Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 8, dez. 2016

Felipe Felix Souto

Universidade Estadual Paulista
“Júlio de Mesquita Filho”-
Unesp, Câmpus Rio Claro
felipe_felix_souto
@hotmail.com

Marta Cilene Gadotti

Universidade Estadual Paulista
“Júlio de Mesquita Filho”-
Unesp, Câmpus Rio Claro
martacg@unesp.br

Sobre séries de Fourier

About Fourier series

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é apresentar alguns pontos importantes da teoria da Análise de Fourier. Na primeira seção descrevemos a trajetória de Fourier, um dos matemáticos mais citados do século XX. A seção seguinte introduz a Série de Fourier e apresenta alguns dos resultados de convergência. Em seguida, é dado um exemplo de uma função contínua cuja Série de Fourier diverge. Além disso, ilustramos graficamente, através de um exemplo, como a convergência se dá. Finalizamos este trabalho com duas aplicações. Uma delas é o uso das Séries de Fourier para expressar números irracionais, enquanto que a outra envolve o uso da série para expressar a solução de um problema sobre elasticidade, em que a tensão em uma barra satisfaz uma certa EDP. Buscamos assim, fortalecer ainda mais a importância dos estudos desse tipo de série.

Palavras-chave: Séries de Fourier. Convergência. Números Irracionais. Equação de Poisson.

Abstract

The main objective of this paper is to present some important points of the theory of Fourier Analysis. The first section we describe the trajectory of Fourier, one of the most cited mathematicians of the twentieth century. In the following section introduces the Fourier Series and present some of the convergence results. Then it is given an example of a continuous function wich its Fourier series diverges. In addition, we illustrate graphically, by one example, as convergence occurs . We end this work with two applications. One is the use of the Fourier series for expressing irrational numbers, while the other involves the use of series to express the solution of a problem of elasticity in the tension in a bar that satisfies a certain PDE. With this, we seek to strengthen the importance of studies of this type of series.

Keywords: Fourier Series. Convergence. Irrational numbers. Poisson equation.

1 Um pouco de história

Iniciamos este artigo retratando, de forma breve, a história deste importante matemático, Jean-Baptiste Joseph Fourier (Auxerre, 21 de março de 1768 - Paris, 16 de maio de 1830) foi um matemático e físico francês, celebrado por iniciar a investigação sobre a decomposição de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes chamadas séries de Fourier e a sua aplicação aos problemas da condução do calor. A transformada de Fourier foi designada em sua homenagem. Fourier também é geralmente creditado pela descoberta do efeito estufa.

Figura 1: Jean-Baptiste Joseph Fourier

Foi o 12^o filho dos 15 que teve seu pai, um alfaiate em Auxerre. Ele ficou órfão muito jovem e foi internado na escola militar de Auxerre, onde inicialmente mostrou ter talento para a literatura, mas aos treze anos começou a interessar-se pela matemática. Aos catorze anos já tinha lido os seis volumes do Curso sobre Matemática de Étienne Bézout e em 1783 recebeu o primeiro prêmio pelo seu estudo da Mecânica Geral de Charles Bossut.

Em 1787 decidiu seguir a carreira religiosa, no entanto, persistiu no seu interesse pela matemática e manteve correspondência com o professor de matemática de Auxerre e enviou um manuscrito a Jean-Étienne Montucla em Paris. Abandonou a abadia em 1789 e visitou Paris onde apresentou um artigo à Academia Real de Ciências francesa sobre as suas pesquisas para a solução de equações numéricas, assunto de seu interesse. Em 1790 tornou-se professor de matemática na escola militar de Auxerre.

No final de 1794 foi nomeado para estudar na École Normale de Paris. Nesta escola, onde demonstrou ser um dos alunos mais brilhantes, Fourier teve como professores Joseph-Louis de Lagrange, Pierre Simon Laplace e Gaspard Monge, físicos-matemáticos da época. Ele começou então a ensinar primeiro no Collège de France e depois na École Polytechnique sob a direção de Lazare Carnot e Gaspard Monge, e iniciou uma atividade mais séria em investigação matemática, mantendo excelentes contatos com Lagrange, Laplace e Monge. Em 1797 sucedeu a Lagrange ao ser nomeado para a cátedra de Análise e Mecânica nesta escola. Ele ficou conhecido pelas suas aulas excepcionais, devido ao seu grande dom para a oratória que já lhe tinha trazido reconhecimento na política

Em 1798, juntou-se a Napoleão e por méritos, mais tarde foi nomeado prefeito de Grenoble. Neste local, Fourier desenvolveu a maioria do seu trabalho experimental e teórico sobre a propagação do calor. Este permitiu-lhe modelar a evolução da temperatura através de séries trigonométricas. Em 1822 Fourier escreveu “Theorie analytique de la chaleur” (Teoria Analítica do Calor), um marco na física-matemática. Este trabalho contribui aos fundamentos da termodinâmica e constitui uma melhoria muito importante para a modelização matemática dos fenômenos físicos. Inaugura-se a área matemática de teoria de análise de Fourier. No entanto,

uma simplificação excessiva e pouco rigorosa, geraram muitas críticas por parte de Laplace e Lagrange. Em particular, neste trabalho Fourier afirma que qualquer função de uma variável, contínua ou descontínua, pode ser expandida em uma série de senos de múltiplos da variável. Este resultado incorreto teve, no entanto, uma grande importância ao incluir a possibilidade de expandir deste modo também funções descontínuas. Lagrange, que tinha estudado este problema anteriormente, foi particularmente crítico da demonstração apresentada por Fourier. Mais tarde, esta demonstração foi melhorada por matemáticos como Johann Dirichlet, François Budan de Boislaurent e Jacques Charles François Sturm, que apresentou a versão final ao chamado Teorema de Fourier em 1829. Em 1830, Fourier morreu vítima de um aneurisma cerebral.

2 Séries de Fourier

Nesta seção pretendemos introduzir as Séries de Fourier. A ideia é, basicamente, tentar escrever uma função como uma combinação infinita de senos e cossenos, para tanto, será necessário introduzir alguns conceitos.

Definição 1 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, dizemos que f é uma função periódica de período T quando $f(x+T) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Definição 2 *Dizemos que uma função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ é $\mathcal{L}^1$, quando for integrável e absolutamente integrável.*

Observação 3 *É possível mostrar que toda função contínua é uma função $\mathcal{L}^1$.*

Definição 4 (Série de Fourier) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função $\mathcal{L}^1$ e periódica de período $2L$. A Série de Fourier de f é dada por:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right),$$

onde os coeficientes a_n e b_n são denominados coeficientes de Fourier e são dados, para cada $n = 1, 2, \dots$, por:

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Definição 5 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função.*

- (i) *f é denominada seccionalmente contínua quando tiver apenas um número finito de descontinuidades de primeira espécie em qualquer intervalo limitado;*
- (ii) *f é denominada seccionalmente diferenciável quando for seccionalmente contínua e sua derivada também o for.*

O principal teorema sobre convergência pontual de Séries de Fourier é conhecido como Teorema de Fourier e sua demonstração é baseada no teste abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada nas referências [1] e [2].

Proposição 6 (Teste de Dini) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e $\mathcal{L}^1$ em $[-L, L]$, fixado $x \in [-L, L]$ suponha que os limites laterais $f(x-0)$ e $f(x+0)$ existam e defina*

$$g(x, t) = [f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)].$$

Suponha também que exista $\eta > 0$ tal que:

$$\int_0^\eta \left| \frac{g(x, t)}{t} \right| dt < \infty.$$

Então $S_n(x) \rightarrow \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, quando $n \rightarrow \infty$, onde $S_n(x)$ representa a soma parcial de ordem n da Série de Fourier de f .

Teorema 7 (Teorema de Fourier) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e seccionalmente diferenciável. Então sua Série de Fourier converge, em cada ponto x , para $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, ou seja,*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Demonstração: Como f é seccionalmente diferenciável, segue que

$$f'_+(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \quad e \quad f'_-(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(x-t) - f(x)}{t}$$

existem. Logo

$$\frac{g(x, t)}{t} = \frac{[f(x+t) - f(x+0)] + [f(x-t) - f(x-0)]}{t}$$

é limitada em $[-L, L]$. Então, as hipóteses da Proposição 6 estão satisfeitas. Portanto, a Série de Fourier de f converge pontualmente para a média dos limites laterais da f . ■

Observação 8 *Com o Teorema 7, percebemos que se f for contínua, então, para cada ponto do domínio, a Série de Fourier se iguala com a função. Mesmo assim, nem toda função contínua possui Série de Fourier convergente, tal exemplo será construído neste trabalho.*

O próximo resultado é o mais conhecido sobre convergência uniforme das Séries de Fourier, sua demonstração pode ser encontrada na referência [1].

Teorema 9 (Teorema sobre a Convergência Uniforme da Série de Fourier) *Considere uma função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, seccionalmente contínua e com derivada primeira de quadrado integrável. Então, sua Série de Fourier converge uniformemente para f , em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f .*

O resultado de convergência pontual, que apresentaremos abaixo, foi elaborado por Jordan, quando estudava as funções de variação limitada e sua prova pode ser encontrada na referência [1].

Definição 10 *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b$ uma partição de $[a, b]$. Dizemos que f é de variação limitada sobre $[a, b]$, se existir uma constante $M > 0$ tal que:*

$$\sum_{j=1}^k |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq M,$$

para toda partição P . A variação de f em $[a, b]$ é definida por:

$$V(f) = \sup_{P \in \mathfrak{P}} \sum |f(x_j) - f(x_{j-1})|,$$

onde $\mathfrak{P}$ é o conjunto de todas as partições de $[a, b]$.

Teorema 11 (Teste de Jordan) *Seja f uma função de variação limitada e periódica de período $2L$. Então, sua Série de Fourier converge pontualmente para*

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}.$$

Observação 12 *Não podemos afirmar qual teste sobre convergência pontual é mais eficaz, pois o conjunto de funções em que cada um pode ser aplicável são distintos e infinitos. Desta forma, um teste complementa o outro para garantir a convergência pontual para um número maior de tipos de funções. Por exemplo:*

(i) A função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln|x|}, & 0 < |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é periódica de período 1. Podemos observar que f é contínua e monótona em cada intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ e $[-\frac{1}{2}, 0]$, ou seja, ela é de variação limitada, veja Figura 2. A não-aplicabilidade do Teste de Dini se deve ao fato da integral abaixo divergir:

$$\int_0^\delta \frac{1}{x \ln|x|} dx.$$

Figura 2: Gráfico de $\frac{1}{\ln|x|}$.

(ii) A função

$$f(x) = \begin{cases} |x| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|x|}\right), & 0 < |x| < 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

é periódica de período 2, mas não é de variação limitada e portanto não se aplica o Teste de Jordan, mas se aplica o Teste de Dini, veja Figura 3

Figura 3: Gráfico de $|x| \operatorname{sen}\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

3 Uma função contínua com Série de Fourier divergente

Esta seção trata da construção de uma função contínua com Série de Fourier divergente, baseada na referência [3]. Para construí-la, será necessário o seguinte resultado:

Lema 13 *O somatório:*

$$\phi(n, r, x) = \frac{\cos((r+1)x)}{2n-1} + \frac{\cos((r+2)x)}{2n-3} + \dots + \frac{\cos((r+n)x)}{1} - \frac{\cos((r+n+1)x)}{1} - \frac{\cos((r+n+2)x)}{3} - \dots - \frac{\cos((r+2n)x)}{2n-1}$$

é limitado para quaisquer $n, r \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Note que:

$$\phi(n, r, x) = \sum_{v=1}^n \frac{\cos((r+n-v+1)x) - \cos((r+n+v)x)}{2v-1} = 2\text{sen} \left(\left(r+n+\frac{1}{2} \right) x \right) \sum_{v=1}^n \frac{\text{sen}((v-\frac{1}{2})x)}{2v-1}.$$

Fazendo uma mudança de variável de $\lambda = 2v-1$, obtemos:

$$2\text{sen} \left(\left(r+n+\frac{1}{2} \right) x \right) \sum_{v=1}^n \frac{\text{sen}((v-\frac{1}{2})x)}{2v-1} = 2\text{sen} \left(\left(r+n+\frac{1}{2} \right) x \right) \sum_{\lambda=1}^{2n-1} \frac{\text{sen}((\frac{\lambda}{2})x)}{\lambda}, \quad (1)$$

onde o último somatório é sobre os números ímpares (de 1 a $2n-1$). Observamos que (1) é limitado, pois

$$\sum_{\lambda=1}^{2n-1} \frac{\text{sen}((\frac{\lambda}{2})x)}{\lambda} \quad (2)$$

converge uniformemente para a parte imaginária da série complexa abaixo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n}.$$

Note que esta série converge uniformemente, para $\theta \in [\varepsilon, \pi]$ e $\varepsilon > 0$, pois dado $\varepsilon > 0$, considere $\theta \in [\varepsilon, \pi]$ e

$$E_n(\theta) = \sum_{k=1}^n e^{ik\theta}$$

e observe que, para $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \frac{1}{k} [E_k(\theta) - E_{k-1}(\theta)].$$

Além disso,

$$\sum_{k=m}^n \frac{1}{k} E_{k-1}(\theta) = \sum_{j=m-1}^{n-1} \frac{1}{j+1} E_j(\theta).$$

Então,

$$\sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=m}^n \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right] E_k(\theta) + \frac{1}{n+1} E_n(\theta) - \frac{1}{m} E_{m-1}(\theta). \quad (3)$$

Note que,

$$|E_n(\theta)| = \frac{|e^{i\theta} - e^{i(n+1)\theta}|}{|1 - e^{i\theta}|} \leq \frac{2}{|e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}|} \leq \frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}. \quad (4)$$

De (3) e (4), segue que:

$$\left| \sum_{k=m}^n \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \frac{2}{m \sin(\frac{\theta}{2})}.$$

E, pelo Critério de Cauchy, segue que a série converge uniformemente.

Logo (2) é limitado, e como a função seno é limitada, concluímos a prova do lema. ■

Feito isso, podemos começar a construir a função desejada. Denote por G_n a coleção dos $2n$ números:

$$\frac{1}{2n-1}, \frac{1}{2n-3}, \dots, \frac{1}{3}, 1, -1, -\frac{1}{3}, \dots, -\frac{1}{2n-1}$$

e considere $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ uma sequência crescente de inteiros. Tome os números dos grupos $G_{\lambda_1}, G_{\lambda_2}, \dots$ em ordem e multiplique cada um dos números de G_{λ_v} por v^{-2} , obtendo a sequência $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$\frac{1}{1^2(2\lambda_1-1)}, \dots, -\frac{1}{1^2(2\lambda_1-1)}, \frac{1}{2^2(2\lambda_2-1)}, \frac{1}{2^2(2\lambda_2-3)}, \dots$$

Agora, considere a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(\lambda_n, 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + 2\lambda_{n-1}, x)}{n^2}.$$

Pelo Lema 13 e pelo Teste M de Weierstrass, segue que a série converge uniformemente e absolutamente. Suponha que convirja para uma função $f(x)$ e além disso, como ϕ é contínua, então f também é contínua.

Observe que pelo fato de f ser contínua, podemos multiplicar por $\cos(mx)$ ou $\sin(mx)$ e integrar. Pela ortogonalidade do conjunto formado por estas funções (veja [1]), a integral de cada termo será zero, exceto nos termos da forma $\alpha_m \cos(mx)$. Desta forma, obtemos:

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx = \alpha_m \pi \implies \alpha_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx.$$

Ou seja, os números α_n são os coeficientes de Fourier de f e $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nx)$ é a Série de Fourier de f .

Por fim, podemos escolher λ_v de modo que a Série de Fourier seja divergente em $x = 0$. De fato, considere S_n a n -ésima soma parcial, então:

$$S_{2\lambda_1 + \dots + 2\lambda_v} = \frac{1}{v^2} \left(\frac{1}{2\lambda_v - 1} + \dots + \frac{1}{3} + 1 \right) > \frac{1}{v^2} \int_0^1 \frac{1}{2x-1} dx = \frac{\ln(\lambda_v)}{2v^2}.$$

Desta maneira, se λ_v tender a infinito suficientemente rápido, por exemplo se $\lambda_v = v^{v^2}$, então $S_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$ para alguns valores da sequência. Portanto a Série de Fourier diverge em $x = 0$.

4 Visualização Geométrica

Para se ter uma ideia de como a convergência da Série de Fourier de uma função f se dá, vamos dar um exemplo para visualizar geometricamente a aproximação da função e por alguns termos de sua Série de Fourier.

Considere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, dada por $f(x) = x$, para $-L \leq x \leq L$ e estendida periodicamente para toda reta.

Primeiramente, observe que f é uma função ímpar, assim sua Série de Fourier será apenas uma série de senos, com os coeficientes:

$$a_n = 0 \text{ e } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

Usando integração por partes, temos

$$b_n = \frac{2}{n\pi} (-L \cos(n\pi)) + \frac{2L}{n\pi} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{2L}{n\pi} \cos(n\pi) = \frac{2L}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

Desta maneira, a Série de Fourier fica da forma:

$$\frac{2L}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}}{m} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right).$$

Pelos resultados de convergência, observe que não podemos garantir a igualdade da série com f , pelo fato de a função não ser contínua. Entretanto, vamos ver como ocorre a aproximação do gráfico das somas parciais da Série de Fourier com o da função f . Veja figura 4.

Figura 4: Gráfico $m=1$

Note que com apenas um termo na soma, a aproximação não é boa. Vamos então ver o que acontece ao se

Figura 5: Gráfico $m=12$

Neste caso, observa-se que os gráficos começam a ficar mais próximos, e nas partes em que a função dá um salto, ou seja, é descontínua, o gráfico que representa a soma parcial da série vai se aproximando de uma reta vertical. Vamos considerar $m = 100$. Veja figura 6.

Figura 6: Gráfico $m=100$

Neste último caso, os gráficos aparentam ser quase os mesmos, é claro que é apenas uma aproximação, pois estamos somando apenas um número finito de termos da série, enquanto que a igualdade vale apenas para a soma infinita.

Contudo é possível ver, graficamente, que a aproximação é realmente muito boa, até mesmo para funções descontínuas.

5 Aplicações

Nesta seção, buscamos ver algumas aplicações da Série de Fourier, sendo a primeira o cálculo de alguns números irracionais através de uma série numérica, baseado na referência [4]. A segunda trata da resolução de uma EDP, onde a Série de Fourier é usada como uma ferramenta e não como o método de resolução.

5.1 Aproximações numéricas

Considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, definida por $f(x) = x^2$, para $-L \leq x \leq L$ e estendida periodicamente por toda reta.

Primeiramente, observe que f é uma função par, logo sua Série de Fourier será apenas uma série de cossenos, com os coeficientes:

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{2L^2}{3}, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{e} \quad b_n = 0, \quad \forall n \geq 1.$$

Para calcular a_n , usaremos integração por partes:

$$a_n = L^2(\sin(nL) - \sin(0)) - \frac{2L}{n\pi} \int_0^L x \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\left(\frac{2L}{n\pi}\right)^2 \cos(n\pi) = \frac{4L^2}{n^2\pi^2}(-1)^n.$$

Logo, sua Série de Fourier fica da forma:

$$\frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Neste caso, devido ao Teorema de Fourier (Teorema 7) temos a igualdade ponto a ponto desta série com a função, ou seja, podemos escrever:

$$x^2 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right). \quad (5)$$

A questão que pode surgir é sobre a utilidade de se fazer isso, afinal a função de segundo grau é uma função conhecida e sua expressão é bem mais simples que uma série infinita. Uma possibilidade é a de desvendarmos resultados mais interessantes. Por exemplo, mostrar o valor para o qual a série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Fazendo $x = L$ em (5):

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

No caso em que temos uma função contínua, podemos em geral obter aproximações para o valor de uma série infinita. Com essa mesma série, podemos obter a convergência da série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, tomando $x = 0$ em (5):

$$0 = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(0) \Rightarrow -\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow \frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2},$$

ou seja,

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots$$

Note que conseguimos, além de analisar convergência de algumas séries, expressar alguns números irracionais usando a Série de Fourier

Foram aproximações como essa que, em sua época, Fourier causou instigação, pois como sua teoria tão criticada poderia aproximar tão bem certos números.

5.2 A equação de Poisson na Elasticidade

Esta seção é baseada na aplicação encontrada na referência [5] e sua peculiaridade, como já foi dito, é usar as Séries de Fourier como uma ferramenta para a resolução de uma EDP.

É conhecida da teoria da elasticidade que a função tensão $\psi(x, y)$ em uma barra satisfaz a equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -2$$

em uma secção transversal retangular R , de dimensões a e b , do plano xy , com $\psi = 0$ na fronteira de R .

Começamos introduzindo a mudança de variáveis

$$\psi(x, y) = u(x, y) + ax - x^2.$$

Note que $u(x, y)$ satisfaz a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

pois:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \psi_x - a + 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi_{xx} + 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \psi_y \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \psi_{yy}.$$

Além disso, $u(0, y) = u(a, y) = 0$ e $u(x, \frac{b}{2}) = u(x, -\frac{b}{2}) = x^2 - ax$. Em outras palavras, u satisfaz o seguinte PVC:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(0, y) = u(a, y) = 0 \\ u(x, \frac{b}{2}) = u(x, -\frac{b}{2}) = x^2 - ax. \end{cases} \quad (6)$$

Agora, vamos usar o método de separação de variáveis para determinar a função tensão $\psi(x, y)$ e, para tanto, vamos determinar uma solução de (6). Supondo $u(x, y) = R(x)T(y)$ e usando as condições da equação de Laplace, obtemos:

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = R''T + RT'' \Rightarrow \frac{R''}{R} = \frac{T''}{T} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Usando as condições homogêneas, obtemos o problema de Sturm-Liouville:

$$\begin{cases} R'' - \lambda R = 0 \\ R(0) = R(a) = 0, \end{cases}$$

que admite soluções não triviais apenas para $\lambda = \bar{k}^2$, com $\bar{k} > 0$. As autofunções correspondentes são:

$$R_k(x) = A \sin\left(\frac{k\pi}{a}x\right), \quad k = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Como já analisamos a equação em x , vamos usar as informações para analisar a equação em y :

$$T'' - \bar{k}^2 T = 0, \quad (8)$$

cujas soluções podem ser vistas como

$$T(y) = c_1 e^{ky} + c_2 e^{-ky}$$

e usando o fato que:

$$\begin{aligned} c_1 e^{kt} &= c_1 \cosh(ky) + c_1 \sinh(ky) \quad e \quad c_2 e^{-kt} = c_2 \cosh(ky) - c_1 \sinh(ky) \Rightarrow \\ c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt} &= (c_1 + c_2) \cosh(ky) + (c_1 - c_2) \sinh(ky), \end{aligned}$$

podemos reescrevê-la da seguinte forma:

$$T(y) = B \cosh(\bar{k}y) + C \sinh(\bar{k}y), \quad (9)$$

onde B e C são constantes reais e $\bar{k} = \frac{k\pi}{a}$ com $k = 1, 2, \dots$

Feito isso, usando as soluções encontradas em (7) e (9) junto com o princípio da superposição encontramos uma solução da equação de Laplace:

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cosh\left(\frac{k\pi y}{a}\right) + b_k \sinh\left(\frac{k\pi y}{a}\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right),$$

onde $a_k = AB$ e $b_k = AC$ são constantes.

Das condições não-homogêneas, temos:

$$\begin{aligned} u\left(x, \frac{b}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cosh\left(\frac{k\pi b}{2a}\right) + b_k \sinh\left(\frac{k\pi b}{2a}\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) = x^2 - ax \\ u\left(x, -\frac{b}{2}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cosh\left(\frac{k\pi b}{2a}\right) - b_k \sinh\left(\frac{k\pi b}{2a}\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) = x^2 - ax \end{aligned}$$

o que implica que $b_k = 0$, para todo k e assim, temos a igualdade:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cosh\left(\frac{k\pi b}{2a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right) = x^2 - ax, \quad (10)$$

que nada mais é que a Série de Fourier da função $f(x) = x^2 - ax$. Assim, para determinar cada a_k , podemos usar a definição dos coeficientes de Fourier da seguinte forma:

$$a_k \cosh\left(\frac{k\pi b}{2a}\right) = \frac{2}{a} \int_0^a (x^2 - ax) \operatorname{sen}\left(\frac{k\pi x}{a}\right) dx = -\frac{8a^2}{k^3 \pi^3}, \quad (11)$$

para k ímpar. Por fim, voltamos na mudança de variáveis para obter a solução:

$$\psi(x, y) = ax - x^2 - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh((2n-1)\pi y/a) \operatorname{sen}((2n-1)\pi x/a)}{k^3 \cosh((2n-1)\pi b/2a)}.$$

Referências

- [1] FIGUEIREDO, D. G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**, 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.
- [2] SOUTO, F. F. Convergência pontual da série de Fourier, **Boletim de Iniciação Científica em Matemática**, v. 12, p. 29-43, 2015.
- [3] TITCHMARSH, E. C. **The theory of functions**. Oxford: Oxford University Press, 1952.
- [4] ARFKEN, G. B.; WEBBER, H. J.; HARRIS, F. E., **Mathematical methods for physicists**. 7. ed. Amsterdam: Elsevier, 2013.
- [5] OLIVEIRA, E. D.; MAIORINO, J. E. **Introdução aos métodos da matemática aplicada**. 2. ed. Campinas: Editora Unicamp, 2003.