetuando-se, obviamente, o ponto $(0,0)$ da diagonal, cuja probabilidade de ser atravessado por um caminho é constante igual a 100%.

Para os demais pontos $(x,x) \neq (0,0)$, tal que x é fixo e não depende de N , vamos calcular a diferença

$$P_{N+1}((x,x)) - P_N((x,x)),$$

e provar que esta diferença é menor do que zero para todo $N > x > 0$:

$$P_{N+1}((x,x)) - P_N((x,x)) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{c(x,x,N+1)}{c(N+1,N+1,N+1)} - \frac{c(x,x,N)}{c(N,N,N)} < 0.$$

Substituindo c pela sua fórmula:

$$\frac{\left[\frac{(x+x)!}{x!x!} \cdot \frac{(N+1-x+N+1-x)!}{(N+1-x)!(N+1-x)!} \right]}{\left[\frac{(N+1+N+1)!}{(N+1)!(N+1)!} \right]} - \frac{\left[\frac{(x+x)!}{x!x!} \cdot \frac{(N-x+N-x)!}{(N-x)!(N-x)!} \right]}{\left[\frac{(N+N)!}{N!N!} \right]} < 0.$$

Operando dentro dos parênteses:

$$\frac{\frac{(2N+2-2x)!}{(N+1-x)!^2}}{\frac{(2N+2)!}{(N+1)!^2}} - \frac{\frac{(2N-2x)!}{(N-x)!^2}}{\frac{(2N)!}{N!^2}} < 0.$$

Na subtração acima, vamos a seguir desenvolver os fatoriais até que os fatoriais do minuendo (à esquerda) se igualem aos do subtraendo (à direita):

$$\frac{\frac{(2N+2-2x)(2N+1-2x)(2N-2x)!}{(N+1-x)^2(N-x)!^2}}{\frac{(2N+2)(2N+1)(2N)!}{(N+1)^2N!^2}} - \frac{\frac{(2N-2x)!}{(N-x)!^2}}{\frac{(2N)!}{N!^2}} < 0.$$

Simplificando os fatoriais:

$$\frac{\frac{(2N+2-2x)(2N+1-2x)}{(N+1-x)^2}}{\frac{(2N+2)(2N+1)}{(N+1)^2}} - 1 < 0.$$

Somando 1 a ambos os membros, e depois multiplicando:

$$\frac{(2N+2-2x)(2N+1-2x)}{(N+1-x)^2} < \frac{(2N+2)(2N+1)}{(N+1)^2}.$$

Calculando o m.m.c. e simplificando:

$$(2N+2-2x)(2N+1-2x)(N+1)^2 - (2N+2)(2N+1)(N+1-x)^2 < 0 \Leftrightarrow$$

$$-2x(N+1)(N-x+1) < 0.$$

Como $x > 0$, então, dividindo ambos os lados por $-2x(N+1)$, inverte-se a desigualdade:

$$(N-x+1) > 0,$$

o que é verdade, pois $N-x+1 > x-x+1 = 1 > 0$.

8 Estudo da probabilidade limite $P_N((x, y))$, quando N tende a infinito.

Nos deteremos agora a analisar o que ocorre com P_N quando o quadrado aumenta indefinidamente de tamanho. Estudaremos a probabilidade limite de $P_N((x, y))$ à medida que N cresce para o infinito.

Bem, a probabilidade de se escolher um caminho que passe por um ponto genérico (x, y) é a razão

$$P_N((x, y)) = \frac{\left[\frac{(x+y)!}{x! y!} \cdot \frac{(N-x+N-y)!}{(N-x)!(N-y)!} \right]}{\left[\frac{(N+N)!}{N! N!} \right]}.$$

Operando dentro dos parênteses e invertendo a fração de baixo:

$$\left[\frac{(x+y)!}{x! y!} \cdot \frac{(2N-x-y)!}{(N-x)!(N-y)!} \right] \cdot \left[\frac{N! N!}{(2N)!} \right].$$

Apenas trocando alguns termos de lugar:

$$\frac{(x+y)!}{x! y!} \cdot \frac{N!}{(N-x)!} \cdot \frac{N!}{(N-y)!} \cdot \frac{(2N-x-y)!}{(2N)!}.$$

Desenvolvendo os fatoriais e já simplificando com os fatoriais do denominador:

$$\frac{(x+y)!}{x! y!} \cdot \frac{[N(N-1) \cdots (N-(x-1))]}{1 \cdot 1 \cdot (2N)(2N-1) \cdots (2N-(x+y-1))} \cdot \frac{[N(N-1) \cdots (N-(y-1))]}{1 \cdot 1 \cdot (2N)(2N-1) \cdots (2N-(x+y-1))}.$$

Observe agora que, ao multiplicarmos os valores que aparecem entre colchetes no numerador, obtemos um polinômio de grau $x+y$ no numerador, já que, em cada um dos colchetes, há x e y fatores, respectivamente.

No denominador, ao multiplicarmos todos os valores entre parênteses, também obtemos um polinômio de grau $x+y$:

$$\frac{(x+y)!}{x! y!} \cdot \frac{(N^{x+y} + \dots)}{(2N)^{x+y} + \dots} =$$

$$\frac{(x+y)!}{x! y!} \cdot \frac{(N^{x+y} + f(N))}{(2N)^{x+y} + g(N)},$$

onde $f(N)$ e $g(N)$ são polinômios de grau menor do que $x+y$. Logo, tomando o limite quando N tende a infinito:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N((x, y)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(x+y)!}{x! y!} \cdot \frac{(N^{x+y} + f(N))}{(2N)^{x+y} + g(N)} =$$

$$\frac{(x+y)!}{x! y!} \cdot \frac{1}{2^{x+y}} (*),$$

que é maior do que zero para todo ponto (x, y) que não dependa de N .

Para pontos (x, y) que não dependem de N , podemos calcular o limite $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N((x, y))$ diretamente através desta última expressão (*), como veremos no cálculo a seguir para o ponto $(1, 3)$.

No ponto (1,3), onde já tínhamos visto que P_N é crescente, temos a probabilidade limite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N((1,3)) = \frac{(1+3)!}{1!3!} \cdot \frac{1}{2^{1+3}} = \frac{24}{96} = 25\%.$$

Figura 2 – P_N é limitada por cima em 25% no ponto (1,3)

Fonte: figura construída pelo autor no software Winplot

8.1 A probabilidade limite de se passar pelo ponto mais visitado (1, 1), quando N tende a infinito.

No ponto mais visitado (1,1),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N((1,1)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N}{2N-1} = \frac{1}{2}.$$

Ou, pelo resultado anterior, usando a expressão (*),

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N((1,1)) = \frac{(1+1)!}{1!1!} \cdot \frac{1}{2^{1+1}} = \frac{1}{2}.$$

Ou seja, quando a ordem N da malha tende a infinito, a probabilidade de se passar pelo ponto (1,1) decresce para $\frac{1}{2}$.

8.2 A probabilidade limite em pontos que dependam de N

Observemos que, para pontos (x, y) que dependam de N , o limite deve ser calculado a partir da expressão $\frac{c(x, y, N)}{c(N, N, N)}$, como, por exemplo, no caso do ponto $(N, 0)$, e também do ponto $(0, N)$, os “vértices” do quadrado. Para o ponto $(N, 0)$, temos a seguinte probabilidade limite:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N((N, 0)) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{c(N, 0, N)}{c(N, N, N)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{(N+0)!}{N!0!} \cdot \frac{(N-N+N-0)!}{(N-N)!(N-0)!} \right]}{\left[\frac{(N+N)!}{N!N!} \right]} =$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\binom{N+N}{N}} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

pois a combinação $\binom{N+N}{N}$ vai a infinito quando N cresce a infinito. Para ver isto, bastar verificarmos que este número binomial representa quantidade de permutações com elementos repetidos do anagrama

$$\underbrace{AA \cdots A}_{N \text{ letras}} \underbrace{BB \cdots B}_{N \text{ letras}},$$

que tende a infinito quando N tende a infinito.

Para qualquer ponto (x, y) que não dependa de N , a probabilidade limite nunca será zero, de acordo com a expressão (*), ao contrário do que ocorre com $(N, 0)$, como vimos no cálculo anterior.

8.3 Comparando a probabilidade limite do ponto $(1, 1)$ com outros pontos

Como o número de caminhos que passam por $(1, 1)$ é maior do que o número de caminhos que passam pelo ponto (x, y) , $(x, y) \neq (0, 0)$ e $(x, y) \neq (N, N)$, então, para estes pontos,

$$P_N((1, 1)) > P_N((x, y)).$$

Assim, tomando o limite,

$$50\% = \lim_{N \rightarrow \infty} P_N((1, 1)) \geq \lim_{N \rightarrow \infty} P_N((x, y)).$$

Ou seja, a *probabilidade limite* de se passar pelo ponto $(1, 1)$ é maior ou igual do que a *probabilidade limite* de se passar pelo ponto (x, y) , $(x, y) \neq (0, 0)$ e $(x, y) \neq (N, N)$, quando N tende a infinito. Isto é, a probabilidade limite em qualquer ponto do quadrado não ultrapassa 50%.

9 Consequências

Podemos deduzir uma propriedade do fatorial interessante, a partir destes resultados, a saber,

$$\frac{(x+y)!}{x! y!} \cdot \frac{1}{2^{x+y}} \leq 1.$$

Para a prova, observe que

$$\frac{(x+y)!}{x! y!} \geq 1,$$

pois o membro esquerdo é uma combinação, um número binomial. Logo,

$$(x+y)! \geq x! y!.$$

Porém, ao dividirmos o membro esquerdo por 2^{x+y} , a desigualdade, espantosamente, se inverte:

$$\frac{(x+y)!}{2^{x+y}} \leq (x! y!) \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x+y)!}{x! y!} \cdot \frac{1}{2^{x+y}} \leq 1,$$

pois, como visto acima, o primeiro membro desta última desigualdade é uma probabilidade limite, $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N((x, y))$, sendo, portanto, menor ou igual a 1, o que mostra o resultado desejado. De fato, esta desigualdade também pode ser provada por indução em x ou em y .

10 Considerações finais e perguntas futuras

Neste artigo, vimos que certos pontos possuem a característica de ter P_N como uma função crescente, outros como decrescente – como no caso dos pontos da diagonal secundária do quadrado –, outros com P_N constante – como no caso dos pontos (1,0) e (0,1), e outros com nenhuma das opções anteriores, como é o caso do ponto (2,4).

Dedicamo-nos também a explorar a probabilidade limite de P_N , e vimos que esta probabilidade limite, para pontos que *não* dependem de N , pode ser calculada por uma fórmula simples. Vimos que há pontos para os quais a probabilidade limite é zero, que seriam os vértices superior esquerdo e inferior direito do quadrado, e que a probabilidade limite de um ponto qualquer da grade é menor ou igual a 50%.

Porém, cabem ainda várias perguntas não respondidas até aqui. Por quais outros pontos a probabilidade de passar por eles cresce com N , e por quais a probabilidade decresce? Por quais outros pontos P_N é constante? E por quais outros nenhuma das opções anteriores vale? Como se comporta P_N na diagonal principal do quadrado?

Como estes cálculos podem ser utilizados em sala de aula? Quais possíveis contextos podem ser gerados com as questões propostas neste artigo?

Sobre a probabilidade limite, há outros pontos cujo limite de P_N é zero? Há outros pontos cujo limite é 50% além do ponto mais visitado (1,1)?

O trabalho pode suscitar ao leitor a descobrir as respostas destas e de outras perguntas relacionados ao problema dos caminhos em grades quadradas.

11 Referências

HENRIQUE, G. **Análise combinatória**. Apostila. UFMG. Disponível em: <<http://paginapessoal.utfpr.edu.br/ngsilva/publicacoes/ApostilaAnaliseCombinatoria.pdf/view>>. Acesso em: 16 set. 2016.

NAGAMINE, C. M. L. et al. Análise praxeológica dos passeios aleatórios da Mônica. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 39, p. 451-472, 2011.

SANTOS, R. C.; CASTILHO, J. E. O problema do ponto mais visitado. **Revista do Professor de Matemática**, v. 82, 2013. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/82/11.html>>. Acesso em: 27 set 2016.